# MATHS

## 2de

Édition 2023

+ 200 exercices numériques autocorrigés

Sésamath

MAGNARD

# MATHS

# 2de

## Édition 2023


**Hélène GRINGOZ**
**Coordinatrice**
Académie de Grenoble

**Frédéric WEYERMANN**
**Coordinateur**
Lycée Polyvalent Léon Blum
Créteil (94)

**Sandrine BAGLIERI**
Académie d'Aix-Marseille

**François GUIADER**
Lycée Teilhard de Chardin
St Maur-des-Fossés (94)

**Delphine BAU**
Lycée Polyvalent Évariste Galois
Noisy le Grand (93)

**Didier KRIEGER**
Lycée André Marie Ampère
Lyon (69)

**Muriel GOARIN**
Lycée Clémenceau,
Nantes (44)

**Laura MAGANA**
Lycée Alexandre Dumas
Saint-Cloud (92)

**Jérémy COUTEAU**
Lycée Jean Perrin
Rezé (44)

**Mathieu PRADEL**
Lycée Diderot
Paris (75)



Les auteurs et les éditions MAGNARD remercient vivement l'association Sésamath pour la réalisation de ressources pédagogiques et le travail collaboratif dans le cadre de notre partenariat.



MAGNARD

# Sommaire

Programme d'après le BO n° 1 du 22 janvier 2019
www.lienmini.fr/8270-BO

## Méthodes des Automatismes


- Calculer mentalement avec des décimaux ..... 8
- Calculer mentalement avec des fractions ..... 8
- Effectuer des calculs simples avec des pourcentages et passer d'une écriture à une autre ..... 9
- Appliquer un pourcentage d'évolution ..... 9
- Appliquer une formule mathématique ..... 10
- Résoudre une équation du 1er degré ..... 10
- Utiliser un ordre de grandeur pour contrôler un résultat ..... 11
- Repérer sur une droite graduée ou un plan repéré ..... 11
- Préciser les éléments caractéristiques d'un graphique ..... 12
- Réaliser une estimation graphique ..... 13
- Utiliser les théorèmes de Pythagore et Thalès ..... 14
- Utiliser les réciproques des théorèmes de Pythagore et Thalès ..... 14
- Calculer un périmètre, une aire ou un volume ..... 15
- Nommer des quadrilatères à partir d'un graphique ..... 15


## Partie 1 Algorithmique et programmation

### 1 Programmation en langage Python


Pour prendre un bon départ ..... 17
Activités ..... 18
Cours et exercices résolus ..... 22
**1.** Types de variables et affectation ..... 22
**2.** Instructions conditionnelles ..... 24
**3.** Fonctions ..... 26
**4.** Boucles bornées ..... 28
**5.** Boucles conditionnelles ..... 28
Exercices résolution de problèmes ..... 31
d'entraînement ..... 32
de synthèse ..... 37
d'approfondissement ..... 38
Préparer le contrôle ..... 39
Travaux pratiques ..... 42


## Partie 2 Nombres et calculs

### 2 Nombres et calculs


Pour prendre un bon départ ..... 45
Activités ..... 46
Cours et exercices résolus ..... 48
**1.** Puissances entières relatives ..... 48
**2.** Racine carrée ..... 48
**3.** Multiples, diviseurs et nombres premiers ..... 50
**4.** Ensembles de nombres ..... 52
Exercices résolution de problèmes ..... 54
automatismes ..... 55
d'entraînement ..... 56
de synthèse ..... 62
d'approfondissement ..... 63
Préparer le contrôle ..... 65
Travaux pratiques ..... 68


### 3 Intervalles, inégalités, inéquations


Pour prendre un bon départ ..... 71
Activités ..... 72
Cours et exercices résolus ..... 74
**1.** Intervalles ..... 74
**2.** Inégalités et inéquations ..... 76
**3.** Comparaison ..... 78
**4.** Valeur absolue d'un nombre réel ..... 78
Exercices résolution de problèmes ..... 80
automatismes ..... 81
d'entraînement ..... 82
de synthèse ..... 89
d'approfondissement ..... 90
Préparer le contrôle ..... 91
Travaux pratiques ..... 94


### 4 Calcul littéral


Pour prendre un bon départ ..... 97
Activités ..... 98
Cours et exercices résolus ..... 100
**1.** Distributivité et identités remarquables ..... 100
**2.** Résolution d'équation produit nul ..... 102
**3.** Calcul littéral en écriture fractionnaire ..... 102
**4.** Résolution d'équation quotient ..... 104
Exercices résolution de problèmes ..... 106
automatismes ..... 107
d'entraînement ..... 108
de synthèse ..... 115
d'approfondissement ..... 116
Préparer le contrôle ..... 117
Travaux pratiques ..... 120

## Partie 3 Géométrie

### 5 Géométrie non repérée


- Pour prendre un bon départ ... 123
- Activités ... 124
- Cours et exercices résolus ... 126
  - 1. Géométrie sans repère ... 126
  - 2. Translations et vecteurs associés ... 128
  - 3. Somme et différence de deux vecteurs ... 130
  - 4. Produit d'un vecteur par un nombre réel et colinéarité ... 132
- Exercices résolution de problèmes ... 134
  - automatismes ... 135
  - d'entraînement ... 136
  - de synthèse ... 143
  - d'approfondissement ... 144
- Préparer le contrôle ... 145
- Travaux pratiques ... 148


### 6 Vecteurs et repère


- Pour prendre un bon départ ... 151
- Activités ... 152
- Cours et exercices résolus ... 154
  - 1. Base, repère et coordonnées ... 154
  - 2. Milieu et norme ... 156
  - 3. Condition de colinéarité ... 156
- Exercices résolution de problèmes ... 159
  - automatismes ... 160
  - d'entraînement ... 161
  - de synthèse ... 168
  - d'approfondissement ... 169
- Préparer le contrôle ... 171
- Travaux pratiques ... 174


### 7 Droites du plan et systèmes d'équations


- Pour prendre un bon départ ... 177
- Activités ... 178
- Cours et exercices résolus ... 180
  - 1. Vecteur directeur d'une droite ... 180
  - 2. Équation cartésienne d'une droite ... 180
  - 3. Équation réduite d'une droite ... 182
  - 4. Coefficient directeur d'une droite ... 184
  - 5. Positions relatives de deux droites ... 184
  - 6. Résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues ... 186
- Exercices résolution de problèmes ... 188
  - automatismes ... 189
  - d'entraînement ... 190
  - de synthèse ... 196
  - d'approfondissement ... 197
- Préparer le contrôle ... 199
- Travaux pratiques ... 202


## Partie 4 Fonctions

### 8 Généralités sur les fonctions, fonctions de référence


- Pour prendre un bon départ ... 205
- Activités ... 206
- Cours et exercices résolus ... 208
  - 1. Notion de fonction ... 208
  - 2. Courbe représentative d'une fonction ... 208
  - 3. Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations à l'aide d'une fonction ... 210
  - 4. Exemples de fonctions de référence ... 212
  - 5. Parité ... 214
- Exercices résolution de problèmes ... 217
  - automatismes ... 218
  - d'entraînement ... 219
  - de synthèse ... 227
  - d'approfondissement ... 228
- Préparer le contrôle ... 229
- Travaux pratiques ... 232


### 9 Variations et extremums


- Pour prendre un bon départ ... 237
- Activités ... 238
- Cours et exercices résolus ... 240
  - 1. Variations d'une fonction ... 240
  - 2. Variations des fonctions affines ... 242
  - 3. Maximum et minimum d'une fonction ... 242
  - 4. Variations des fonctions de référence ... 244
- Exercices résolution de problèmes ... 246
  - automatismes ... 247
  - d'entraînement ... 248
  - de synthèse ... 256
  - d'approfondissement ... 257
- Préparer le contrôle ... 259
- Travaux pratiques ... 262


### 10 Signe d'une fonction


- Pour prendre un bon départ ... 265
- Activités ... 266
- Cours et exercices résolus ... 268
  - 1. Signe d'une fonction ... 268
  - 2. Signe d'une fonction affine ... 270
  - 3. Signe d'un produit ou d'un quotient ... 270
  - 4. Inéquations ... 272
  - 5. Positions relatives de courbes de référence ... 272
- Exercices résolution de problèmes ... 274
  - automatismes ... 275
  - d'entraînement ... 276
  - de synthèse ... 282
  - d'approfondissement ... 283
- Préparer le contrôle ... 285
- Travaux pratiques ... 288

# Sommaire

## Partie 5 Statistiques et probabilités


### 11 Proportions et évolutions

- **Pour prendre un bon départ** ..... 291
- **Activités** ..... 292
- **Cours et exercices résolus** ..... 294
  - **1.** Proportion de proportion ..... 294
  - **2.** Évolutions d'une quantité ..... 294
  - **3.** Évolutions successives et évolutions réciproques ..... 296
- **Exercices** résolution de problèmes ..... 298
  - automatismes ..... 299
  - d'entraînement ..... 300
  - de synthèse ..... 304
  - d'approfondissement ..... 305
- **Préparer le contrôle** ..... 307
- **Travaux pratiques** ..... 310

### 12 Statistiques descriptives

- **Pour prendre un bon départ** ..... 313
- **Activités** ..... 314
- **Cours et exercices résolus** ..... 316
  - **1.** Moyenne ..... 316
  - **2.** Linéarité de la moyenne ..... 318
  - **3.** Écart-type ..... 318
  - **4.** Quartiles et écart interquartile ..... 320
- **Exercices** résolution de problèmes ..... 322
  - automatismes ..... 323
  - d'entraînement ..... 324
  - de synthèse ..... 331
  - d'approfondissement ..... 332
- **Préparer le contrôle** ..... 333
- **Travaux pratiques** ..... 336

### 13 Probabilités et échantillonnage

- **Pour prendre un bon départ** ..... 341
- **Activités** ..... 342
- **Cours et exercices résolus** ..... 346
  - **1.** Loi de probabilité ..... 346
  - **2.** Notion d'événement ..... 348
  - **3.** Opérations sur les événements ..... 350
  - **4.** Échantillon et simulation ..... 354
  - **5.** Fluctuation et estimation ..... 356
- **Exercices** résolution de problèmes ..... 358
  - automatismes ..... 359
  - d'entraînement ..... 360
  - de synthèse ..... 370
  - d'approfondissement ..... 372
- **Préparer le contrôle** ..... 373
- **Travaux pratiques** ..... 376

- **Lexique** ..... 380
- **Logique et raisonnement** ..... 385
- **Corrigés** des exercices sur fond bleu 1 ..... 390
- **Rappels et formulaire**
  - L'essentiel du collège : Algèbre ..... rabats I, II, III
  - L'essentiel du collège : Géométrie ..... rabats IV, V
  - Formulaire de Géométrie ..... rabat VI


## Tous les pictos du manuel

Vu au collège · Vu au chap 5 · Je consolide mes acquis
Pour réviser les notions essentielles du collège ou du manuel.

Résolution de problèmes Pour acquérir les bons réflexes.

Oral Pour préparer l'épreuve du Grand oral.

Défi Pour jouer avec les mathématiques.

Logique Pour apprendre un raisonnement logique.

Tableur · Géométrie dynamique
Pour utiliser les outils informatiques.

Python Pour apprendre à programmer

Pour avancer à son rythme.

Esprit critique Pour indiquer un exercice où l'intuition et le raisonnement divergent.

Histoire des maths Pour se rappeler que les mathématiques sont une science en évolution.

Pour aller plus loin Pour approfondir les activités et les TP.

Démo Pour s'entraîner à la démonstration

Pour apprendre à utiliser la calculatrice.

Pour travailler sans calculatrice.

# Résolution de problèmes

**Pour travailler tout au long de l'année les bons réflexes afin de résoudre des problèmes dans des contextes différents.**


- **Décomposer un problème en sous-problèmes** (↪ chapitre 1) ..... 31
- **Rédiger une solution** (↪ chapitres 2 et 9) ..... 54, 246
- **Modéliser une situation** (↪ chapitres 3 et 8) ..... 80, 217
- **Émettre une conjecture** (↪ chapitres 4 et 6) ..... 106, 159
- **Analyser un problème pour le résoudre** (↪ chapitres 5 et 10) ..... 134, 274
- **Vérifier un résultat** (↪ chapitres 7 et 12) ..... 188, 322
- **Choisir le bon schéma** (↪ chapitres 11 et 13) ..... 298, 358


# Automatismes

**Pour apprendre les automatismes et s'entraîner grâce à des méthodes de manuel et des rituels tout au long de l'année.**

## Représentations graphiques


- Repérer un nombre rationnel sur une droite graduée ..... 11, 55, 81, 107, 160, 189
- Repérer un point dans le plan ..... 11, 160, 189, 218
- Préciser sur un graphique les grandeurs en jeu, les unités et les échelles ..... 12, 135, 218, 247, 323
- Estimer graphiquement une valeur atteinte, un antécédent, un seuil, une image ..... 13, 81, 218, 247, 275, 323


## Traitement de données


- Effectuer mentalement des calculs simples avec des pourcentages ..... 9, 107, 218, 299, 359
- Passer d'une écriture d'un nombre à une autre ..... 9, 55, 81, 107, 299, 359
- Appliquer un pourcentage d'évolution ..... 9, 299, 323, 359
- Convertir avec les échelles ..... 135


## Calcul numérique et algébrique

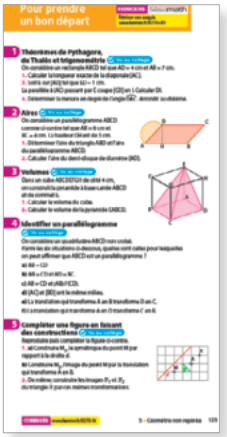

- Effectuer mentalement des calculs simples avec des décimaux ..... 8, 55, 81, 107, 135, 299, 323, 359
- Effectuer mentalement des calculs simples avec des fractions ..... 8, 55, 107, 135, 189, 247, 299, 323, 359
- Effectuer une application numérique d'une formule ..... 10, 55, 81, 107, 160, 189, 275, 299, 359
- Résoudre une équation du premier degré ..... 10, 55, 107, 160, 189, 218, 247, 275, 299, 359
- Utiliser un ordre de grandeur pour contrôler un résultat ..... 11, 55, 81, 107, 189, 299, 323, 359


## Géométrie


- Appliquer le théorème ou la réciproque de Pythagore ..... 14, 135, 160
- Appliquer le théorème ou la réciproque de Thalès ..... 14, 135, 160, 247
- Calculer des aires, des périmètres et des volumes ..... 15, 81, 135, 189, 218, 247, 275
- Calculer des angles ..... 135
- Nommer des quadrilatères à partir d'un graphique ..... 15, 135, 160, 247

# Le parcours de l'élève

## La consolidation des prérequis

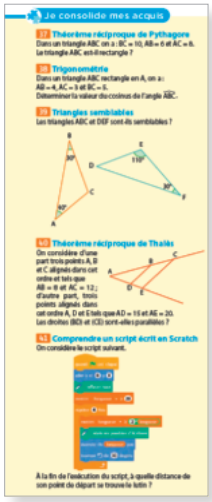



**Faire un point sur les notions à maîtriser** avant de démarrer le chapitre pour se préparer.

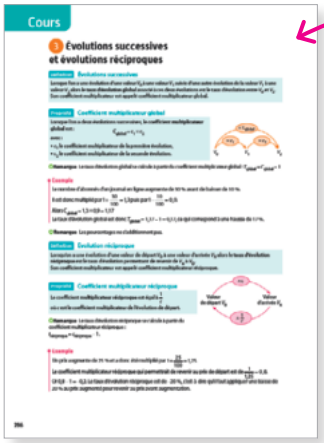
CORRIGÉS www.lienmini.fr/8270-14

**Consolider les acquis** du collège.

EXERCICES Sésamath
Réviser ses acquis
www.lienmini.fr/8270-s10




## L'apprentissage des savoirs et des savoir-faire

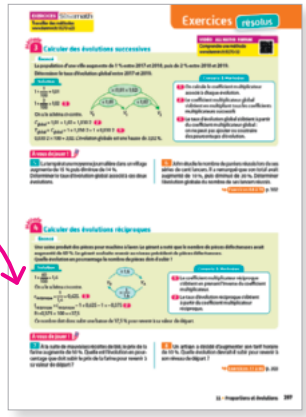



Comprendre les **notions** et les **méthodes** du chapitre.

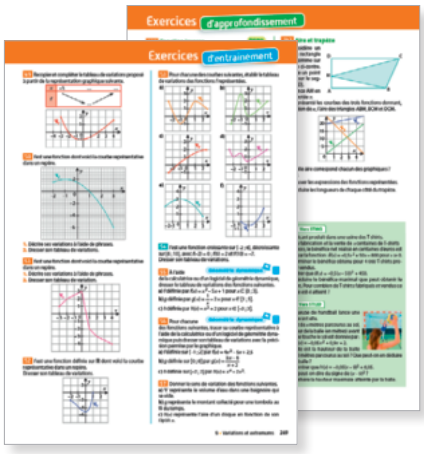
Travailler en **autonomie** grâce :
- aux **exercices corrigés,**
- à la plateforme d'exercices **Sésamath,**
- à des **vidéos** d'exercices résolus.

EXERCICES Sésamath
Travailler des méthodes
www.lienmini.fr/8270-s23

VIDÉO ALL MATHS PARNAK
Comprendre une méthode
www.lienmini.fr/8270-23

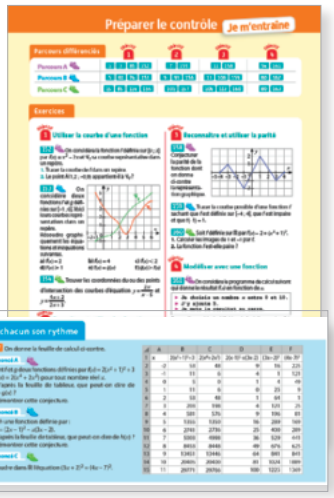



## L'entraînement progressif



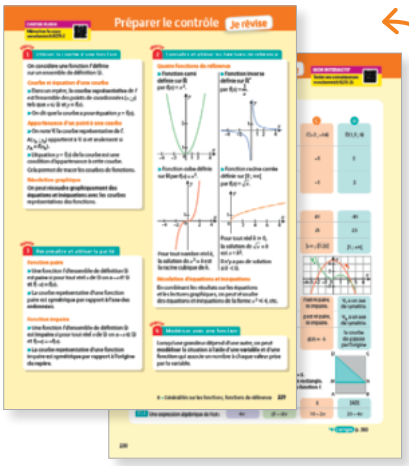

S'entraîner grâce à des séries d'exercices **variés** puis **approfondir** selon son choix d'orientation.

**Avancer à son rythme** et **progresser en confiance** avec 3 parcours différents pour atteindre les objectifs du chapitre.



# Le parcours de l'élève

## La préparation au contrôle



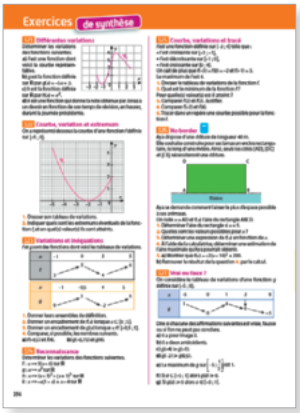

Mémoriser le cours avec des **fiches de révision** et des **cartes flash.**

**CARTES FLASH**
Mémoriser le cours
www.lienmini.fr/8270-2

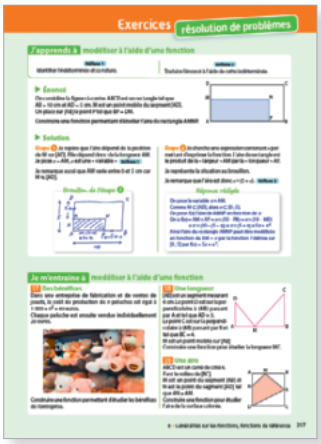
Se tester avec des **QCM.**

**QCM INTERACTIF**
Tester ses connaissances
www.lienmini.fr/8270-25

S'entraîner avant le contrôle avec des exercices **de synthèse.**

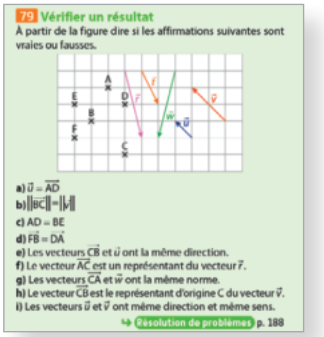


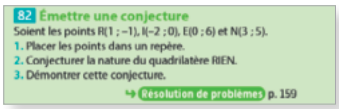

## La résolution de problèmes



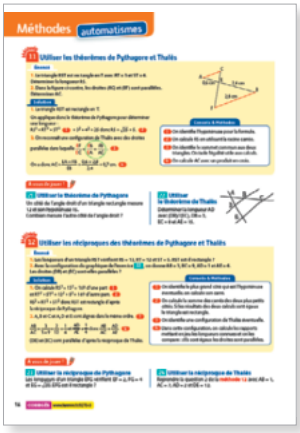

Apprendre les **bons réflexes** pour **résoudre des problèmes**.

**Réinvestir** ces méthodes de résolution de problèmes dans **tous les chapitres.**




## L'acquisition des automatismes




**Apprendre** et **s'entraîner** aux **automatismes** avec les **méthodes** en début de manuel.

**EXERCICES** Sésamath
Travailler des méthodes
www.lienmini.fr/8270-s1

**Réinvestir** ces automatismes dans les **rituels** tout au long de l'année, dans le manuel et en **cartes flash.**

**CARTES FLASH**
Acquérir des automatismes
www.lienmini.fr/8270-6

## Méthode 1 Calculer mentalement avec des décimaux

↪ L'essentiel du collège (rabat)

**Énoncé**

**Calculer mentalement :** **a)** $A = 5 + (2{,}8 + 6 \times 1{,}2)$ **b)** $B = (6{,}2 - 0{,}5) \times 0{,}01$ **c)** $C = 0{,}08 \times 100 \times 0{,}7$

**Solution**

**a)** $A = 5 + (2{,}8 + 6 \times 1{,}2)$ (1)
$A = 5 + (2{,}8 + 7{,}2)$ (1)
$A = 5 + 10$
$A = 15$

**b)** $B = (6{,}2 - 0{,}5) \times 0{,}01$ (1)
$B = 5{,}7 \times 0{,}01$ (2)
$B = 0{,}057$

**c)** $C = 0{,}08 \times 100 \times 0{,}7$ (1) (4)
$C = 8 \times 0{,}7 = 8 \times 0{,}1 \times 7$ (3)
$C = 56 \times 0{,}1 = 5{,}6$ (2)

**Conseils & Méthodes**

(1) • On commence par les calculs entre parenthèses.
• Dans un calcul sans parenthèse, on effectue d'abord les puissances puis les produits et les quotients puis les sommes et différences.
• Quand il n'y a que des sommes/différences ou que des produits/quotients, on effectue les opérations dans l'ordre souhaité.

(2) Diviser par 10, 100, 1 000 … ou multiplier par 0,1 ; 0,01 ; 0,001… consiste à décaler la virgule à gauche.

(3) Un nombre décimal se décompose sous forme d'un produit d'un entier par une puissance de 10.

(4) Multiplier par 10, 100, 1 000 … ou diviser par 0,1 ; 0,01 ; 0,001… consiste à décaler la virgule à droite.

### À vous de jouer !

**1** Calculer mentalement :
**a)** $A = 0{,}8 \times 0{,}7 \times 10$ **b)** $B = 0{,}01 \times 80 \times (1\,200 - 300)$
**c)** $C = (31{,}7 - 13{,}2) \div 5$ **d)** $D = 7{,}5 \times (3{,}2 + 2{,}5)$

**2** Calculer mentalement :
**a)** $E = 12{,}8 \times 8 - 4 \times 20$ **b)** $F = 8{,}4 \times (56 - 18 \times 2)$
**c)** $G = 1{,}5 \times 1\,000 + 0{,}001 \times 3$ **d)** $H = 3 - 3 \times 100$

## Méthode 2 Calculer mentalement avec des fractions

↪ L'essentiel du collège (rabat)

**Énoncé**

**Calculer mentalement :** **a)** $A = \frac{3}{7} + \frac{4}{21} - \frac{5}{3}$ **b)** $B = \frac{7}{3} - \frac{10}{3} \times \frac{1}{5}$ **c)** $C = \left(\frac{2}{3} - 3\right) \div \frac{1}{9}$

**Solution**

**a)** $A = \frac{3}{7} + \frac{4}{21} - \frac{5}{3}$ (1)
Le dénominateur commun est 21. (2)
$A = \frac{3 \times 3}{7 \times 3} + \frac{4}{21} - \frac{5 \times 7}{3 \times 7} = \frac{9 + 4 - 35}{21} = -\frac{22}{21}$

**b)** $B = \frac{7}{3} - \frac{10}{3} \times \frac{1}{5}$ (1) $= \frac{7}{3} - \frac{\cancel{5} \times 2}{3} \times \frac{1}{\cancel{5} \times 1}$ (3)
B devient $B = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

**c)** $C = \left(\frac{2}{3} - 3\right) \div \frac{1}{9}$ (1) et $\frac{2}{3} - 3 = \frac{2}{3} - \frac{3 \times 3}{1 \times 3} = -\frac{7}{3}$. (2) Donc $C = -\frac{7}{3} \div \frac{1}{9} = -\frac{7}{3} \times 9 = -\frac{7}{\cancel{3}} \times \cancel{3} \times 3 = -21$.

**Conseils & Méthodes**

(1) On identifie les opérations à faire en premier (↪ **Méthode 1** p. 8).

(2) Pour additionner ou soustraire des fractions, on les réduit au même dénominateur.

(3) On simplifie les fractions avant de les multiplier.

### À vous de jouer !

**3** Calculer mentalement :
**a)** $A = \frac{3}{2} + \frac{11}{5} \times \frac{15}{2}$ **b)** $B = \left(\frac{3}{10} - \frac{2}{5}\right) \times \frac{1}{2}$
**c)** $C = \frac{7}{4} \div \frac{5}{2} - \frac{3}{10}$ **d)** $D = \frac{1}{-8} + \frac{5}{4} - \frac{7}{6}$

**4** Calculer mentalement :
**a)** $E = \frac{12}{5} \times \frac{7}{6} \times \frac{5}{14}$ **b)** $F = \frac{1 - 5^2}{(1 - 5)^2}$
**c)** $G = \frac{2}{3} - \frac{-7}{4} + \frac{1}{12}$ **d)** $H = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) \times \frac{16}{9}$

## Méthode 3 Effectuer des calculs simples avec des pourcentages et passer d'une écriture à une autre

↪ L'essentiel du collège (rabat)

### Énoncé

**1. Calculer mentalement : a) 25 % de 280. b) 75 % de 28. c) 30 % de 1 000 000.**
**2. Exprimer le pourcentage de sirop dans un verre qui contient 3 volumes de sirop pour 12 volumes d'eau.**
**3. Sur toutes les coupes du monde de football organisées jusqu'en 2022, l'équipe de France a participé à 16 des 22 phases finales et a participé à 4 finales. Quel est le pourcentage de participation de la France à une finale quand elle participe à la phase finale de la coupe du monde ?**

### Solution

**1. a)** 25 % de 280 c'est $\frac{25}{100} \times 280$ (1) $= \frac{1}{4} \times 280$ (2) $= 70$.

**b)** 75 % de 28 c'est $\frac{3}{4} \times 28 = 21$.

**c)** 30% de 1 000 000 c'est $3 \times \frac{10}{100} \times 1\,000\,000 = 300\,000$

**2.** Le total est 15 (3) et la sous-quantité étudiée est le sirop. (4)

$\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ soit 20 %. (2)

**3.** Le total ici est 16 (3), il s'agit du nombre de participations de la France à une phase finale. Sur ces 16 participations, elle a disputé 4 fois la finale. (4)

Le pourcentage est $\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 25$ %. (2)

### Conseils & Méthodes

(1) Un pourcentage est une fraction dont le dénominateur est 100.

(2) $50\ \% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$25\ \% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$20\ \% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

$\frac{1}{3} \approx 0{,}33 \approx 33\ \%$

(3) On repère la quantité totale.

(4) On repère la sous-quantité.

### À vous de jouer !

#### 1 Calculer avec des pourcentages

Calculer mentalement :

**a)** 12 % de 150 € **b)** 75 % de 480 €.

#### 2 Passer d'une écriture à une autre

3 élèves d'un collège sur 5 possèdent un vélo.
Quel est le pourcentage d'élèves qui possèdent un vélo ?

## Méthode 4 Appliquer un pourcentage d'évolution

### Énoncé

**1. Déterminer le prix d'un article coutant au départ 125 € et dont le prix a baissé de 10 %.**
**2. Adam place 12 500 € à la banque et son capital augmente de 2,5 %. Quel est son nouveau capital ?**

### Solution

**1.** Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 10 % est $1 - \frac{10}{100} = 0{,}90$. (1)

$125 \times 0{,}90 = 112{,}50$ (2) donc le nouveau prix est 112,50 €.

**2.** Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 2,5 % est $1 + \frac{2{,}5}{100} = 1{,}025$. (1)

$12\,500 \times 1{,}025 = 12\,812{,}50$ € (2) donc le nouveau capital est 12 812,50 €.

### Conseils & Méthodes

(1) On calcule le coefficient multiplicateur
$1 + \frac{t}{100}$ pour une hausse de $t$ %
ou $1 - \frac{t}{100}$ pour une baisse de $t$ %.

(2) On multiplie la valeur de départ par ce coefficient multiplicateur pour obtenir la valeur finale.

### À vous de jouer !

#### 7 Appliquer une hausse

Une subvention était de 3 000 € en 2022 et a augmenté de 15 % en 2023. De combien est-elle en 2023 ?

#### 8 Appliquer une baisse

Dans un lycée de 1 145 élèves, le nombre d'élèves diminuera d'environ 4 %. Combien d'élèves y aura-t-il alors ?

## Méthode 5 Appliquer une formule mathématique

↪ Formulaire de géométrie (rabat)

**Énoncé**

**Déterminer le volume $\mathcal{V}$ en cm³ d'un cône de rayon $r = 9{,}1$ cm et de hauteur $h = 6{,}21$ cm sachant que $\mathcal{V} = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.**

**Solution**

$\mathcal{V} = \dfrac{\pi r^2 h}{3} = \dfrac{\pi \times 9{,}1^2 \times 6{,}21}{3}$ car $r = 9{,}1$ et $h = 6{,}21$. (1) (2)

$\mathcal{V} = \dfrac{9{,}1^2 \times 6{,}21}{3} \times \pi$ (3) $= 171{,}4167 \times \pi \approx 538{,}5214$ cm³. (4)

**Conseils & Méthodes**

1. On associe les valeurs aux lettres de la formule mathématique.
2. On fait apparaître les signes multiplier qui sont sous-entendus.
3. On détermine la fraction à la calculatrice en laissant π à part.
4. On détermine une valeur approchée à la calculatrice.

### À vous de jouer !

#### 9 Appliquer une formule de volume

1. Calculer le volume d'une boule de rayon 3,21 cm sachant que $\mathcal{V} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.
2. Calculer le volume $\mathcal{V}$ d'un prisme de hauteur $h = 12{,}5$ cm et d'aire de base $\mathcal{A} = 5{,}4$ cm² sachant que $\mathcal{V} = \mathcal{A} \times h$.

#### 10 Appliquer une formule de physique

Déterminer la puissance dissipée P par un câble haute tension de distance $d = 500$ m traversé par une intensité $I = 50$ A ayant une résistance $R = 4{,}25 \times 10^{-3}\ \Omega$, sachant que $P = R \times I^2$.

## Méthode 6 Résoudre une équation du 1er degré

↪ L'essentiel du collège (rabat)

**Énoncé**

**Résoudre les équations suivantes :**

**a)** $x - 7 = -12$

**b)** $-7x = -12$

**c)** $3x - 2 = 7x + 15$

**Solution**

**a)** On reconnaît le type de l'équation : $ax + b = cx + d$. (1)

$x - 7 = -12 \Leftrightarrow x - 7 + 7 = -12 + 7$ (2) soit $x = -5$.

**b)** On reconnaît le type de l'équation : $ax + b = cx + d$. (1)

$-7x = -12 \Leftrightarrow \dfrac{-7x}{-7} = \dfrac{-12}{-7}$ (3) soit $x = \dfrac{12}{7}$.

**c)** On reconnaît le type de l'équation : $ax + b = cx + d$. (1)

$3x - 2 = 7x + 15 \Leftrightarrow 3x - 7x = 15 + 2$ (2)

$\Leftrightarrow -4x = 17$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{17}{4}$ (3)

**Conseils & Méthodes**

1. On reconnaît le type d'équation : $ax + b = cx + d$.
2. On transforme l'égalité de l'énoncé en une égalité équivalente en additionnant ou soustrayant le même nombre à gauche et droite du signe égal.
3. On transforme l'égalité de l'énoncé en une égalité équivalente en multipliant ou divisant par le même nombre à gauche et droite du signe égal.

### À vous de jouer !

#### 11 Résoudre une équation du 1er degré

Résoudre les équations suivantes :

**a)** $x - 5 = 12$ **b)** $7x = 15$

**c)** $3 - x = -9$ **d)** $4x - 6 = 0$

#### 12 Résoudre une équation du 1er degré

Résoudre les équations suivantes :

**a)** $5{,}5x + 15 = 9x + 6$ **b)** $8x = 12x + 4$

**c)** $3(2x - 1) = 5 - 2x$ **c)** $2x - 5 = -3x - 3$

Méthode 7

## Utiliser un ordre de grandeur pour contrôler un résultat

**Énoncé**

**Julien calcule 19 325 – 6 412 et trouve –1 248.**
**1. Est-ce possible ?**
**2. Donner un ordre de grandeur du résultat.**

**Conseils & Méthodes**

1 On vérifie si le résultat est aberrant ou incohérent.
2 On effectue un calcul mental en choisissant des valeurs proches des nombres en jeu.

**Solution**

1. Le résultat est positif car $19\,325 > 6\,412$. La réponse de Julien est aberrante. 1
2. On effectue $19\,325 - 6\,412$. $19\,325 - 6\,412 \approx 19\,400 - 6\,400 \approx 13\,000$ 2

**À vous de jouer !**

### 13 Déterminer un ordre de grandeur

Donner un ordre de grandeur de :
**a)** $10\,076 + 389 + 45$ **b)** $71{,}2 \times 2{,}09$ **c)** $-45\,214 + 28\,960$

### 14 Choisir un ordre de grandeur

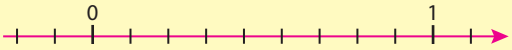
Choisir l'ordre de grandeur de $122\,826 - 6\,725$ :
**a)** 11 600 **b)** 1 200 000 **c)** 116 000

Méthode 8

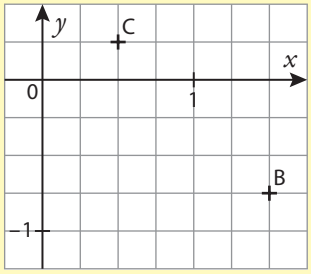
## Repérer sur une droite graduée ou un plan repéré

**Énoncé**

**1. Recopier la droite graduée ci-contre et placer le point A $\left(-\frac{4}{3}\right)$.**




**2. On considère le repère ci-contre.**
**a) lire les coordonnées du point B.**
**b) Recopier le repère et y placer le point D(–1,25 ; 1,5).**

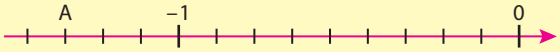



**Solution**

1. L'unité correspond à 9 subdivisions, c'est-à-dire qu'une subdivision correspond à $\frac{1}{9}$. 1

$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ correspond à 3 subdivisions.

L'abscisse est négative donc le point A est à gauche du point O. 2




2. Sur les deux axes, l'unité correspond à 4 subdivisions, c'est-à-dire qu'une subdivision correspond à $\frac{1}{4} = 0{,}25$. 1

**a)** L'abscisse de B 3 correspond à 6 subdivisions et $6 \times 0{,}25 = 1{,}5$.
Elle est positive. 2

L'ordonnée de B 3 correspond à 3 subdivisions et $3 \times 0{,}25 = 0{,}75$.
Elle est négative. 2

B(1,5 ; –0,75) ou B $\left(\frac{3}{2} ; -\frac{1}{4}\right)$.

**b)** –1,25 correspond à 5 subdivisions à gauche de l'origine.
1,5 correspond à 6 subdivisions vers le haut. 2 3

**Conseils & Méthodes**

1 On vérifie l'échelle des axes. La distance entre l'origine et l'unité correspond à 1.
2 Le signe de l'abscisse et de l'ordonnée dépend de sa situation par rapport à l'origine : positif à droite ou au-dessus de O, négatif sinon.
3 Dans un plan, la première coordonnée est l'abscisse et se lit sur l'axe horizontal. La 2e coordonnée est l'ordonnée et se lit sur l'axe vertical.

**À vous de jouer !**

### 15 Repérer un nombre sur une droite graduée

Recopier la droite graduée et y placer A $\left(-\frac{3}{2}\right)$ et B $\left(\frac{10}{4}\right)$.

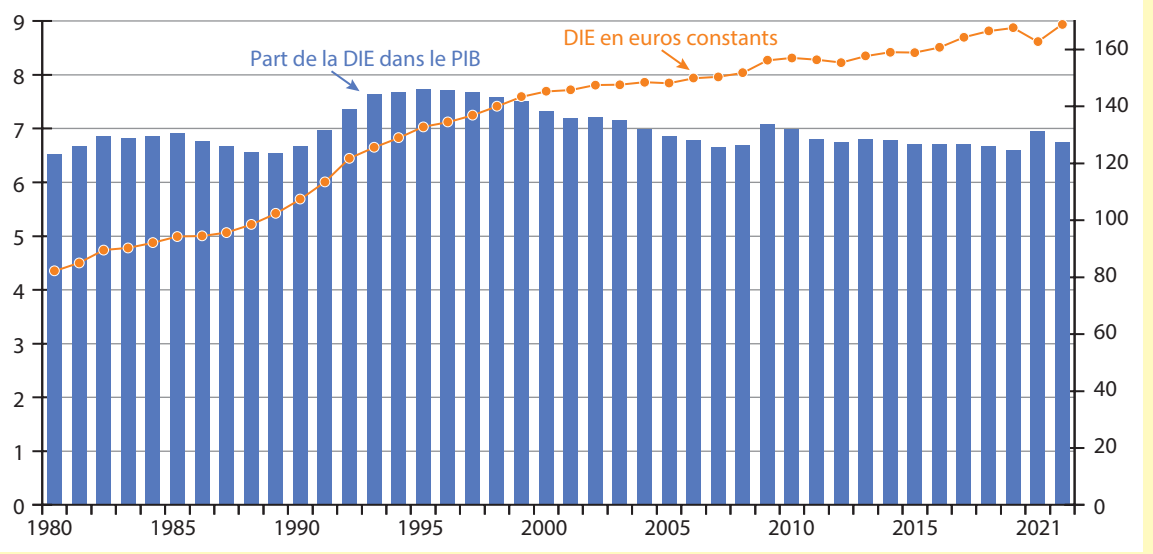
### 16 Repérer ou lire un point dans le plan

On considère le repère de la **méthode 8**.
1. Lire les coordonnées du point C.
2. Recopier le repère et placer le point E $\left(-\frac{7}{4} ; -2\right)$.

## Méthode 9 Préciser les éléments caractéristiques d'un graphique

### Énoncé

**En 2021, la dépense intérieure d'éducation (DIE) est estimée à 168,8 milliards d'euros.**
**Le graphique ci-dessous donne son évolution au fil du temps.**
**Préciser les grandeurs et unités en jeu sur chaque axe.**




(Source : DEPP, Compte de l'éducation)

### Solution

• Un des axes représente le temps d'après l'énoncé. C'est l'axe horizontal qui est gradué en années. 1

• On observe sur le graphique un diagramme en barres bleu donnant la part du DIE dans le PIB et une courbe orange donnant le DIE en euros. Il faut les associer à chacun des deux axes verticaux.

### Conseils & Méthodes

1 On repère dans l'énoncé ou sur le graphique les grandeurs en jeu et on les associe à l'axe correspondant du graphique.

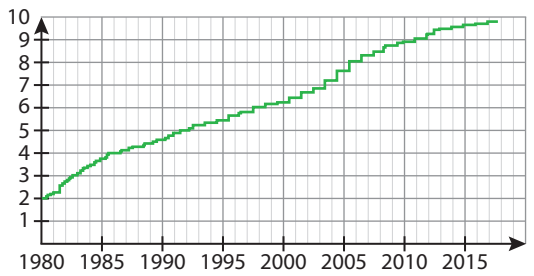
2 On associe les unités à chaque grandeur à partir des informations fournies.

On sait qu'en 2021, la DIE est de 168,8 milliards et la courbe orange atteint une valeur proche de 170 sur l'axe de droite donc l'axe de droite donne la DIE 1 en milliards d'euros 2 et l'axe de gauche donne sa part dans le PIB 1 en % puisqu'une part est une proportion. 2

## À vous de jouer !

### 17 Préciser les grandeurs et les unités

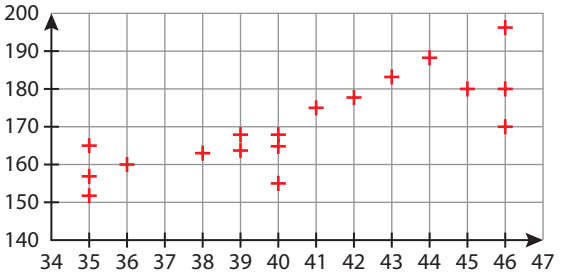
On donne le graphique ci-dessous représentant l'évolution du salaire minimum horaire en France.




Préciser les grandeurs et unités de chacun des axes.

### 18 Préciser les grandeurs et les unités

On a relevé la taille et la pointure de 18 élèves de lycée. Chaque point du graphique correspond à un élève.




Préciser les grandeurs et unités de chacun des axes.

Méthode 10

# Réaliser une estimation graphique

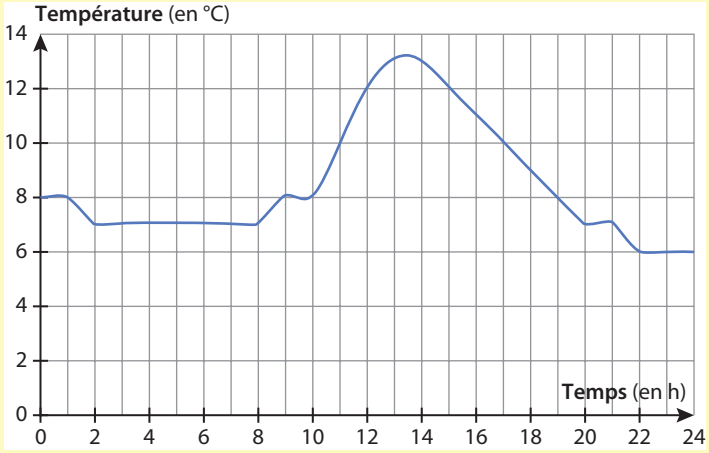
**Énoncé**

**On donne dans le graphique ci-contre l'évolution de la température en °C prévue à Montpellier le 15 janvier 2023 en fonction de l'heure de la journée d'après le site de Météo France consulté la veille.**

**1. Quelle est la température prévue à 3 h ?**

**2. Déterminer à quelles heures la température prévue doit être de 10 °C.**

**3. Déterminer à partir de quelle heure il est prévu que la température passe définitivement en dessous des 8 °C ce jour-là.**




**Solution**

1. On lit l'heure sur l'axe des abscisses, où une graduation représente 1 heure, et la température sur l'axe des ordonnées où une graduation représente 2 °C. (1)
On cherche la température à 3 h. Le temps se lisant en abscisse, on cherche le point d'abscisse 3 dont on lit l'ordonnée : cette ordonnée est 7. (2)
La température prévue à 3 h est 7 °C. (3)

2. On cherche les heures où la température est de 10 °C.
La température se lisant en ordonnée, on cherche les points d'ordonnée 10 dont on lit les abscisses : ces abscisses sont 11 et 17. (2)
La température prévue doit être de 10 °C à 11 h et 17 h. (3)

3. La température est définitivement en dessous de 8 °C à partir de l'abscisse 19 (4) donc il fera en dessous de 8 °C à partir de 19 h. (3)

**Conseils & Méthodes**

(1) On fait attention aux unités et grandeurs sur les axes.

(2) On repère si la grandeur connue correspond à l'abscisse ou l'ordonnée et on détermine l'autre coordonnée.

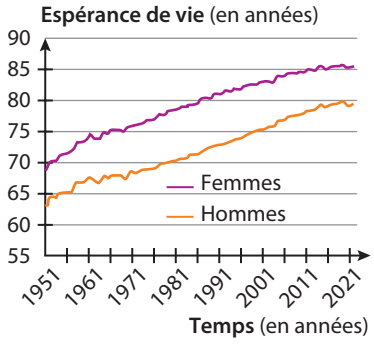
(3) On conclut dans les termes de l'énoncé.

(4) On demande d'estimer un seuil quand il y a une formulation du type « à partir ».
On cherche alors à partir de quelle abscisse la condition est vérifiée.

## À vous de jouer !

### 19 Estimer un seuil et une valeur atteinte

Le graphique ci-dessous donne l'évolution de l'espérance de vie des hommes et des femmes en France.

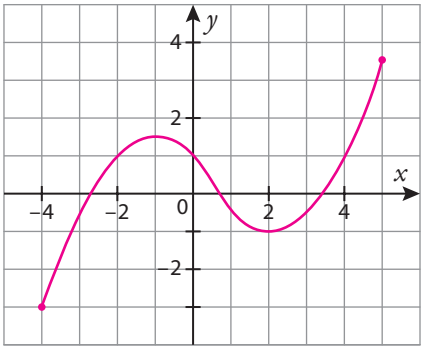



(*Source* : Centre d'observation de la société, INSEE)

1. Déterminer approximativement depuis quelle année l'espérance de vie des femmes a dépassé 80 ans.
2. Déterminer approximativement l'espérance de vie des hommes en 1986.

### 20 Estimer des antécédents et une valeur

Soit la fonction $f$ dont la courbe est donnée ci-dessous.

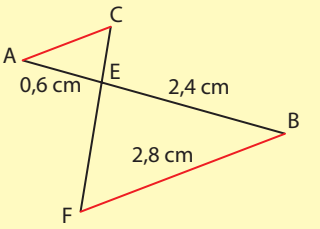



1. Déterminer les antécédents de 0 par $f$.
2. Quelle est la plus grande valeur atteinte par $f(x)$ sur l'intervalle $[-2 ; 3]$ ?
3. Quelle est la plus petite valeur atteinte par $f(x)$ sur l'intervalle $[-2 ; 3]$ ?

## Méthode 11 Utiliser les théorèmes de Pythagore et Thalès

### Énoncé

**1. Le triangle RST est rectangle en T avec RT = 3 et ST = 4. Déterminer la longueur RS.**
**2. Dans la figure ci-contre, les droites (AC) et (BF) sont parallèles. Déterminer AC.**




### Solution

**1.** Le triangle RST est rectangle en T.

On applique donc le théorème de Pythagore pour déterminer une longueur :

$RS^2 = RT^2 + ST^2$ (1) $= 3^2 + 4^2 = 25$ donc $RS = \sqrt{25} = 5$. (2)

**2.** On reconnaît une configuration de Thalès avec des droites parallèles dans laquelle $\frac{EF}{EC} = \frac{EB}{EA} = \frac{FB}{AC}$. (3)

On a donc $AC = \frac{EA \times FB}{EB} = \frac{0,6 \times 2,8}{2,4} = 0,7$ cm. (4)

### Conseils & Méthodes

1. On identifie l'hypoténuse pour la formule.
2. On calcule RS en utilisant la racine carrée.
3. On identifie le sommet commun aux deux triangles. On isole l'égalité utile aux calculs.
4. On calcule AC avec un produit en croix.

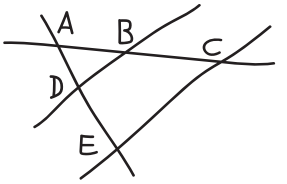
### À vous de jouer !

#### 21 Utiliser le théorème de Pythagore

Un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle mesure 12 et son hypoténuse 15.
Combien mesure l'autre côté de l'angle droit ?

#### 22 Utiliser le théorème de Thalès

Déterminer la longueur AD avec (DB)//(EC), DB = 3, EC = 8 et AE = 15.




## Méthode 12 Utiliser les réciproques des théorèmes de Pythagore et Thalès

### Énoncé

**1. Les longueurs d'un triangle RST vérifient RS = 13, RT = 12 et ST = 5. RST est-il rectangle ?**
**2. Avec la configuration du graphique de l'exercice 22, on donne AB = 3, BC = 9, AD = 1 et AE = 4. Les droites (DB) et (EC) sont-elles parallèles ?**

### Solution

**1.** On calcule $RS^2 = 13^2 = 169$ d'une part (1)
et $RT^2 + ST^2 = 12^2 + 5^2 = 169$ d'autre part. (2)

$RS^2 = RT^2 + ST^2$ donc RST est rectangle d'après la réciproque de Pythagore.

**2.** A, B et C et A, D et E sont alignés dans le même ordre. (3)

$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{3+9} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ et $\frac{AD}{AE} = \frac{1}{4}$ donc $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$. (4)

(DB) et (EC) sont parallèles d'après la réciproque de Thalès.

### Conseils & Méthodes

1. On identifie le plus grand côté qui est l'hypoténuse éventuelle, on calcule son carré.
2. On calcule la somme des carrés des deux plus petits côtés. Si les résultats des deux calculs sont égaux le triangle est rectangle.
3. On identifie une configuration de Thalès éventuelle.
4. Dans cette configuration, on calcule les rapports mettant en jeu les longueurs connues et on les compare : s'ils sont égaux les droites sont parallèles.

### À vous de jouer !

#### 23 Utiliser la réciproque de Pythagore

Les longueurs d'un triangle EFG vérifient EF = 2, FG = 4 et EG = $\sqrt{20}$. EFG est-il rectangle ?

#### 24 Utiliser la réciproque de Thalès

Reprendre la question 2 de la **méthode 12** avec AB = 1, AC = 7, AD = 2 et DE = 12.

Méthode
## 13 Calculer un périmètre, une aire ou un volume

↪ Formulaire de géométrie (rabat)

**Énoncé**

**1. Calculer le volume d'un parallélépipède rectangle de largeur $\ell = 3{,}1$ m, de longueur L = 420 cm et de hauteur $h = 5$ m.**

**2. Calculer l'aire d'un disque de rayon $r = 5$ cm.**

**Solution**

1. $\ell = 3{,}1$ m, L = 4,2 m et $h = 5$ m (1)
donc le volume de ce parallélépipède rectangle est $\mathcal{V} = \ell \times L \times h$ (2)
$\mathcal{V} = 3{,}1 \times 4{,}2 \times 5 = 65{,}1\ m^3$. (3)

2. L'aire de ce disque est $\mathcal{A} = \pi \times r^2$. (2)
$\mathcal{A} = \pi \times 5^2 = 25\pi$ (4) $\approx 78{,}5\ cm^2$. (5) (6)

**Conseils & Méthodes**

(1) On exprime toutes les longueurs dans la même unité.

(2) On doit connaître toutes les formules usuelles de périmètres, aires et volumes.

(3) Si l'unité de longueur est le m, l'unité de volume associée est le $m^3$.

(4) Pour les formules mettant en jeu π, on mène les autres calculs à part pour avoir une valeur exacte en premier lieu.

(5) On peut ensuite donner une valeur approchée.

(6) Si l'unité de longueur est le cm, l'unité d'aire associée est le $cm^2$.

**À vous de jouer !**

### 25 Calculer un périmètre

1. Calculer le périmètre d'un cercle de diamètre 4 cm.
2. Calculer le périmètre d'un rectangle avec de longueur 3 cm et de largeur 1 cm.

### 26 Calculer une aire

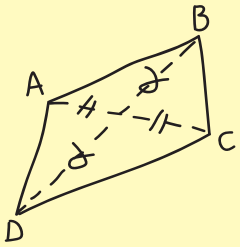
Calculer l'aire d'un trapèze dont la petite base mesure 1 mètre, la grande base 2 mètres et la hauteur 15 centimètres.

Méthode
## 14 Nommer des quadrilatères à partir d'un graphique

**Énoncé**

**On donne la figure dessinée à main levée et codée ci-contre.**

**Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?**




**Solution**

Le codage de la figure (1) nous indique que les diagonales de ABCD se coupent en leur milieu.
C'est donc un parallélogramme. (2)

**Conseils & Méthodes**

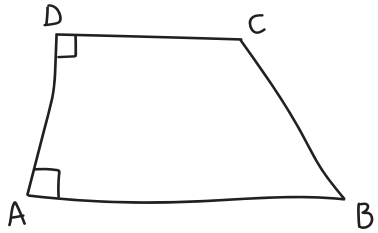
(1) On observe les codages de la figure pour en déduire des caractéristiques du quadrilatère.

(2) On utilise des propriétés permettant de déduire la nature du quadrilatère à partir de ces caractéristiques.

**À vous de jouer !**

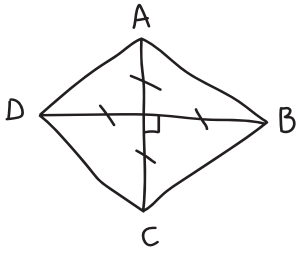
### 26 Nommer un quadrilatère

On donne la figure dessinée à main levée et codée ci-dessous. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?




### 27 Nommer un quadrilatère

On donne la figure dessinée à main levée et codée ci-dessous. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?



# 1

# Programmation en langage Python

## Les maths au quotidien

Les programmes informatiques sont omniprésents dans nos vies : ils sont dans nos ordinateurs, nos téléphones, permettent de faire fonctionner Internet et gèrent les infrastructures complexes que nous utilisons tous les jours comme les transports en commun, par exemple. Il est donc important de comprendre le fonctionnement de ces **programmes** en **langage Python** et comment les écrire !

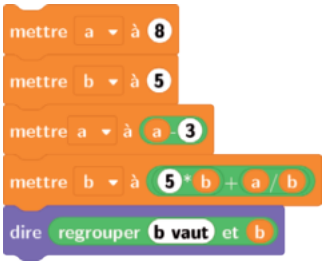
# Pour prendre un bon départ

EXERCICES Sésamath
Réviser ses acquis
www.lienmini.fr/8270-s2

## 1 Affectation et affichage

Vu au collège

On considère le programme **Scratch** suivant.




Que dit le lutin si on lance ce programme ?

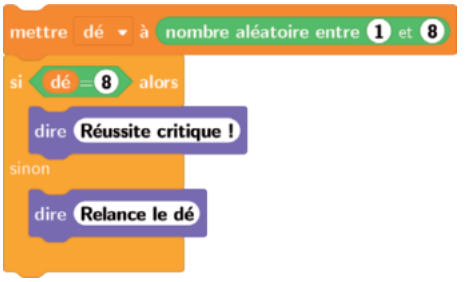
## 2 Instructions conditionnelles

Vu au collège

On considère le programme **Scratch** ci-contre.

**1.** Que dit le lutin si le nombre aléatoire dé obtenu à la première ligne est 2 ?

**2.** Que dit le lutin si le nombre aléatoire dé obtenu à la première ligne est 8 ?




## 3 Répétition d'instructions

Vu au collège

On considère le programme **Scratch** suivant.

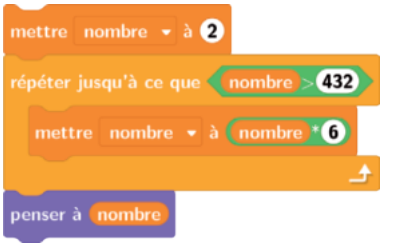
Décrire le comportement du lutin quand on lance ce programme.

## 4 Boucle conditionnelle

Vu au collège

On considère le programme **Scratch** ci-contre.

Quel est le nombre auquel « pense » le lutin quand on lance ce programme ?



# Activités

15 min

## 1 Types de valeurs

**1. a)** Dans la console **Python** saisir `type(12)` et valider avec la touche Entrée.

**b)** Le **type** associé à `12` est le mot écrit après `class` dans l'affichage obtenu. Quel est le type associé à `12` ?

**2. a)** Saisir et valider chacune des commandes suivantes dans la console.

`type(7.3)` ; `type("bonjour")` ; `type('Au revoir')` ; `type(True)` et `type(False)`.

**b)** En déduire les types des valeurs `7.3` ; `"bonjour"` ; etc.

**3.** Faire une recherche Internet sur les quatre types obtenus et donner une définition de chacun.

**4.** Sans utiliser la console, déterminer les types de `7/3` ; `'Maths'` ; `987` et `"8"` en langage **Python**. Vérifier avec la console.

**5.** Pour aller plus loin Expliquer l'affichage obtenu quand on saisit `type(7<9)` dans la console.

↪ Cours 1 p. 22

20 min

## 2 Affectation et affichage

### A ▸ Affectation et affichage pour les types numériques

**1.** Que veut dire le mot *print* en français ?

**2. a)** Écrire puis exécuter le programme ci-contre.

```
a=7
b=2*a-3
print(b)
```

**b)** Expliquer l'affichage obtenu.

**3. a)** Sans les écrire ni les exécuter, dire ce que vont afficher les trois programmes suivants.

① 
```
x=7.3
y=8.4
x=2*x
y=3*x-2*y
print(y)
```

② 
```
x=3
y=5
y=12*x
x=x-2*y
print(y)
```

③ 
```
x=1
y=2
x=x+1
y=x*y
print("y")
```

**b)** Écrire et exécuter ces programmes afin de vérifier vos réponses.

**4. a)** Écrire puis exécuter le programme suivant.

```
z=27.8
print("z=",z,".")
```

**b)** Quelle commande **Scratch** joue le même rôle que les virgules dans un affichage **Python** ?

**c)** Écrire et compléter le programme ci-contre afin qu'il affiche : `x vaut 0.6 sous forme décimale`.

```
x=3/5
print(...)
```

**Attention !** Le programme doit s'adapter automatiquement si l'on change la valeur de `x` dans la première ligne.

### B ▸ Affectation et affichage pour les chaînes de caractères

**1. a)** Écrire puis exécuter le programme suivant.

```
a="50"
print(4*a)
```

**b)** Expliquer pourquoi l'affichage obtenu n'est pas `200`.

**2.** Pour aller plus loin Que fait **Python** quand on lui demande d'additionner deux variables de type `str` ?

↪ Cours 1 p. 22

25 min

# 3 Instructions conditionnelles

## A ▸ Travail préliminaire : interaction avec l'utilisateur

**1. a)** Exécuter le programme puis saisir un nombre comme indiqué par la console et valider avec Entrée.

```
a=input("Saisir un nombre : ")
print(3*a)
```

**Coup de pouce** Bien regarder ce qu'il se passe dans la console avant de lancer le programme une deuxième fois.

**b)** Décrire le fonctionnement de la commande `input`. On précisera en particulier le type de la valeur affichée.

**2. a)** Écrire et exécuter les deux programmes ci-contre en prenant à chaque fois le nombre 7 quand la console invite à saisir une valeur.

**b)** Quel est le type de la valeur affichée par chacun de ces programmes ? Expliquer pourquoi.

① 
```
x=float(input("Valeur ? "))
print(4*x)
```

② 
```
x=int(input("Valeur ? "))
print(4*x)
```

## B ▸ Instruction conditionnelle

Pour savoir si un client peut louer un appartement, une agence immobilière a mis en place un outil en ligne dont le code écrit en langage **Python** est donné ci-contre.

```
1 loyer=float(input("Renseigner le loyer mensuel : "))
2 revenu=float(input("Renseigner le revenu mensuel : "))
3 if revenu >= 3*loyer:
4       print("Vous pouvez déposer un dossier. ")
5       print("Merci d'avoir utilisé notre outil.")
6 print("Bonne journée !")
```

**1.** Traduire la ligne 3 du programme en français et en déduire quel critère cette agence a retenu pour accepter le dépôt d'un dossier.

**2. a)** Écrire ou télécharger ce programme.

**CONSOLE PYTHON**
Test 1 location appartement
www.lienmini.fr/8270-py1

**Coup de pouce** Pour obtenir le décalage des 4e et 5e lignes, on dit qu'elles sont **indentées**, on utilisera la touche TAB ou ⇆ du clavier.

**b)** Tester ce programme avec un loyer de 700 € et un salaire de 2 000 € puis avec un loyer de 540 € et un salaire de 1 900 €.

**c)** Modifier le programme sans indenter la ligne 5. Expliquer les conséquences de l'indentation ou non des lignes dans un programme en langage **Python** en le testant avec différentes valeurs.

**3.** L'agence immobilière modifie le code de son programme afin de le rendre plus informatif.
La nouvelle version est donnée ci-contre.

**a)** Écrire ou télécharger ce programme.

**b)** Tester ce programme et expliquer le fonctionnement du bloc `else`.

```
1 loyer=float(input("Renseigner le loyer mensuel : "))
2 revenu=float(input("Renseigner le revenu mensuel : "))
3 if revenu >= 3*loyer:
4     print("Vous pouvez déposer un dossier ")
5 else :
6     print("Dossier refusé, salaire minimum : ",3*loyer)
7 print("Bonne journée")
```

**CONSOLE PYTHON**
Test 2 location appartement
www.lienmini.fr/8270-py2

**c)** Pour aller plus loin Chercher le fonctionnement de la command `elif` et l'utiliser pour créer un troisième cas : quand le salaire vaut entre 2,5 et 3 fois le loyer, on peut déposer un dossier mais on est informé qu'il y a peu de chance que la demande aboutisse.

↪ Cours 2 p. 24

25 min

# 4 Fonctions en langage Python

## A ▸ Découverte des fonctions

**1.** Convertir 7 heures, 12 minutes et 54 secondes en secondes.

**2.** Écrire et exécuter le programme ci-contre.
Que se passe-t-il à l'écran ?

```
1  def conversion(heures,minutes,secondes) :
2      s=3600*heures+60*minutes+secondes
3      return s
```

**3.** Saisir `conversion(7,12,54)` dans la console et valider.
À quoi correspond concrètement la valeur affichée ?

## B ▸ Écriture d' une fonction

**Coup de pouce**
- Dans la partie précédente, on a défini une **fonction** nommée `conversion` dont les **paramètres** sont `heures`, `minutes` et `secondes` (entre parenthèses et séparés par des virgules) et qui **retourne** (*return* en anglais) la valeur de la variable `s`.
- On aurait pu écrire directement `return 3600*heures+60*minutes+secondes` à la place des lignes `2` et `3`.

**1.** Définir de la même manière une fonction nommée `vitesse` dont les paramètres sont `distance` et `temps` et qui retourne la vitesse `v` associée aux valeurs de ces deux paramètres.
Par exemple, si `distance` vaut 140 (en km) et `temps` vaut 2 (en heures) alors la fonction `vitesse` retournera la vitesse `v` à laquelle on parcourt 140 km en 2 heures (en km/h).

**2.** « Exécuter » la fonction `vitesse` puis la tester avec quelques valeurs depuis la console.

## C ▸ Fonction sans paramètre (ou procédure)

**1.** Saisir la fonction `choix` suivante dans l'éditeur à la suite de la fonction `vitesse` après avoir sauté une ligne.

```
def choix() :
    a=int(input("Pour km/h, taper 1 et pour m/s, taper 2 : "))
    return a
```

**2.** « Exécuter » cette fonction et la tester depuis la console en y tapant `choix()` puis en validant.

**Coup de pouce** Quand une fonction n'a pas de paramètre, on peut tout de même l'appeler en écrivant son nom suivi de parenthèses vides.

## D ▸ Fonction appelée dans un programme

**1.** À la suite des fonctions `vitesse` et `choix`, après avoir sauté une ligne, saisir le programme suivant en complétant la dernière ligne. On admettra que l'utilisateur saisira `d` et `t` au format km et heures ou au format m et secondes.

```
d=float(input("Saisissez la distance : "))
t=float(input("Saisissez le temps : "))
c=choix()
if c==1 :
    print("Vitesse=",vitesse(d,t),"km/h. ")
if c==2 :
    . . .
```

**2.** Tester le programme.

**3.** **Pour aller plus loin** À l'aide des fonctions `conversion` et `vitesse`, écrire une fonction `vitesse2` telle que `vitesse2(d,h,m,s)` renvoie la vitesse en m/s mise pour parcourir `d` km en `h` heures, `m` minutes et `s` secondes.

↪ Cours 3 p. 26

15 min

## 5 Boucle `for`

**1. a)** Ouvrir **Scratch** et écrire le programme ci-contre.

**b)** Lancer ce programme afin de le tester.

**c)** Quel problème rencontre-t-on à l'affichage ?

**2. a)** Modifier le programme précédent afin d'obtenir le programme ci-contre et le tester.

**b)** Qu'est-ce qui a permis de différencier chacun des six affichages ?

**3.** Lequel des deux programmes en langage **Python** suivants a le même fonctionnement que le programme **Scratch** de la question **2** ?

① 
```
for i in range(1,6):
    print("J'affiche le message ",i)
```

② 
```
for i in range(1,7):
    print("J'affiche le message ",i)
```

**4.** Adapter le programme en langage **Python** choisi précédemment pour qu'il affiche les messages de `3` à `10`.

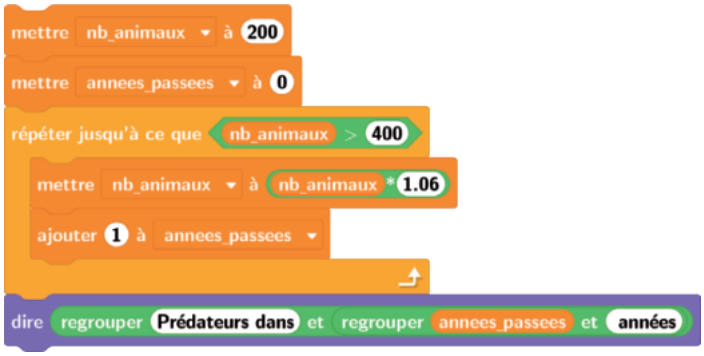
**5.** **Pour aller plus loin** En utilisant l'instruction `for i in range(7)`, afficher les messages de `9` à `15`.

↪ Cours 4 p. 28

15 min

## 6 Boucle `while`

**1.** Une réserve naturelle accueille 200 animaux. Lorsque la population aura plus que doublé, des prédateurs seront introduits dans la réserve. Le programme **Scratch** ci-contre affiche le nombre d'années à partir duquel on pourra introduire des prédateurs dans la réserve.
Décrire le modèle prévu pour l'évolution de cette population d'après ce programme.




**2.** Saisir le programme en langage **Python** suivant en complétant les pointillés à l'aide du coup de pouce afin qu'il fonctionne comme le programme **Scratch** précédent.

```
nb_animaux=200
annees_passees=0
while nb_animaux......:
    nb_animaux=...
    annees_passees=...
print("Prédateurs dans ",annees_passees,"annees")
```

**Coup de pouce**

- Dans le langage **Python**, il n'y a pas d'instruction « jusqu'à ce que » mais il y a l'instruction `while` qui veut dire « tant que ».
- On pourra se demander comment tourner la phrase « on continue jusqu'à ce que `nb_animaux>400` » sous la forme « on continue tant que `nb_animaux` … ».

↪ Cours 5 p. 28

# 1 Types de variables et affectation

**Définition** **Entier, flottant, chaîne de caractères et booléen**

**Dans un programme, les variables considérées ont des types qui définissent la nature des valeurs qu'elles peuvent prendre. Les principaux types considérés en classe de Seconde dans le langage Python sont :**

- `int` (*integer*) **pour des nombres entiers,**
- `float` (*floating-point*) **pour les flottants c'est-à-dire des nombres « à virgule »,**
- `str` (*string*) **pour les chaînes de caractères c'est-à-dire des mots ou groupes de mots,**
- `bool` (*boolean*) **pour les booléens c'est-à-dire** *True* **(Vrai) ou** *False* **(Faux).**

**Exemple** Un site sportif doit écrire une base de données sur les joueuses de curling des clubs français. Pour une joueuse donnée, il y aura 4 variables : `nom` pour son nom, `age` pour son âge, `points` pour sa moyenne de points marqués et `nationale` qui est vraie ou fausse selon que la joueuse est ou non en équipe de France.

- Les valeurs prises par `nom` sont des mots : `nom` est de type `str`.
- Les valeurs prises par `age` sont des nombres entiers : `age` est de type `int`.
- Les valeurs prises par `points` sont des nombres réels *a priori* non entiers : `points` est de type `float`.
- Les valeurs prises par `nationale` sont Vrai ou Faux : `nationale` est de type `bool`.

**Définition** **Affectation d'une valeur à une variable**

**Lorsque l'on affecte une valeur à une variable avec le symbole = cela signifie que, jusqu'à une prochaine affectation, la variable peut être remplacée par cette valeur dans le programme.**

**Exemple** `x=5` signifie que l'on affecte la valeur 5 à la variable `x`.

**Propriété** **Affectation d'une valeur à une variable par l'utilisateur**

**L'instruction `input` permet à l'utilisateur du programme d'affecter lui-même une valeur à une variable.**

**Exemple** `a=int(input("Nombre?"))` permet à l'utilisateur du programme d'affecter le nombre entier qu'il souhaite à la variable `a`. Le `int` devant `input` signifie que le nombre reçu est entier mais on aurait pu mettre `float` pour un flottant, par exemple.

**Propriété** **Opérations sur les types numériques**

- **Dans les affectations, on peut utiliser les symboles d'opération usuels `+`, `-`, `*` et `/`.**
- **Pour écrire une puissance, on utilise `**` (par exemple, `2**3` veut dire $2^3$).**
- **Quand un flottant est utilisé dans un calcul, le résultat est également un flottant.**

**Propriété** **Opérations sur les chaînes de caractères**

**Soit `a` et `b` deux variables de type `str` et `n` un entier.**

- **`a+b` est la chaîne de caractères formée par la valeur de `a` suivie de la valeur de `b`.**
- **`n*a` est la chaîne de caractères formée par la valeur de `a` répétée `n` fois.**

**Exemple** `"bon"+"jour"` donne `"bonjour"` et `3*"bip"` donne `"bipbipbip"`.

**Propriété** **Affectation et type**

**Lors d'une affectation, la variable prend le type associé à sa valeur.**

↪ Méthode 2 p. 23

# Exercices résolus

## Méthode 1 Déterminer les valeurs prises par une variable

### Énoncé

**Quelles sont les valeurs prises par les variables `a` et `b` à la fin de ce programme ?**

```
1 a=3
2 b=8
3 a=a+4
4 b=2*a+5*b
```

### Solution

- **Ligne 1 :** la valeur 3 est affectée à `a`. (1)
- **Ligne 2 :** la valeur 8 est affectée à `b`. (1)
- **Ligne 3 :** la valeur `a+4=3+4=7` est affectée à `a`. (2)
- **Ligne 4 :** la valeur `2*a+5*b=2×7+5×8=54`. (2)

À la fin du programme `a` vaut 7 et `b` vaut 54.

| | a | b |
|---|---|---|
| Ligne 1 | 3 | |
| Ligne 2 | 3 | 8 |
| Ligne 3 | 7 | 8 |
| Ligne 4 | 7 | 54 |

### Conseils & Méthodes

(1) On considère les premières affectations dans l'ordre du programme.

(2) Dans tous les calculs, on utilise toujours la valeur actuelle de la variable.

### À vous de jouer !

**1** Quelles sont les valeurs prises par les variables `x` et `y` à la fin de ce programme ?

```
x=5
y=2
y=x*y
y=y-2*x
```

**2** Quelles sont les valeurs prises par les variables `a` et `b` à la fin de ce programme ?

```
a=10
b=3
a=a**b
b=a/(2*b-1)
```

↪ Exercices 35 à 39 p. 33

## Méthode 2 Déterminer le type d'une variable

### Énoncé

**Quel est le type de chaque variable à la fin de chacun des programmes suivants ?**

**a)**
```
a=7
b=a/3
```

**b)**
```
var="2"
t="methode"+var
```

**c)**
```
x=int(input("Nombre ?"))
y=x+4.3
```

### Solution

**a)** `a` est de type `int`.
`b` est de type `float`. (1)

**b)** `var` est de type `str`. (2)
`t` est de type `str`. (3)

**c)** `x` est de type `int`. (4)
`y` est de type `float`. (5)

### Conseils & Méthodes

(1) `7/3` n'est pas entier donc il est de type `float`.

(2) `2` est entre guillemets donc considéré comme du texte.

(3) On « additionne » deux chaînes de caractères : cela donne une chaîne de caractères (dans ce cas `"methode2"`).

(4) `int(input(...))` indique que l'utilisateur saisit un entier (`int`).

(5) On ajoute 4,3 à un entier donc le résultat sera « à virgule » : `x+4`. 3 est un flottant.

### À vous de jouer !

**3** Quel est le type de chaque variable à la fin de ce programme ?

```
x=5
y=2
x=x/y
```

**4** Quel est le type de chaque variable à la fin de ce programme ?

```
a="mot"
b=5
a=b*a
```

↪ Exercices 40 à 43 p. 33

# 2 Instructions conditionnelles

## Propriété Condition et résultat d'un test

**Le résultat d'un test d'égalité, de non égalité ou d'inégalité est appelé condition.**
**Cette condition est soit vraie (`True`) soit fausse (`False`) c'est-à-dire que c'est un booléen.**
**On peut complexifier les conditions avec `or` (ou) et `and` (et).**

### Exemples

- `x<6` vaut `True` si `x=4` car $4 < 6$ et `x<6` vaut `False` si `x=15` car $15 \geqslant 6$.
- La condition `x>5 or x<=2` est vraie si `x` est supérieur à `5` **ou** inférieur ou égal à `2`.
- La condition `x>=-1 and x<8` est vraie si `x` est supérieur ou égal à `-1` **et** inférieur à `8`.

**Remarque** Le tableau ci-contre donne la correspondance entre les symboles mathématiques et la syntaxe **Python**.

| Mathématiques | = | ≠ | > | < | ⩾ | ⩽ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Langage Python | == | != | > | < | >= | <= |

## Définition Instructions conditionnelles `if` et `else`

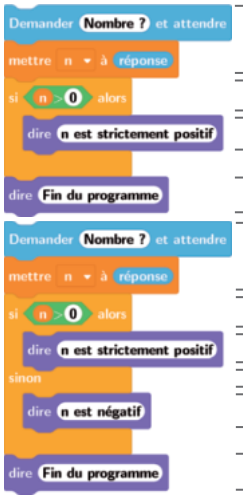
**Dans le langage Python, il est possible d'exécuter une ou plusieurs instructions uniquement si (*if*) une certaine condition est vérifiée. On crée alors un bloc d'instructions indenté (c'est-à-dire décalé vers la droite), précédé d'une ligne au format `if condition` :**

**Pour traiter le cas où cette condition n'est pas vérifiée, on peut :**
- **soit exécuter un autre bloc d'instructions dans un bloc indenté, précédé d'une ligne `else` :**
- **soit ne rien faire.**

**Dans ces deux cas, on exécute ensuite la suite du programme.**

### Exemple

Les programmes ci-dessous écrits en **Scratch** et en **Python** fonctionnent de la même manière.




```
1 n=float(input("Nombre ?"))
2 if n>0 :
3     print("n est strictement positif")
4 print("Fin du programme")
```




```
1 n=float(input("Nombre ?"))
2 if n>0 :
3     print("n est strictement positif")
4 else :
5     print("n est négatif")
6 print("Fin du programme")
```

## Attention !

La commande `print` permet d'afficher du texte (entre guillemets), la valeur d'une variable (sans guillemet) ou un mélange des deux (en séparant texte et variable par des virgules).

↪ Activité 2 p. 18

# Exercices résolus

## Méthode 3 Comprendre une instruction conditionnelle

### Énoncé

**On considère le programme ci-contre. Qu'affiche ce programme si l'utilisateur saisit pour la variable `x` : a) la valeur `5` ? b) la valeur `748` ?**

```
x=int(input("Saisir un nombre entier : "))
if x <= 10 :
    print("Quel manque d'originalité.")
else :
    print("Bravo !")
print("Merci d'avoir participé.")
```

### Solution

**a)** Comme $5 \leqslant 10$, la condition `x<=10` est vérifiée (1) donc le programme affiche `Quel manque d'originalité.` (2) puis le programme affiche `Merci d'avoir participé.` (3).

**b)** Comme $748 > 10$, la condition `x<=10` n'est pas vérifiée (1) donc le programme affiche `Bravo !` (4) puis le programme affiche `Merci d'avoir participé.` (3).

### Conseils & Méthodes

1. On vérifie si la condition est vérifiée.
2. Si la condition est vérifiée, on exécute le bloc d'instructions indenté après la ligne `if…:`.
3. Les instructions conditionnelles `if/else` passées, on exécute la suite du programme.
4. Si la condition n'est pas vérifiée, on exécute le bloc d'instructions après la ligne `else:`.

### À vous de jouer !

**5** Que vaut `x` :

a) si `y=2` ? b) si `y=5` ?

```
if y!=5 :
    x=4*y
else :
    x=3*y
```

**6** Que vaut `z` :

a) si `x=5` ? b) si `x=8` ?

```
if x**2 < 30 :
    z=12
else :
    z=5*x
```

↪ Exercices 44 à 49 p. 33

## Méthode 4 Écrire une instruction conditionnelle

### Énoncé

**Dans un cinéma, la place adulte coûte 11 euros et la place enfant de moins de 18 ans coûte 7 euros. Écrire un programme dont la première ligne est `age=int(input("age ?"))` et qui affiche le tarif que doit payer un utilisateur selon son âge.**

### Solution

Le tarif dépend de l'âge puisqu'il est différent selon que `age`$\geqslant$`18` ou `age<18`. On peut choisir comme condition à tester `age>=18` (1) (ou `age<18`).

- Si (`if`) `age>=18`, on affiche `11 euros` (2).
- Sinon (`else`), si `age<18`, on affiche `7 euros` (3).

Il ne reste plus qu'à écrire le programme.

```
age=int(input("age ?"))
if age >=18 :
    print("11 euros")
else :
    print("7 euros")
```

### Conseils & Méthodes

1. On identifie la condition à tester.
2. On identifie les instructions à exécuter si la condition est vérifiée.
3. On identifie les instructions à exécuter sinon.

### À vous de jouer !

**7** Pour pouvoir faire une attraction dans un parc, il faut mesurer au moins 1,20 m.
Écrire un programme dont la première ligne est `x=float(input("taille en m:"))` qui affiche si l'on peut ou non accéder à l'attraction.

**8** Soit une fonction définie par $f(x) = -x^2$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = 3x - 1$ si $x < 0$.
Écrire un programme dont la première ligne est `x=float(input("x?"))` qui affiche $f(x)$.

↪ Exercices 50 à 53 p. 34

# 3 Fonctions

**Définition** Fonctions, paramètres et valeur de retour

**Pour diverses raisons (de lisibilité ou pour éviter des répétitions d'instructions par exemple), il peut être utile de définir une fonction c'est-à-dire un bloc d'instructions qui ne sera exécuté que s'il est appelé (éventuellement plusieurs fois).**

**Une fonction possède généralement des paramètres (mais pas toujours) et retourne (ou renvoie) une valeur de retour (mais pas systématiquement) généralement stockée dans une variable.**

**Dans le langage Python pour définir une fonction :**
- **on écrit une première ligne commençant par `def` suivi du nom de la fonction puis des paramètres, entre parenthèses séparés par des virgules, puis un double-point,**
- **on écrit les instructions à exécuter dans un bloc indenté,**
- **on écrit une dernière ligne `return a` où `a` est la variable ou la valeur à retourner (s'il y en a une).**

**Exemple**

On considère la fonction ci-contre.
- Elle s'appelle `vitesse`.
- Ses paramètres sont `distance` et `temps`.
- Elle retourne la valeur de la variable `v` égale à `distance/temps`.

Concrètement, c'est une fonction qui retourne la vitesse à partir d'une distance et du temps (par exemple en km/h si la distance est exprimée en km et le temps en heures).

```
def vitesse(distance,temps) :
    v=distance/temps
    return v
```

**Attention !**

`distance` et `temps` sont deux variables qui sont définies et que l'on peut utiliser dans le bloc de la fonction.

**Définition** Appel de fonction

**On peut appeler une fonction en remplaçant ses paramètres par les valeurs souhaitées et cela :**
- **directement depuis la console Python.**
- **à l'intérieur d'un programme.**

**La valeur retournée prendra alors la place de l'appel de la fonction dans le programme.**

**Exemples**

- Si on saisit et valide `vitesse(100,4)` dans la console, alors `distance=100` et `temps=4` donc la valeur retournée est donnée par `v=100/4=25` : si on parcourt 100 km en 4 heures, on est allé à 25 km/h.

**Attention !**

L'ordre des paramètres est important.

- Dans le programme ci-contre, on appelle la fonction `vitesse`.
On obtient alors `if 120>90 :`
puisque `vitesse(180,1.5)` retourne `120`.
Cette condition étant vérifiée, le programme affiche : `Vous avez roulé trop vite`.

```
if vitesse(180,1.5)>90 :
    print("Vous avez roulé trop vite")
```

**Remarque** Une fonction peut ne pas avoir de paramètre, dans ce cas, on l'appelle en écrivant son nom suivi de parenthèses vides.

**Exemple**

Pour appeler la fonction `message` ci-contre dans un programme, on écrit juste `message()`.

```
def message() :
    print("affichage d'un message")
```

**Remarque** La fonction `message` précédente n'a pas non plus de valeur de retour, elle réalise juste un affichage.

# Exercices résolus

## Méthode 5 Comprendre une fonction

### Énoncé

**Quelle valeur est retournée par l'appel de fonction `cosinus(3,5)` où la fonction `cosinus` est donnée ci-contre ?**

```
def cosinus(adj,hyp) :
    c=adj/hyp
    return c
```

### Solution

Dans cet appel de fonction, `adj=3` et `hyp=5`. (1)

On a donc `c=adj/hyp=3/5=0.6`. (2)

La valeur retournée est donc `0.6` (3)

**Remarque :** On aurait aussi pu écrire directement `return adj/hyp` sans introduire `c`.

### Conseils & Méthodes

1. On identifie les valeurs prises par les variables en paramètres en faisant attention à leur ordre.
2. On effectue la suite d'instructions de la fonction.
3. On en déduit la valeur retournée.

### À vous de jouer !

**9** Quelle valeur est retournée par l'appel de fonction `sinus(8,3)` où la fonction `sinus` est donnée ci-dessous ?

```
def sinus(hyp,opp) :
    s=opp/hyp
    return s
```

**10** Quelle valeur est retournée par l'appel de fonction `f(8)` où la fonction `f` est donnée ci-dessous ?

```
def f(x) :
    y=3*x-7
    return y
```

↪ Exercices 54 à 56 p. 34

## Méthode 6 Écrire une fonction

### Énoncé

**Dans un bowling, le tarif d'une partie est de 4 € pour les personnes licenciées et 5,50 € pour les personnes non licenciées.**
**Écrire une fonction `prix` donnant le tarif pour `p` parties jouées par un groupe de `L` licenciés et `n` non licenciés.**

### Solution

Les paramètres sont `p`, `L` et `n` (les prix sont fixes donc ne dépendent pas du groupe). (1)

La valeur de retour va être `p*(L*4+n*5.5)` (2)
On peut l'affecter à une variable `tarif` ou l'écrire directement dans la dernière ligne.

```
def prix(p,L,n) :
    tarif=p*(L*4+n*5.5)
    return tarif
```

(3)

ou

```
def prix(p,L,n) :
    return p*(L*4+n*5.5)
```

(3)

### Conseils & Méthodes

1. On identifie les paramètres de la fonction : ce sont les variables dont dépendent le résultat.
2. On identifie la valeur de retour et comment l'obtenir.
3. On écrit la fonction en respectant la syntaxe (notamment des première et dernière lignes) et en indentant correctement.

### À vous de jouer !

**11** Écrire une fonction `ohm` renvoyant la tension `U`, en volts, aux bornes d'un conducteur ohmique à partir de la valeur de sa résistance `R` en ohms et de l'intensité du courant `I`, en ampères, qui le traverse. On rappelle la loi d'Ohm : $U = R \times I$.

**12** Dans le langage **Python**, écrire une fonction `moyenne` ayant trois paramètres `a`, `b` et `c` et dont la valeur de retour est la moyenne de leurs valeurs.

↪ Exercices 57 à 61 p. 34

# 4 Boucles bornées

**Définition** Boucle `for`

**Lorsque l'on veut exécuter un nombre déterminé de fois un même bloc d'instructions, on utilise une boucle bornée, aussi appelée boucle `Pour` ou boucle `for`.**
**Ces boucles sont munies d'une variable compteur que l'on peut utiliser dans les instructions à exécuter.**

**Dans le langage Python, pour définir une boucle bornée dont le compteur est appelé `i` :**

- **on écrit une première ligne `for i in range(a,b)` : ce qui se traduit par « pour `i` allant de `a` à `b-1` »,**
- **on écrit les instructions à exécuter dans un bloc indenté.**

**Exemple**

Le programme ci-contre affiche les doubles des entiers de 1 à 100.
Dans la boucle, le compteur est `i` mais on pourrait le remplacer par `k`, par exemple.

```
for i in range(1,101) :
    print(2*i)
```

**Attention !**

`for i in range(1,101) :` veut dire « pour `i allant` de `1 à 100` » et non pas « pour `i allant` de `1 à 101` ».

**Remarque** Ce programme est équivalent au programme **Scratch** ci-contre où on constate bien que le compteur `i` augmente de 1 à chaque passage dans la boucle.

# 5 Boucles conditionnelles

**Définition** Boucle `while`

**Lorsque l'on veut répéter un même bloc d'instructions tant qu'une certaine condition est vérifiée, on utilise une boucle conditionnelle, aussi appelée boucle `Tant que` ou boucle `while`.**

**Dans le langage Python pour définir une boucle conditionnelle, on écrit :**

- **une première ligne `while condition` : ce qui se traduit par « tant que la condition est vérifiée ».**
- **les instructions à exécuter dans un bloc indenté.**

**Exemple**

On étudie le programme ci-contre.

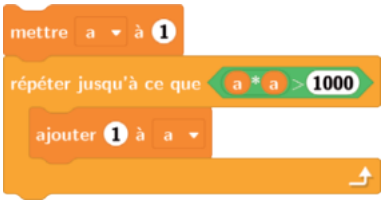
```
1 a=1
2 while a**2 <= 1000 :
3     a=a+1
4 print(a)
```

- **Ligne 1** : on a une variable `a` dont la valeur initiale est `1`.
- **Ligne 2** : `while a**2<=1000 :` c'est-à-dire « tant que $a^2$ est inférieur ou égal à `1000` », le bloc indenté est exécuté.
- **Ligne 3** : Donc cette valeur de `a` augmente de `1` à chaque passage dans la boucle.

La boucle s'arrêtera quand $a^2$ sera supérieur à `1000`.

- **Ligne 4** : il restera alors à afficher `a`.

On a $1^2 \leqslant 1\,000$ ; $2^2 \leqslant 1\,000$ … $31^2 = 961 \leqslant 1\,000$ et $32^2 = 1\,024 > 1\,000$
donc la boucle s'arrête quand `a=32` qui est alors affiché.
32 est le plus petit nombre dont le carré est plus grand que 1 000.




**Remarques**

- On note que `print(a)` n'est pas indenté donc la valeur de `a` ne s'affiche qu'une seule fois, quand la boucle est terminée.
- Ce programme est équivalent au programme **Scratch** ci-contre.

# Exercices résolus

## Méthode 7 Comprendre une boucle `for`

### Énoncé

**Déterminer l'affichage du programme suivant.**

```
f=1
for k in range(2,5) :
    f=f*k
print("Le résultat est ",f)
```

### Solution

Au départ, `f=1` puis `f=f*k=1*2=2` etc.

| Étape | Départ | `k=2` (1) | `k=3` (1) | `k=4` (1) | (3) |
|---|---|---|---|---|---|
| Valeur de `f` | `1` (2) | `1×2=2` | `2×3=6` | `6×4=24` | (4) |

Comme `f=24` en fin de boucle, l'affichage est :
`Le résultat est 24`.

### Conseils & Méthodes

1. On identifie le compteur et ses valeurs successives, ici c'est `k` allant de `2` à `4`.
2. On identifie les variables autres que le compteur.
   Ici, il n'y a que `f` qui vaut `1` au départ.
3. On dresse un tableau avec une colonne pour les valeurs de départ des variables (ici, juste `f`) et des colonnes appelées `k=...` pour chaque passage dans la boucle `for`.
4. On calcule au fur et à mesure les différentes valeurs prise par les variables (ici, juste `f`).

### À vous de jouer !

**13** Quelles sont les valeurs affichées pendant l'exécution de ce programme ?

```
for i in range(5,8) :
    r=2*(i**2)+5
    print(r)
```

**14** Quelle est la valeur de la variable `b` à la fin de ce programme ?

```
b=5
for j in range(0,100) :
    b=b*j
```

↪ Exercices 62 à 67 p. 35

## Méthode 8 Comprendre une boucle `while`

### Énoncé

**Déterminer la valeur de `p` à la fin de ce programme. On rappelle que `2**p` signifie $2^p$.**

```
p=1
while p < 10000:
    p=2**p
```

### Solution

Au départ, `p=1` puis `p=2**p=2**1=2` puis `p=2**p=2**2=4` etc.

À la fin du programme, la valeur de `p` est `65536`.

| Valeur de `p` | 1 | $2^1=2$ | $2^2=4$ | $2^4=16$ | $2^{16}=65536$ | (1) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Condition vérifiée | Oui | Oui | Oui | Oui | Non (2) | |

### Conseils & Méthodes

1. On calcule successivement les valeurs à calculer.
   On peut présenter les résultats sous forme de tableau.
2. On s'arrête quand la condition n'est plus vérifiée.

### À vous de jouer !

**15** Quelles sont les valeurs affichées pendant l'exécution de ce programme ?

```
k=2
while k !=2048 :
    print(k)
    k=4*k
```

**16** Quelle est la valeur de la variable `z` à la fin de ce programme ?

```
z=3
while z<100 :
    z=z+3
```

↪ Exercices 68 à 72 p. 35

# Exercices résolus

EXERCICES Sésamath
Travailler des méthodes
www.lienmini.fr/8270-s3

## Méthode 9 Écrire une boucle `for`

**Énoncé**

**Écrire un programme qui écrit les quadruples des entiers de 11 à 20.**

**Solution**

Ici, on va travailler pour `i` (on peut aussi prendre un autre nom de variable) allant de `11` à `20`. (1)

On doit donc afficher les nombres de la forme $4 \times$ `i` avec `i` compris entre `11` et `20` c'est-à-dire dans `range(11,21)`. (2)

Le programme peut donc s'écrire :

```
for i in range(11,21) :
    print(4*i)
```

**Conseils & Méthodes**

1. On identifie une répétition du même schéma avec un nombre de répétitions connue : de 11 à 20.
2. On traduit cette liste d'entiers successifs par une instruction avec `range`.
   **Attention !** `range(a,b)` va de `a` à `b-1`.

**À vous de jouer !**

**17** Écrire un programme affichant les images des entiers de 97 à 121 par la fonction $f$ définie par $f(x) = 8x - 7$.

**18** Écrire un programme qui écrit tous les cubes des entiers de 10 à 15.

↪ Exercices 73 à 79 p. 36

## Méthode 10 Écrire une boucle `while`

**Énoncé**

**On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = 3x^3 - 7x + 4$.**
**Écrire un programme affichant le plus petit entier positif dont l'image par cette fonction est supérieure ou égale à 1000.**

**Solution**

- On cherche $x$ tel que $f(x) \geqslant 1\,000$.

$x$ est entier et c'est le plus petit vérifiant cette condition : il s'agit donc de calculer les images de 0, 1, 2, 3, … tant qu'elles sont inférieures à 1 000. (1)

- On introduit donc une variable `x` qui va prendre pour valeurs successives les entiers `0`, `1`, `2`, etc. Au départ, `x` vaut donc `0`. (2)
- Le programme doit continuer tant que $f(x) < 1\,000$, la condition d'entrée dans la boucle est donc `while 3*(x**3)-7*x+4<1000:` (3)
- À chaque passage dans la boucle, la valeur de `x` va augmenter de `1` donc cette boucle contient l'instruction `x=x+1`. (4)

On obtient donc le programme ci-contre (penser à l'affichage final).

**Conseils & Méthodes**

1. On analyse le problème.
2. Identifier la (ou les) variable(s) en jeu et leur valeur de départ.
3. Identifier la condition d'entrée dans la boucle « tant que ».
4. Identifier l'évolution des variables.

```
x=0
while 3*(x**3)-7*x+4 < 1000 :
    x=x+1
print(x)
```

**À vous de jouer !**

**19** Écrire un programme affichant toutes les puissances de 5 inférieures à1 000 000.

**Coup de pouce** La plus petite puissance de 5 est 1, la suivante est $1 \times 5 = 5$, la suivante est $5 \times 5 = 25$, etc.

**20** On admet que l'unique solution de l'équation $8x + 900 = 468$ est un entier négatif.
Écrire un programme testant tous les entiers négatifs jusqu'à trouver la solution.

↪ Exercices 80 à 83 p. 36

## J'apprends à décomposer un problème en sous-problèmes

**Réflexe 1**
J'identifie les différents sous-problèmes qu'il va falloir résoudre pour répondre au problème. Éventuellement, j'identifie leur(s) paramètre(s) en commun, s'il y en a.

**Réflexe 2**
Je résous ces sous-problèmes de manière indépendante (en nommant de manière similaire les paramètres communs).

**Réflexe 3**
Je relie les sous-problèmes entre eux.

### ▶ Énoncé

Adem possède un magasin de vêtements, tous vendus entre 50 € et 100 €.
Il a décidé de solder à 15 % tous les vêtements entre 50 € et 70 € et à 20 % ceux entre 71 € et 100 €.
**Écrire un programme affichant les prix soldés au format `ancien prix->nouveau prix`.**

### ▶ Solution commentée

**Étape 1** Ici, je vois que je peux décomposer ce problème en trois sous-problèmes.

① Je fais « défiler » tous les prix entre 50 € et 100 €.

② Pour chaque prix, je teste s'il est inférieur à 71 € ou non.

③ J'applique la bonne formule dans chaque cas et j'affiche au format demandé. **Réflexe 1**

**Remarque** Je peux aussi décomposer le problème en d'autres sous-problèmes : par exemple faire « défiler » les prix de 50 € à 70 € puis de 71 € à 100 € et appliquer directement la bonne formule dans chaque boucle.

**Étape 2** Dans les trois sous-problèmes, il y a un paramètre commun : le prix. Je pose donc la variable `p` donnant ce prix. **Réflexe 1**

① `p` doit varier entre `50` et `100` ce qui nous indique l'utilisation d'une boucle `for`.

```
for p in range(50,101) :
```

② Pour chaque valeur de `p`, je teste si `p` est supérieur à `71` ou non :

```
if p<71 :
    ...
else :
    ...
```

③ Je traduis les deux cas **Réflexe 2**.

• Si `p` < `71` :

```
print(p,"->",p*(1-15/100))
```

• Si `p` ⩾ `71` :

```
print(p,"->",p*(1-20/100))
```

**Étape 3** Je n'ai plus qu'à mettre les instructions dans l'ordre en faisant attention aux indentations. **Réflexe 3**

*Réponse rédigée*

```
for p in range(50,101) :
    if p<71 :
        print(p,"->",p*(1-15/100))
    else :
        print(p,"->",p*(1-20/100))
```

## Je m'entraîne à décomposer un problème en sous-problèmes

### 21 Boucle `for` et `if/else`

Écrire un programme qui génère un nombre aléatoire `x` entre `1` et `10` et, si ce nombre est supérieur à `4`, affiche la liste de ses dix premiers multiples, sinon affiche la valeur de `x`.

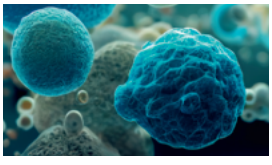
### 22 Boucles `for`

Alma a reçu 10 000 € sur un compte à sa naissance. Durant les 10 premières années, ce compte était rémunéré à 2 % d'intérêts et à 1% les années suivantes. Durant les 10 premières années, 2 000 € ont été ajoutés après versement des intérêts chaque année et 3 000 € les années suivantes. Quelle somme d'argent sera disponible sur ce compte aux 18 ans d'Alma ?

### 23 Boucles `for` et `while`

Une population de 1 000 microbes évolue ainsi :
• elle augmente de 5 % par heure jusqu'à dépasser 3 000 microbes,
• elle augmente ensuite de 50 microbes par heure jusqu'à dépasser 4 000 microbes,
• elle stagne ensuite pendant 10 heures,
• elle diminue enfin de 10 % par heure jusqu'à passer en-dessous de 10 microbes.

Écrire un programme donnant l'évolution de cette population de microbes chaque heure.

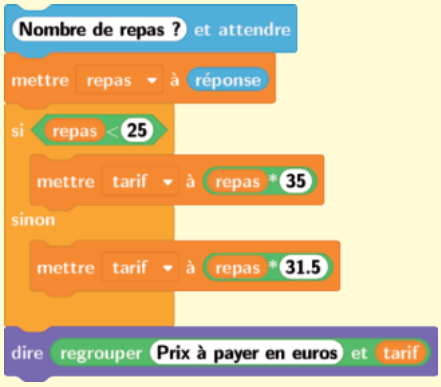


# Exercices d'entraînement

## Je consolide mes acquis

### 24 Si et sinon

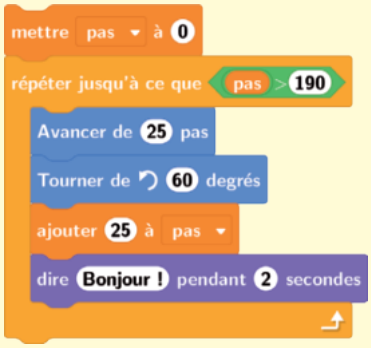
On considère le programme **Scratch** suivant.




1. **a)** Que dit le lutin si l'on saisit la valeur `22` quand on y est invité ?
**b)** Même question avec `45`.
2. Ce programme est utilisé par un traiteur pour gérer ses commandes.
Quels sont les tarifs de ce traiteur ?

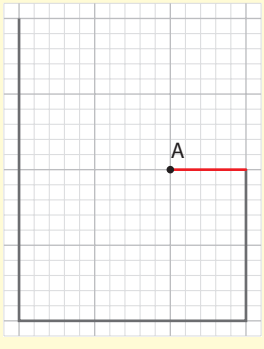
### 25 Répéter jusqu'à

Reproduire le chemin parcouru par le lutin lors de l'exécution de ce programme **Scratch**.




### 26 Répéter 4 fois

Écrire le bloc BLOC afin que le trajet par lequel passe le lutin soit celui dessiné en face du programme suivant.
(A est le point de départ et le segment rouge est le premier segment mesurant 10 pas).




## Questions de cours

**27** Dans le langage **Python** comment s'appelle le type des variables prenant comme valeurs des mots ou groupes de mots ?

**28** Que veut dire `for i in range(1,7):` ?

**29** Comment reconnaît-on un bloc indenté ?
Quand retrouve-t-on des blocs indentés dans le langage **Python** ?

**30** Quelles sont les valeurs possibles d'une variable de type `bool` ?

**31** Quelle est la première ligne d'une fonction `truc` de paramètres `a` et `b` ?

## Choisir le bon type

**32** Dans un programme de gestion de stocks de livres apparaissent trois variables : `livre`, `qte` et `prix` prenant respectivement pour valeur le titre du livre, sa quantité disponible et son prix.
De quels types sont chacune de ces variables ?

**33** On veut écrire un programme pour un institut météorologique dans lequel apparaissent des variables `ville`, `departement`, `pluviometrie` et `ensoleillement` donnant respectivement le nom de la ville considérée, son numéro de département, sa pluviométrie de l'année en cours (en cm par $m^2$, arrondie à 0,1) et son nombre de jours d'ensoleillement de l'année en cours.
Donner un type possible pour chacune de ces variables.

**34** Le programme d'une application sportive comporte quatre variables : `nom`, `temps`, `total` et `objectif` correspondant respectivement au nom de l'utilisateur, au nombre (entier) de minutes passées à faire du sport dans la journée, au nombre de kcal dépensées, arrondi à 0,1 près et si oui ou non l'utilisateur a atteint son objectif de 400 kcal dépensées.

Donner un type possible pour chaque variable.

## Comprendre l'affectation

Méthode 1 p. 23

**35** On considère le programme suivant.

```
prix=float(input("Prix ? "))
qte=int(input("Quantité ? "))
print(prix*qte)
```

1. Quelle sera la valeur affichée si l'utilisateur saisit successivement `4.50` et `3` ?
2. Interpréter cette réponse dans le contexte concret du panier sur un site marchand en ligne.

**36** Quelles sont les valeurs prises par les variables à la fin de ces programmes ?

**a)**
```
x=5.5
y=8
y=5*y-2.5
x=x*y
```

**b)**
```
a=2
b=3*a
a=b**2
b=a/10
```

**c)**
```
a="tic"
b="tac"
b=a+b
```

**37** Quelles sont les valeurs prises par les variables à la fin de ces programmes ?

**a)**
```
mot1="maths"
mot2="physique"
mot2=2*mot1+mot2
mot1=mot2
```

**b)**
```
a=4
b="3"
a=a*b
b=a+b
```

**38** Quelles sont les valeurs prises par les variables suivantes ?
**a)** `x=(5<7)` **b)** `y=(-7<-10)` **c)** `z=(-1>12)`

**39** Une entreprise de recyclerie vend deux types de lampes vintage aux prix respectifs de 25,99 € et 39,99 €. Quand un client commande en ligne, un programme se lance où la quantité de chaque produit acheté est stockée dans deux variables `n1` et `n2` et le montant de la facture dans une variable `total`.

Quelle est l'affectation de la variable `total` ?

## Déterminer un type

Méthode 2 p. 23

**40** Donner les types des variables de l'exercice **35**.

**41** On reprend l'énoncé de l'exercice **36**.
1. Quels sont les types successifs pris par les variables `x` et `y` du premier programme ?
2. Même question pour `a` et `b` dans le deuxième programme.

**42** Donner les types des variables de l'exercice **37**.

**43** Donner les types des variables de l'exercice **38** en fin de programme.

**Dans la suite, la commande `math.sqrt(x)` désigne $\sqrt{x}$ et `random.randint(a,b)` génère un entier aléatoire entre `a` et `b`. Elles utilisent les modules `math.` ou `random.` supposés importés.**

## Comprendre des instructions conditionnelles

Méthode 3 p. 25

**44** On considère le programme suivant.

```
a=float(input("a = ?"))
if a>=0 :
    print("racine carrée :",math.sqrt(a))
else :
    print("pas de racine carrée")
```

Quel est l'affichage réalisé par le programme :
**a)** si `a=5` ? **b)** si `a=-5` ?

**45** On considère le programme suivant.

```
de=random.randint(1,6)
if de !=6 :
    print("Au top !")
else :
    print("Peut mieux faire")
```

Quel est l'affichage réalisé par le programme si :
**a)** `de=5` ? **b)** `de=6` ?

**46** Voici un programme. Quelle est la valeur de `reponse` :
**a)** si `a=4` ? **b)** si `a=3` ?

```
a=random.randint(1,5)
if a*"he"=="hehehe" :
    reponse="parfait"
else :
    reponse=a
```

**47** Soit le programme ci-contre.
1. Quelle est la valeur de `a` si :
**a)** `de1=2` et `de2=7` ?
**b)** `de1=4` et `de2=8` ?
2. Quelles sont les valeurs de `de1` et `de2` pour lesquelles `a=8` ?

```
de1=random.randint(1,5)
de2=random.randint(6,10)
if de1*de2 <= 30 :
    a=de1+de2
else :
    a=8
```

**48** Soit les instructions ci-contre. Quelle est la valeur prise par `z` :
**a)** si `x=5` ?
**b)** si `x=14.78` ?
**c)** si `x=4.3` ?

```
if x == 5 or x>11 :
    z=x
else :
    z=x**3
```

**49** Soit le programme ci-contre. Quelles sont les valeurs possibles de `a` pour lesquelles l'affichage est `dedans` ?

```
a=random.randint(5,15)
if a > 8 and a!= 15 :
    print("dedans")
else :
    print("en dehors")
```

# Exercices d'entraînement

## Écrire des instructions conditionnelles

Méthode 4 p. 25

**50** La fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x-1}$ n'est pas définie en 1, c'est-à-dire que 1 n'a pas d'image. Écrire un programme demandant la valeur de la variable `x` à l'utilisateur et affichant :
- `Pas d'image` si `x` est égal à `1`,
- l'image de `x` par $f$ si `x` est différent de `1`.

**51** Une autoroute limitée à 130 km/h est équipée d'un radar tronçon c'est-à-dire qu'un programme stocke la distance parcourue en km dans une variable `d` et le temps de parcours en heures dans une variable `t`.
Écrire les instructions conditionnelles permettant d'afficher `Excès de vitesse` ou `Tout est en règle` selon que la vitesse moyenne est supérieure ou non à 130 km/h.

**52** Pour un couple marié ou pacsé avec enfants, le quotient familial est un nombre de parts calculé comme ceci :
- chacun des deux parents compte pour une part,
- les deux premiers enfants comptent chacun une demi-part et les suivants comptent une part complète.

Dans cette situation, écrire un programme demandant le nombre `n` d'enfant(s) (au moins `1`) et affichant le nombre de parts de ce foyer.

**53** Écrire les instructions conditionnelles permettant d'afficher `dedans` si une variable `x` est comprise entre `12` et `13` inclus et `dehors` sinon.

## Comprendre une fonction

Méthode 5 p. 27

**54** On considère la fonction ci-contre.
Que retourne :
**a)** `f(12)` ?
**b)** `f(-36)` ?

```
def f(x) :
    return 8*x+12
```

**55** On considère la fonction suivante.

```
def pytha(c1,c2) :
    return math.sqrt(c1**2+c2**2)
```

**1.** Que retourne :
**a)** `pytha(3,4)` ? **b)** `pytha(7,15)` ?

**Coup de pouce** $\sqrt{x}$ s'écrit `math.sqrt(x)`.

**2.** Concrètement, que fait cette fonction ?

**56** On considère la fonction suivante.
**1.** Que retourne :
**a)** `mystere(8,3)` ?
**b)** `mystere(-5,-1)` ?
**2.** Modifier la fonction pour qu'elle retourne la plus grande des deux valeurs prises par `a` et `b`.

```
def mystere(a,b) :
    if a>b :
        m=b
    else :
        m=a
    return m
```

## Écrire une fonction

Méthode 6 p. 27

**57** L'indice de masse corporelle (IMC) se calcule avec la formule $\text{IMC} = \dfrac{\text{masse}}{\text{taille}^2}$ où la masse est exprimée en kg et la taille en mètre.
Écrire une fonction `imc` de paramètres `m` et `t` qui retourne l'IMC d'une personne de masse `m` kg et de taille `t` mètres.

**58** **Histoire des maths**

René Descartes (1596-1650)

Les mathématiciens René Descartes et Leonhard Euler ont, semble-t-il, découvert la même formule qui dit que dans un polyèdre (comme le cube, les pyramides, etc.)

$$s - a + f = 2$$

où $s$, $a$ et $f$ représentent respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces du polyèdre.
**1.** Écrire une fonction `euler` de paramètres `s`, `a` et `f` renvoyant `s-a+f`.
**2.** Tester la formule sur quelques polyèdres à l'aide de cette fonction.

**59** Écrire une fonction `masse` de paramètres `masse_vo` et `volu` qui retourne la masse d'une substance de masse volumique `masse_vo` et de volume `volu` supposés donnés dans des unités adaptées. **Chimie**

**60** On cherche à faire un diagramme circulaire pour représenter une série statistique d'effectif total `n`.
Écrire une fonction `secteur` de paramètres `n` et `n1` qui retourne l'angle d'un secteur correspondant à un effectif `n1` dans cette série statistique.

**61** **Analyser un problème pour le résoudre**
Un service de location de voitures propose une voiture à 52,16 € la journée.

À ce tarif, la personne louant le véhicule peut parcourir sans surcoût 250 km par jour en moyenne.
Si elle dépasse ce seuil, elle devra payer 0,31 € par km parcouru supplémentaire.
Écrire une fonction `tarif` de paramètres `j`, le nombre de jours de location, et `d`, la distance parcourue en km, et qui retourne le tarif à payer.

↪ Résolution de problèmes p. 134 et p. 274

## Comprendre une boucle `for`

Méthode 7 p. 29

**62** Quelles sont les valeurs successives prises par la variable `c` dans le programme ci-contre ?

```
for k in range(5,10):
    c=k/(k+1)
```

**63** Quelles sont les valeurs successives prises par la variable `x` dans le programme suivant ?

```
x=1
for c in range(1,6):
    x=x+c
```

**64** On considère une fonction `fonc1` telle que `fonc1(x)` renvoie l'image de `x` par la fonction $x \mapsto x^2 + 3$.
Qu'affiche le programme ci-contre ?

```
for z in range(8,15) :
    print(fonc1(z))
```

**65** On considère une fonction `fonc2` telle que `fonc2(x)` renvoie l'image de `x` par la fonction $x \mapsto -100x^2 + 700x + 800$.

```
max=fonc2(-3)
for j in range(-2,6):
    if max<fonc2(j) :
        max=fonc2(j)
```

Quelle est la valeur de la variable `max` à la fin de ce programme ?

**66** Esprit critique

Pour gérer son entraînement à la course, une athlète a écrit le programme suivant.
On suppose qu'au début de chaque année, avant de lancer ce programme, elle modifie la valeur de la variable `annee` selon que l'année compte 365 ou 366 jours.

```
annee=365
total=0
for jour in range(1,annee+1) :
    d=int(input("Dist. du jour :"))
    total=total+d
```

1. Donner l'évolution de la variable `total` si `d` vaut successivement `4,5,5` les trois premiers jours.
2. Pourquoi a-t-on écrit `range(1,annee+1)` et non `range(1,annee)` ?

**67** On considère le programme ci-contre.

```
for i in range(1,11) :
    for j in range(1,11) :
print(i,"*",j,"=",i*j)
```

1. Quels sont les premiers et derniers affichages ?
2. Qu'écrit concrètement ce programme ?

## Comprendre une boucle `while`

Méthode 8 p. 29

**68** Quelle est la valeur de `somme` à la fin de l'exécution de ce programme ?

```
somme=1000
while somme<1100 :
    somme=somme*1.01
```

**69** Quelle est la valeur de `n` à la fin de l'exécution de ce programme ?

```
u=5
n=1
while u >= 1.5 :
    u=u/2+1/u
    n=n+1
```

**70** Quelles sont les valeurs affichées par le programme suivant ?

```
x=1
while x**2 != 400 :
    print(x**2)
    x=x+1
```

**71** Chimie

La fonction `dilu` est telle que `dilu(qte,t)` retourne `t` % de la quantité `qte`.

```
acide=20
n=0
while acide> 1 :
    acide=dilu(acide,10)
    n=n+1
print(n)
```

1. Qu'affiche le programme ci-contre ?
2. On souhaite savoir combien de dilutions à 50 % d'un bidon d'1 litre d'acide chlorhydrique on doit réaliser pour qu'il reste moins de 2 cL d'acide chlorhydrique dans la solution finale. Modifier le programme précédent pour qu'il affiche la réponse souhaitée.

**72** SVT

L'évolution d'une population de 1 000 bactéries mises en culture est donnée par le programme suivant où le temps `t` est exprimé en heures.

```
b=1000
t=0
while b <= 1500 :
    b=b*1.01
    t=t+1
while b > 1500 and b <= 1600:
    b=b+5
    t=t+1
for i in range(1,6) :
    t=t+1
while b>=1 :
    b=0.95*b
    t=t+1
```

Décrire l'évolution de cette population de bactéries dans le temps.

# Exercices d'entraînement

## Écrire une boucle `for`

Méthode 9 p. 30

**73** Écrire un programme affichant :
**a)** les inverses des entiers de 12 à 20.
**b)** les multiples de 8 de $8 \times 3$ à $8 \times 50$.

**74** On dispose d'une fonction `fonct` telle que `fonct(x)` renvoie l'image de `x` par la fonction $g : x \mapsto 3x^3 - 5$. En utilisant cette fonction `fonct`, écrire un programme affichant les images des entiers de 5 à 25 par $g$.

**75** Écrire un programme affichant les images des entiers de 1 à 10 par la fonction $x \mapsto 3x^2 - 36x + 105$ sauf celles qui sont inférieures ou égales à 0.

**76** Reprendre l'exercice **74** avec les images de 2 ; 2,1 ; 2,2 ; … ; 4,8 ; 4,9 et 5.

### 77 Décomposer un problème en sous-problèmes

Un groupe de personnes part en randonnée.

Écrire un programme demandant préalablement de saisir le nombre de personnes dans ce groupe puis, demandant à chacune d'entre-elles de saisir la masse de son sac à dos et enfin, calculant et affichant la masse moyenne de leurs sacs à dos.

↪ Résolution de problèmes p. 31

**78** Écrire un programme qui écrit tous les nombres pairs de 8 à 1 234.

**79** Écrire un programme qui écrit tous les carrés parfaits de 4 à 100.

## Écrire une boucle `while`

Méthode 10 p. 30

**80** Une feuille a une épaisseur de 0,1 mm.
Écrire un programme affichant le nombre fois où l'on doit plier la feuille sur elle-même pour que son épaisseur dépasse 1 m.

**Coup de pouce** Créer une variable `epaisseur`.

**81** Soit la suite logique 3-4-6-9-13-etc.
Sachant que 4 = 3 + 1, 6 = 4 + 2, 9 = 6 + 3 etc, écrire un programme affichant le premier terme de cette suite logique supérieur à 1 000.

**Coup de pouce** On créera deux variables prenant pour valeurs les termes de la suite et les écarts.

**82** En 2005, l'empreinte carbone en France était de 550 millions de tonnes de $CO_2$. En modélisant son évolution par une diminution de 8,5 % tous les 5 ans, écrire un programme affichant l'année à partir de laquelle cette empreinte carbone passera en dessous de l'objectif de 300 millions de tonnes.

Développement durable

**83** Écrire un programme dans lequel on affecte un entier aléatoire entre `1` et `6` à une variable `x`. L'utilisateur a alors trois essais maximum pour saisir des valeurs et trouver celle de `x`, le programme affiche alors `Gagné` ou `Perdu` selon que l'utilisateur a trouvé ou non la valeur.

## À chacun son rythme

**84** Une salle de cinéma de 200 places propose deux tarifs : 12,50 € la place pour les majeurs et 9 € pour les mineurs. Le cinéma a chargé votre entreprise de créer des programmes pour sa borne d'accueil.

**Énoncé A**

Un de vos collègues a conçu le programme ci-contre donnant au client le tarif selon son âge. Le vérifier et corriger les erreurs éventuelles.

```
age=int(input("Age ? "))
if x>18 :
    print(12,50 euros)
else
    print("9 euros")
```

**Énoncé B**

Écrire une fonction `tarif` de paramètres `n1` et `n2` retournant le prix à payer pour un groupe de `n1` majeurs et `n2` mineurs.

**Énoncé C**

Écrire un programme qui, pour chaque commande, affiche le nombre de places restantes dans la salle, demande le nombre de majeurs et de mineurs du groupe et affiche le prix à payer puis recommence jusqu'à ce que la salle soit remplie.
On admet que le dernier groupe ne demandera pas plus de places que la quantité restante.

## 85 Type et affectation

Pour chacun des programmes suivants, donner les types et valeurs prises par les différentes variables en fin de programme.

**a)**
```
x=8
y=5
x=8*x
y=y/12
```

**b)**
```
x="8"
y=5
x=y*8
y=y/12
```

**c)**
```
u=5
while u<1000 :
    u=3*u
```

## 86 Abonnement ou pas

On considère le programme suivant.

```
x=int(input("Nombre de séances"))
if 3.5*x<120 :
    print("Payez à la séance")
else :
    print("Abonnez-vous !")
```

**1.** Qu'affiche ce programme :
**a)** si `x=30` ? **b)** si `x=52` ?
**2.** Ce programme est proposé aux clients d'une piscine pour savoir s'ils doivent privilégier un abonnement annuel ou payer à la séance.
**a)** Quel est le prix de l'abonnement annuel ?
**b)** Quel est le prix de la séance ?

## 87 Fonction et boucle

**1.** On considère la fonction `evo` ci-dessous.

```
def evo(qte,taux) :
    return qte*(1+taux/100)
```

Quelle est la valeur renvoyée par :
**a)** `evo(20,45)` ? **b)** `evo(50,-30)` ?

**2.** Quelles valeurs affichent ces programmes ?

**a)**
```
x=120
for y in range(1,5) :
    print(evo(x,10*y))
```

**b)**
```
x=120
y=10
while evo(x,y) <= 200 :
    y=y+5
print(evo(x,y))
```

## 88 Recensement de population française

En 2017, la population française était de 66 774,5 milliers d'habitants. Depuis, on considère qu'elle a augmenté en moyenne de 96 milliers d'habitants chaque année.
Écrire un programme calculant la population française prévue chaque année jusqu'à ce qu'elle dépasse 80 millions et affichant la première année où ce seuil de 80 millions d'habitants est dépassé.

**Coup de pouce** Introduire une variable `population` et une variable `annee`.

## 89 Images par une fonction

**1.** Écrire une fonction `fonc` de paramètre `x` retournant l'image de `x` par la fonction $f : x \mapsto 7x^2 + 3x - 5$.
**2.** Écrire une boucle affichant les images des entiers de 4 à 10 par cette fonction $f$.
**3.** Même question pour les images de 8,1 ; 8,2 ; … ; 9.

## 90 Type de performance

On considère une appli de running écrite en langage **Python**. Quand un utilisateur l'installe sur son téléphone, il renseigne trois variables, `nom`, `age` et `cooper`, cette dernière étant vraie (`True`) ou fausse (`False`) selon que l'utilisateur a déjà réalisé le test de Cooper (qui consiste à courir la plus grande distance possible en 12 minutes) ou non.
**1.** Quelles sont les types de ces trois variables ?
**2.** La $VO_2$ max est le volume maximal d'oxygène consommé lors d'un effort, exprimé en mL par minute et par kg. Une bonne approximation de cette $VO_{2\,max}$ est donnée par la formule :

$$VO_{2\,max} = \frac{d - 505}{45}$$

où $d$ est la distance parcourue en mètres au test de Cooper.
**a)** Écrire une fonction `VO` de paramètre `d` renvoyant l'approximation de la $VO_{2\,max}$ pour une distance `d` mètres parcourus au test de Cooper.
**b)** Compléter la suite du programme de l'appli ci-dessous afin qu'il teste si l'utilisateur a fait le test de Cooper ou non :
• si oui en affichant sa $VO_{2\,max}$.
• sinon en affichant `Faites le test de Cooper !`

```
if...:
    d=int(input("Dist. Cooper en m: "))
    ...
```

**Coup de pouce** Une variable déjà définie permet de savoir si l'utilisateur a réalisé le test de Cooper.

## 91 Aiguillages informatisés

Un poste d'aiguillages informatisés de voies ferrées doit ouvrir l'aiguillage à la voie de gauche ou de droite.
On suppose que le programme gérant cet aiguillage est muni de deux variables `dist_g` et `dist_d` mises à jour en temps réel et qui correspondent respectivement à la distance en mètres entre le poste d'aiguillage et le train le plus proche sur la voie de gauche et le poste d'aiguillage et le train le plus proche sur la voie de droite.
Écrire une fonction `aiguillage` de paramètres `dist_g` et `dist_d` et renvoyant :
• `gauche` si c'est le train de la voie de gauche le plus proche du poste,
• `droite` si c'est celui de droite.
S'ils sont à même distance, celui de gauche a la priorité mais la fonction affiche toutefois `Attention`.

# Exercices d'approfondissement

## 92 Histoire des maths

L'histoire des mathématiques est marquée par la volonté de trouver des approximations du nombre π par des nombres rationnels, c'est-à-dire des fractions de deux entiers.

**1. a)** Compléter : « L'écart entre les nombres $x$ et π est inférieur à 0,01 si et seulement si $\pi - 0{,}01 < x < \ldots$ ».

**b)** Écrire une fonction `appro` dont les paramètres sont `x` et `e` et qui retourne `True` ou `False` selon que l'écart entre `x` et π est inférieur à `e` ou non.

**Coup de pouce** Le nombre π s'obtient avec la commande `math.pi`. Pour l'utiliser, il faut préalablement importer le module `math`.

**2.** Écrire un programme qui affiche les fractions de deux entiers compris entre 1 et 1 000 dont l'écart avec π est inférieur à 0,001.

## 93 Quotient de deux entiers

Dans le langage **Python**, l'instruction `a//b` donne le quotient des deux entiers a et b.

Sans utiliser `//`, écrire une fonction `quotient` telle que `quotient(a,b)` retourne le quotient de `a` par `b`.

## 94 Suite de Syracuse

La suite de Syracuse est définie ainsi :

- on part d'un nombre entier strictement positif,
- s'il est pair, on le divise par 2,
- s'il est impair, on le multiplie par 3 et on lui ajoute 1,
- on recommence avec le nouveau nombre obtenu.

**1.** Écrire un programme affichant les 100 premiers termes d'une suite de Syracuse (qui dépendra de la valeur de départ).

**Coup de pouce** L'instruction `if n%2==0:` permet de tester si un nombre est pair.

**2.** Exécuter le programme plusieurs fois en changeant le nombre de départ.

Que remarque-t-on ?

## 95 Un simple échange

Problème ouvert

Écrire un programme demandant à l'utilisateur de saisir deux nombres `a` et `b` et tels que les valeurs de `a` et `b` soient échangées.

Par exemple, si l'utilisateur saisit `2` pour valeur de `a` et `3` pour valeur de `b` alors `a=3` et `b=2` en fin de programme.

# Vers la 1re

## 96 Vers la Spécialité Maths

**Point cours**

On définit une suite $(u_n)$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0{,}5u_n - 8$. En remplaçant $n$ par 0 dans la relation précédente, on obtient $u_{0+1} = 0{,}5u_0 - 8$ c'est-à-dire $u_1 = 0{,}5 \times 2 - 8 = -7$ et on dit que $u_1$ est le terme de rang 1 de la suite.

**1.** Calculer $u_2$ puis $u_3$.

**2.** Écrire un programme affichant les termes de rang 0 à 20 de cette suite. Quel phénomène observe-t-on ?

## 97 Vers STL-ST2S

Il y a :

- 4 kcal dans 1 g de glucides,
- 4 kcal dans 1 g de protéines,
- 9 kcal dans 1 g de lipides,
- 2 kcal dans 1 g de fibres.

**1.** Écrire une fonction `calories` :

- dont les paramètres sont le nombre de grammes de lipides, de protéines, glucides et de fibres par 100 g d'un aliment ainsi que la masse de cet aliment, notés respectivement `lip`, `pro`, `glu`, `fib` et `masse`.
- qui retourne le nombre de calories ingérées si on consomme cet aliment.

**2. a)** Tester cette fonction afin de retrouver le nombre de calories pour une portion de 30 g de l'aliment dont la composition nutritionnelle est donnée ci-dessous.

| INFORMATIONS NUTRITIONNELLES | | | |
|---|---|---|---|
| Composition | Pour 100 g | 1 portion (30 g) | Pourcentage pour 1 portion (30 g) |
| Énergie | 472 kcal | 142 kcal | 7 % |
| Matière grasses | 20 g | 6,1 g | 9 % |
| dont acides gras saturés | 9,2 g | 2,8 g | 14 % |
| Glucides | 66 g | 20 g | 8 % |
| dont sucres | 0,7 g | 0,2 g | < 1 % |
| Fibres alimentaires | 4 g | 1,2 g | – |
| Protéines | 4,3 g | 1,3 g | 3 % |
| Sel | 3,0 g | 0,90 g | 15 % |

**b)** Une pomme de 150 g contient environ 75 kcal.

Que peut-on penser de l'aliment de la question 2 ?

**CARTES FLASH**
Mémoriser le cours
www.lienmini.fr/8270-2

Objectif
## 1 Manipuler les variables

### Variables et types de variables

- Dans un programme **Python**, on peut stocker des valeurs dans des **variables**.
- Ces variables ont des types, les quatre principaux considérés en classe de Seconde sont :
  - `int` pour les nombres **entiers**.
  - `float` pour les nombres « à virgule ».
  - `str` pour les **chaînes de caractères** c'est-à-dire des mots ou groupes de mots (écrits entre guillemets).
  - `bool` pour les **booléens** c'est-à-dire `True` (Vrai) ou `False` (Faux).

### Affectation et affichage

- Quand on donne une valeur à une variable, on dit qu'on lui **affecte** une valeur. Cette affectation se fait avec le symbole `=` sous le format `variable=valeur`.
- On peut utiliser les symboles de calculs usuels `+`, `-`, `*`, `/` dans une affectation et quelques symboles spéciaux comme `**` pour les puissances.
- La commande `input` permet à l'utilisateur de **saisir une valeur de son choix**.
- La commande `print` permet d'**afficher des valeurs ou du texte**.

Objectif
## 2 Manipuler les instructions conditionnelles

### Instructions conditionnelles

- Des **instructions conditionnelles** sont des instructions qui sont exécutées uniquement si une certaine **condition** est vérifiée.
- D'autres instructions sont généralement exécutées si cette condition n'est pas vérifiée.
- La syntaxe **Python** d'une instruction conditionnelle est :

```
if condition :
    Bloc d'instructions indenté
    ......
else :
    Bloc d'instructions indenté
    ......
```

- Les conditions mettent généralement en jeu des symboles mathématiques dont la correspondance est donnée par le tableau ci-dessous :

| Mathématiques | = | ≠ | > | < | ⩾ | ⩽ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Langage Python | == | != | > | < | >= | <= |

Objectif
## 3 Manipuler les fonctions

### Notion de fonction

- Une **fonction** est un bloc d'instructions ayant (généralement) des paramètres et retournant (généralement) une valeur.
- La syntaxe **Python** d'une fonction est :

```
def nom(parametre1,parametre2,..) :
    bloc d'instructions indenté
    ......
    return valeur
```

- On **appelle** une fonction en utilisant son nom et en remplaçant les paramètres entre parenthèses par des valeurs : `nom(valeur1,valeur2)`.

Objectif
## 4 Manipuler les boucles

### Boucle `for`

- On peut **répéter** un nombre prévu de fois des instructions à l'aide d'une **boucle `for`.**
- La syntaxe **Python** d'une boucle `for` est :

```
for i in range(a,b) :
    Bloc d'instructions indenté
```

Où `for i in range(a,b):` veut dire `pour i allant de a à b-1`.

### Boucle `while`

- On peut **répéter** des instructions **tant** qu'une condition est vérifiée à l'aide d'une **boucle `while`.**
- La syntaxe **Python** d'une boucle `while` est :

```
while condition :
    Bloc d'instructions indenté
```

# Préparer le contrôle — Je me teste

QCM INTERACTIF
Tester ses connaissances
www.lienmini.fr/8270-3

## QCM

**Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).**

Objectif 1

### 1 Manipuler les variables

**Dans les exercices 98 à 101 on considère les trois programmes ci-contre.**

①
```
x=5
y=12
x=x-y
y=x-y
```

②
```
a=int(input("a ? "))
b=float(input("b ? "))
c=a*"3"
a=b/a
```

③
```
a=6
b=6
print("a","=",b)
```

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **98** À la fin du programme ① : | `x=5` | `x=-7` | `y=12` | `x=y` |
| **99** À la fin du programme ② : | `a` est de type `int` | `a` est de type `float` | `c` est de type `int` | `c` est de type `str` |
| **100** Dans le programme ②, si l'utilisateur saisit `a=5` et `b=3.2` alors : | `c=15` | `c=33333` | `c=555` | Autre réponse. |
| **101** L'affichage du programme ③ est : | `6=6` | `a=6` | `6=b` | `a=b` |

Objectif 2

### 2 Manipuler les instructions conditionnelles

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **102** Dans l'instruction `if 2*x-6!=0:` la condition est vérifiée si `x` est égal à : | 0 | 2 | 3 | 6 |
| **103** L'instruction `if x>1 and x<=7:` permet de tester si : | `x` est plus grand que 1 | `x` est plus petit que 7 | $1 < x \leqslant 7$ | $1 \leqslant x < 7$ |

Objectif 3

### 3 Manipuler les fonctions

**Dans les exercices 104 et 105 on considère la fonction ci-contre.**

```
def dist(v,t) :
    return v*t
```

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **104** Que renvoie `dist(130,1.5)` ? | `dist` | 130 | 1.5 | 195 |
| **105** Que renvoie `dist(-1,15)` ? | `erreur` | -1 | 15 | -15 |

Objectif 4

### 4 Manipuler les boucles

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **106** Quand on a l'instruction `for i in range(7,10):` `i` peut avoir pour valeur : | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **107** Dans l'instruction `while a**2<10:` la condition est vérifiée si `a` est égal à : | 1 | 5 | 7 | 10 |
| **108** En reprenant la fonction `dist` de l'objectif 3, lesquelles de ces valeurs sont affichées par ce programme ? | 800 | 1 000 | 1280 | 1 600 |

```
for t in range(10,20) :
    print(dist(80,t))
```

↪ Corrigés p. 390

# Préparer le contrôle — Je m'entraîne

## Parcours différenciés

| | Objectif 1 | Objectif 2 | Objectif 3 | Objectif 4 |
|---|---|---|---|---|
| Parcours A | 1 3 109 | 5 112 | 9 115 | 13 15 118 |
| Parcours B | 36 42 110 | 46 7 113 | 55 11 116 | 63 69 17 19 119 |
| Parcours C | 111 | 51 114 | 60 117 | 74 78 81 120 |

## EXERCICES

### Objectif 1 Manipuler les variables

**109** On souhaite écrire un programme avec des variables `pays`, `vaccins` et `temp` prenant respectivement pour valeurs le nom d'un pays, le nombre de vaccins obligatoires pour s'y rendre et sa température moyenne arrondie à 0,1 °C près.
Quel est le type de chacune de ces variables ?

**110** **1.** Quelles sont les valeurs de `a` et `b` en fin de programme ?
**2. a)** Dans la première ligne, par quoi faudrait-il remplacer `3` pour que la valeur de `b` soit `21` en fin de programme ?
**b)** Quelle conséquence cela aurait-il sur le type de la variable `a` ?

```
a=3
b=4
a=a+1
b=a*b
```

**111** `a=(x>3) or (x<-1)`. Que vaut `a` :
**a)** si `x=0` ? **b)** si `x=8` ? **c)** si `x=-7` ?

### Objectif 2 Manipuler les instructions conditionnelles

**112** On considère le programme suivant.

```
x=random.randint(-1,6)
y=x-3
if x*y < 0 :
    print(x,"et",y," : pas même signe")
else :
    print(x,"et",y," : même signe")
```

Quel sera l'affichage : **a)** si `x=1` ? **b)** si `x=6` ?

**113** Écrire un programme générant un nombre entier aléatoire `y` entre `12` et `20` et affectant ce nombre à la variable `c` s'il est inférieur à `15`, sinon affectant la moitié de `y` à `c`.

**114** Même question qu'à l'exercice précédent avec `c=y` si `y<15` ou `y>18` et `c=0` sinon.

### Objectif 3 Manipuler les fonctions

**115** On considère la fonction suivante.

```
def aire(b,h):
    if b<0 or h<0:
        a="impossible !"
    else:
        a=b*h
    return a
```

Que renvoie :
**a)** `aire(5,4)` ? **b)** `aire(7,-3)` ?

**116** Écrire une fonction retournant la fréquence d'une sous-population dans une population à partir de leurs effectifs, exprimée en %.

**117** La valeur absolue d'un nombre $x$ est le nombre $x$ lui-même s'il est positif et son opposé sinon. Écrire une fonction de paramètre `x` retournant sa valeur absolue.

### Objectif 4 Manipuler les boucles

**118** **1.** Quels affichages réalise le programme ci-contre ?
**2.** Simplifier ce programme.

```
for e in range(1,100) :
    if e>94 :
        print(2*e+1)
```

**119** On considère connue une fonction `sdb` telle que `sdb(surface)` donne une estimation du prix d'une salle de bains de `surface` $m^2$.
Écrire un programme affichant les estimations des prix des salles de bains de 1 $m^2$, 1,5 $m^2$, 2 $m^2$ ; etc. tant qu'il est inférieur à 6 000 €

**120** Écrire un programme permettant à un professeur de rentrer les notes de ses 35 élèves à un contrôle et calculant et affichant la moyenne à ce contrôle.

↪ Corrigés p. 390

# Travaux pratiques

40 min | Calculer | Raisonner

## 1 Mathématiques et langage Python

Dans le langage **Python**, certaines fonctionnalités mathématiques sont intégrées (par exemple `x**n` qui donne $x^n$), d'autres ne sont accessibles qu'en chargeant un module (ou bibliothèque).
Dans ce TP, nous nous intéresserons dans un premier temps aux fonctionnalités intégrées à **Python** puis au module `math` qui y ajoute des fonctionnalités.

### A ▸ Découverte des fonctions intégrées

**1. a)** Dans la console, saisir successivement, en validant à chaque fois `round(1/3,2)` ; `round(1/3,4)` ; `round(1/3,6)` ; et `round(38/7,5)`.
**b)** Que fait l'instruction `round(x,n)` ?

**2. a)** En posant la division, déterminer le quotient et le reste de 89 par 6.
**b)** Saisir successivement, en validant à chaque fois `89//6` et `89%6`.
**c)** Que semble faire les instructions `a//b` et `a%b` ? Contrôler avec un autre exemple.

### B ▸ Découverte du module `math`

Pour utiliser des instructions en lien avec le module `math`, on peut procéder de deux manières.
• Depuis la console : on y écrit `import math` et on valide.
On peut alors utiliser les instructions voulues (sans avoir à saisir de nouveau `import math`).
• Dans un programme : on écrit `import math` en début de programme.
On peut alors utiliser les instructions voulues dans la suite du programme.
Dans cette partie, on travaillera depuis la console.

**1.** Saisir `import math` dans la console et valider.

**2. a)** Saisir successivement, en validant à chaque fois, `math.sqrt(9)` ; `math.sqrt(100)` ; `math.sqrt(25)` ; `math.sqrt(3)` et `math.sqrt(17)`.
**b)** Que fait l'instruction `math.sqrt(x)` ?

**3. a)** Saisir `math.pi` et valider.
**b)** Que fait l'instruction `math.pi` ?

**4. a)** Saisir successivement, en validant à chaque fois, `math.gcd(12,8)` ; `math.gcd(35,14)` et `math.gcd(242,814)` ?
**b)** Que fait l'instruction `math.gcd(a,b)` ?

### C ▸ Applications

**1.** Faire une fiche sur les instructions vues dans les parties **A** et **B** de ce TP.

**Coup de pouce** Dans la suite, il ne faut pas hésiter à tester les fonctions écrites.

**2.** Écrire une fonction `simpli` dont les paramètres sont le numérateur et le dénominateur d'une fraction et qui affiche le numérateur et le dénominateur de la fraction sous forme irréductible.

**3.** Écrire une fonction `divi` dont les paramètres sont deux nombres et renvoyant un booléen `True` ou `False` selon que la valeur du premier paramètre est divisible ou non par la valeur du deuxième.

**4.** Écrire une fonction `hypo` dont les paramètres sont les longueurs des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle et qui renvoie la longueur de l'hypoténuse, arrondie à 0,001 près.

**5.** **Pour aller plus loin**
• La commande `math.acos(x)` donne l'angle dont le nombre `x` est le cosinus dans une unité que vous ne connaissez pas : le radian.
• La commande `math.degrees(a)` convertit l'angle `a` des radians aux degrés.
**a)** Écrire une fonction `inv_cos` dont le premier paramètre est la longueur du côté adjacent d'un angle d'un triangle rectangle et le deuxième la longueur de l'hypoténuse et qui retourne la mesure de l'angle en degrés.
**b)** Écrire de la même manière deux fonctions `inv_sin` et `inv_tan`.

45 min Modéliser Chercher

# 2 Comprendre les impôts

## A ▸ La commande `elif`

**1.** Écrire ou télécharger le programme ci-contre.

**CONSOLE PYTHON**
**Nombres à tester**
www.lienmini.fr/8270-py3

**2.** Tester plusieurs fois ce programme avec les valeurs de votre choix de sorte que le programme affiche au moins une fois chacun des mots **`super`**, **`génial`**, **`incroyable`** et **`fantastique`**.

**3.** Décrire l'affichage que réalisera le programme selon la valeur prise par **`a`**.

```
a=float(input("Saisir un nombre :"))
if a <0 :
    print("super")
elif a<5 :
    print("génial")
elif a<10 :
    print("incroyable")
else :
    print("fantastique")
```

**Coup de pouce** Attention, la phrase « Le programme affiche génial si a < 5 » est incorrecte, par exemple.

**4.** Que permet d'éviter l'utilisation de la commande **`elif`** ?

## B ▸ Calcul des impôts

On donne ci-contre deux infographies.

**1.** En effectuant les calculs, retrouver le montant total de l'impôt donné dans la 2e infographie.

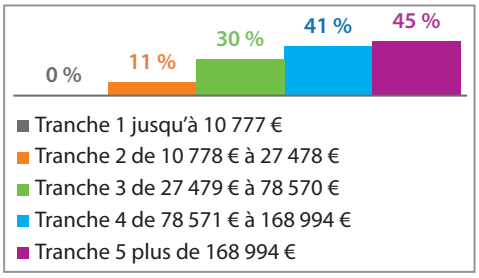
**2.** Le **revenu imposable** est calculé en retirant 10 % aux **revenus totaux** de l'année. Par exemple, si on a gagné 20 000 € alors le revenu imposable est de 20 000 – 2 000 = 18 000 €.
Dans l'exemple quel était le revenu total de la personne concernée ?

**Coup de pouce** Dans la suite ne pas hésiter à tester les fonctions écrites même si ce n'est pas demandé.

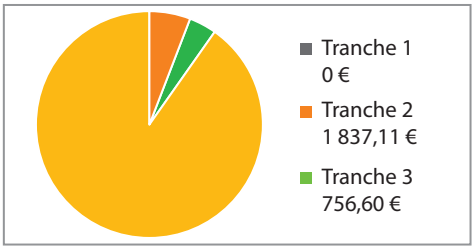
**3. a)** Écrire une fonction **`impot1`** dont le paramètre est **le revenu imposable** et qui retourne le montant de l'impôt à payer pour une personne célibataire.
**b)** Tester cette fonction avec l'exemple de début de partie **B**.

**4.** En **deux lignes**, écrire une fonction **`impot2`** dont le paramètre est **le revenu total** et qui retourne le montant de l'impôt à payer pour une personne célibataire.

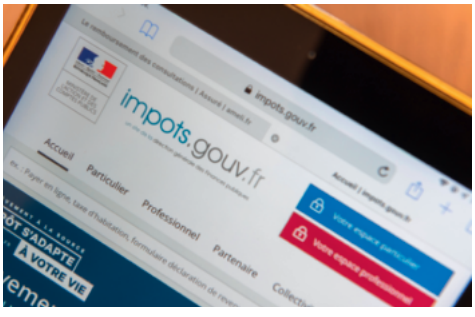
**5.** **Pour aller plus loin**
La situation est parfois plus complexe et fait intervenir ce que l'on appelle le quotient familial.
Par exemple, pour un couple marié ou pacsé avec deux enfants, le foyer dispose de 3 parts, une pour chaque parent et 2 demi-parts pour chaque enfant.
**a)** Mener une recherche sur le calcul de l'impôt dans ce cas où le quotient familial rentre en jeu et écrire une fonction **`impot3`** dont les paramètres sont le revenu total du foyer et le nombre de parts et qui retourne le montant de l'impôt à payer.
**b)** Mener une recherche sur le calcul du nombre de parts selon le nombre d'enfants et écrire une fonction **`impot4`** dont les paramètres sont le revenu total du foyer et le nombre **`n`** d'enfants et qui retourne le montant de l'impôt à payer pour un couple marié ou pacsé avec **`n`** enfants.




Le montant de l'impôt 2023 sur les revenus de 2022 est calculé sur la base de tranches correspondant à des taux d'imposition ( de 0 % à 45 %).
(*Source* : service public.fr, 2023)

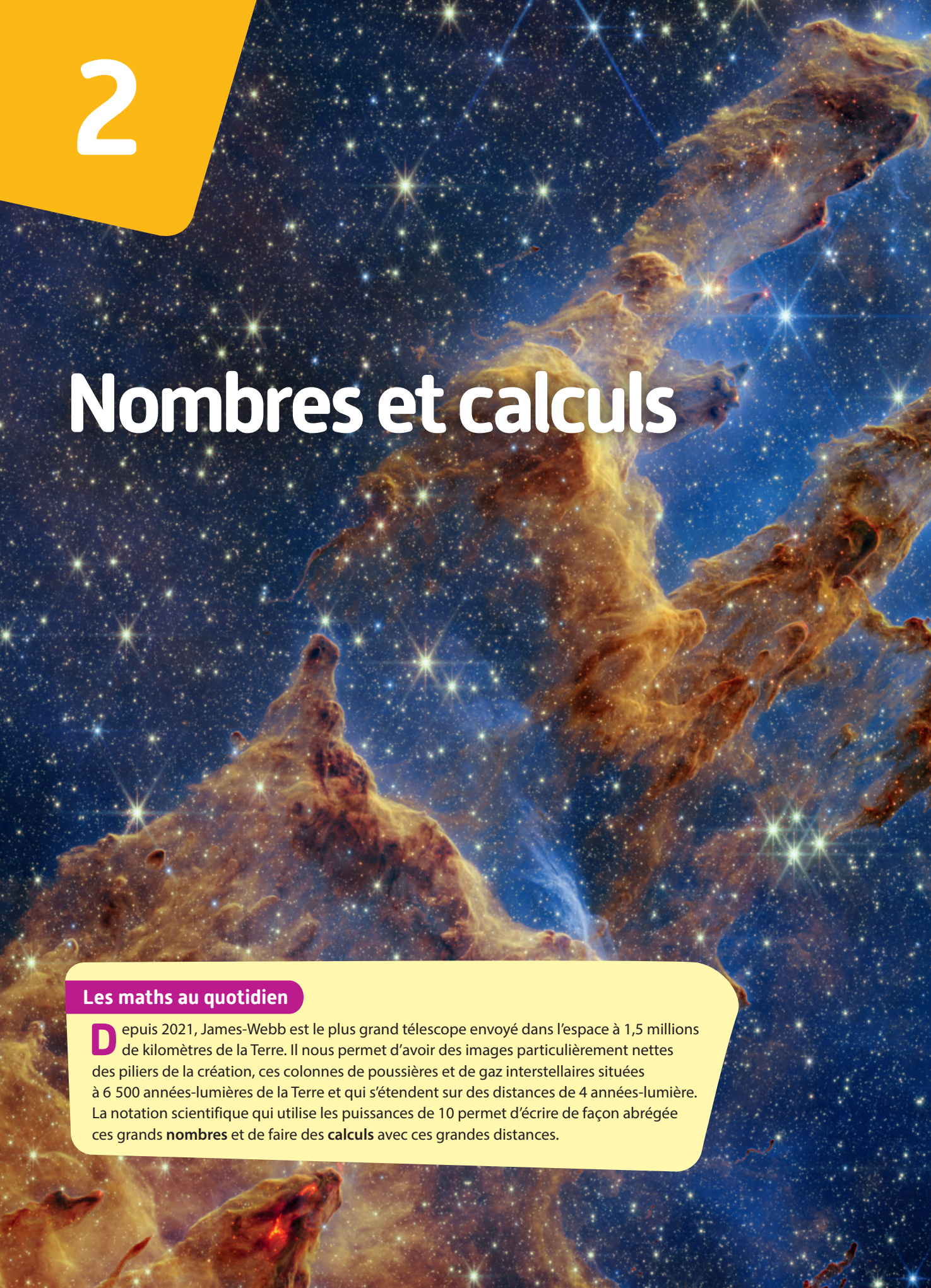



Calcul de l'impôt pour un célibataire (1 part) dont le revenu imposable est de 30 000 € :
le montant total de l'impôt est 2 593,71 €
soit 8,65 % du revenu imposable.
(*Source* : service public.fr, 2023)



2

# Nombres et calculs



## Les maths au quotidien

Depuis 2021, James-Webb est le plus grand télescope envoyé dans l'espace à 1,5 millions de kilomètres de la Terre. Il nous permet d'avoir des images particulièrement nettes des piliers de la création, ces colonnes de poussières et de gaz interstellaires situées à 6 500 années-lumières de la Terre et qui s'étendent sur des distances de 4 années-lumière. La notation scientifique qui utilise les puissances de 10 permet d'écrire de façon abrégée ces grands **nombres** et de faire des **calculs** avec ces grandes distances.

# Pour prendre un bon départ

EXERCICES Sésamath
Réviser ses acquis
www.lienmini.fr/8270-s4

## 1 Calculer avec la règle des signes et les priorités

Vu au collège

Calculer.

$A = -6 \times 7 + 2$ $B = 6 \times (-7) - 2$ $C = -6 + 7 \times 2$

$D = -6 - 7 \times 2$ $E = (-6) \times (-7) \times 2$ $F = -6 + 7 - 2$

## 2 Utiliser les puissances de 10

Vu au collège

**1.** Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule puissance de 10.

$F = 10^3 \times 10^{-4}$ $G = (10^{-1})^{-3}$ $H = \dfrac{10^{-2}}{10^2}$

$I = 10^2 \times 10^{-3} \times 10$ $J = 10\,000$ $K = \dfrac{1}{10^4}$

**2.** Donner l'écriture décimale des nombres suivants.

$L = 125 \times 10^2$ $M = 21{,}56 \times 10^{-1}$ $N = \dfrac{698}{10^3}$

## 3 Utiliser la racine carrée en géométrie

Vu au collège

Sachant que le triangle ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 et AC = 8, calculer la valeur exacte de BC.

## 4 Utiliser les critères de divisibilité

Vu au collège

**1.** Parmi les nombres 18 60 36 426 235 4 238 et 6 139, indiquer ceux qui sont divisibles :

**a)** par 2. **b)** par 3. **c)** par 5. **d)** par 9.

**2.** Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres précédents.

## 5 Connaître la division euclidienne

Vu au collège

Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne :

**a)** de 1 012 par 44 ? **b)** de 695 par 16 ?

## 6 Calculer avec des fractions

Vu au collège

Calculer.

$A = \dfrac{7}{3} + \dfrac{7}{5}$ $B = \dfrac{-7}{5} \times \dfrac{15}{-3}$ $C = 3 \times \dfrac{11}{15}$

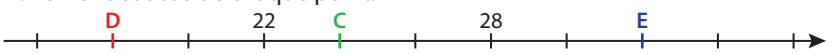
$D = \dfrac{-8}{5} - \dfrac{3}{10}$ $E = \dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{3}}$ $F = -\dfrac{\frac{-8}{4}}{3}$

## 7 Repérer des nombres sur une droite graduée

Vu au collège

**1.** Tracer une demi-droite graduée de 0 à 2 en prenant 12 carreaux pour une unité. Sur cette demi-droite, placer les points E, F, G et H d'abscisses respectives $\dfrac{7}{12}$, $\dfrac{7}{6}$, $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{4}{3}$.

**2.** Écrire l'abscisse de chaque point.




CORRIGÉS www.lienmini.fr/8270-4

# Activités

15 min

## 1 Calculer avec des puissances

**Dans toute l'activité $a$ désigne un nombre quelconque non nul.**

**1.** Calculer. **a)** $2^3$ **b)** $2^{-3}$ **c)** $-2^3$ **d)** $(-2)^3$ **e)** $(-2)^{-3}$

**Coup de pouce** $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \times a \times \ldots \times a}$

**2. a)** Recopier puis compléter les expressions suivantes.

$8^2 \times 8^3 = \underbrace{\underbrace{8 \times 8}_{\ldots \text{ facteurs}} \times \underbrace{8 \times 8 \times 8}_{\ldots \text{ facteurs}}}_{\ldots \text{ facteurs au total}} = 8^{\cdots}$

$7^5 \times 7^{-4} = \underbrace{7 \times \ldots \times 7}_{\ldots \text{ facteurs}} \times \underbrace{\frac{1}{7 \times \ldots \times 7}}_{\ldots \text{ facteurs}} = 7^{\cdots}$

**b)** Calculer de la même façon $a^5 \times a^8$ et $a^7 \times a^{-6}$.

**c)** Compléter alors la formule ci-contre. Pour tous nombres entiers $n$ et $p$, $a^n \times a^p = a^{\cdots}$

**3. a)** En s'inspirant de la question **2.** décomposer $\frac{6^5}{6^2}$ puis simplifier cette fraction en donnant le résultat sous la forme d'une puissance de 6.

**b)** Recommencer avec les fractions $\frac{13^7}{13^{-4}}$ et $\frac{a^{-3}}{a^2}$.

**c)** Compléter alors la formule : pour tous nombres entiers $n$ et $p$, $\frac{a^n}{a^p} = a^{\cdots}$.

**4. a)** Compter le nombre de facteurs 5 contenus dans l'écriture décomposée de $(5^2)^3$.

**b)** Combien aurait-on de facteurs $a$ dans $(a^3)^5$ ? Et dans $(a^5)^{-8}$ ?

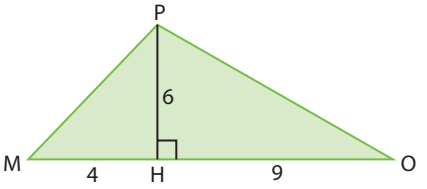
**c)** Compléter alors la formule ci-contre. Pour tous nombres entiers $n$ et $p$, on a $(a^n)^p = a^{\cdots}$.

↪ Cours 1 p. 48

15 min

## 2 Calculer le produit de deux racines carrées

**1. a)** Quelle est l'aire du triangle POM ?




**b)** Démontrer que POM est un triangle rectangle.

**c)** Calculer l'aire de ce triangle d'une autre manière.

**d)** En s'aidant des résultats trouvés aux questions **a)** et **c)**, écrire $\sqrt{117} \times \sqrt{52}$ sous la forme $\sqrt{c}$ où $c$ est un nombre entier.

**e)** Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 117 et de 52, en déduire celle de $117 \times 52$.

**f)** Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 6 084. En déduire un lien entre $\sqrt{117} \times \sqrt{52}$ et $\sqrt{117 \times 52}$.

**g)** Quelle conjecture peut-on formuler sur $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour tous nombres $a$ et $b$ positifs ?

**2.** On souhaite démontrer que $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour tous nombres $a$ et $b$ **positifs**. **Démo**
Pour cela, on va élever au carré chacun des termes de l'égalité.

**a)** Pourquoi $a$ et $b$ doivent-ils être positifs ?

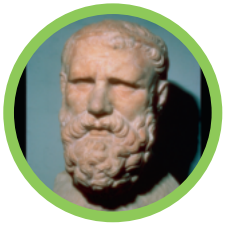
**b)** Calculer $\left(\sqrt{a \times b}\right)^2$ et $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2$ puis conclure.

**3.** **Pour aller plus loin** A-t-on $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ?
Justifier.

↪ Cours 2 p. 48

Algo 10 min

## 3 Le crible d'Ératosthène



Ératosthène
(vers III^e siècle av. J.-C.)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 |
| 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 |
| 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 |
| 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 |
| 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 |
| 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 |
| 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 |
| 97 | 98 | 99 | 100 | 101 | 102 |

**1. a)** Après avoir recopié le tableau ci-contre, rayer 1, entourer 2 puis rayer les multiples de 2.

**b)** Entourer le premier nombre suivant non rayé. Est-il premier ? Justifier.

**2. a)** Rayer les multiples de 3.

**b)** Entourer le premier nombre suivant non rayé. Est-il premier ? Justifier.

**3.** On continue d'appliquer cet algorithme jusqu'à épuisement des entiers de ce tableau.
Que peut-on dire de tous les nombres entourés ?

**4. a)** Dans quelle(s) colonne(s) se situent la majorité des nombres premiers ?

**b)** Tous les nombres de ces colonnes sont-ils des nombres premiers ?

**c)** **Pour aller plus loin** Prouver qu'un nombre premier différent de 2 et de 3 est de la forme $6k + 1$ ou $6k + 5$.

↪ Cours 3 p. 50

Logique & Démo 15 min

## 4 $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Nous allons démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.
Pour cela on suppose le contraire, c'est-à-dire que $\sqrt{2}$ peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible, et on montre que l'on aboutit à une contradiction.

On suppose que $\sqrt{2}$ peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs $p$ et $q$ :

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où $\frac{p}{q}$ est un quotient irréductible.

**1. a)** Démontrer que $2q^2 = p^2$. Alors $2q^2$ et $p^2$ devraient avoir le même chiffre des unités.

**b)** On étudie tous les cas possibles. Recopier et compléter les tableaux suivants.

| **Si le chiffre des unités de $p$ est :** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **alors le chiffre des unités de $p^2$ est :** | | | | | | | | | | |

| **Si le chiffre des unités de $q$ est :** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **alors le chiffre des unités de $q^2$ est :** | | | | | | | | | | |
| **et le chiffre des unités de $2q^2$ est :** | | | | | | | | | | |

**c)** En observant les tableaux précédents, quel(s) est (sont) le(s) chiffre(s) des unités possible(s) de $p$ et $q$ quand $2q^2 = p^2$ ?

**d)** Selon la question **c)**, peut-on simplifier $\frac{p}{q}$ ? Si oui, par quel nombre ?

**e)** Quelle est alors la contradiction ? Que peut-on en déduire pour le nombre $\sqrt{2}$ ?

**2.** **Pour aller plus loin** De même, montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

↪ Cours 4 p. 52

# 1 Puissances entières relatives

## Définitions Puissance d'un nombre

**Pour tout nombre entier $n$ positif non nul, pour tout nombre réel $a$ :**

- $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$
- Si $a$ est non nul, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$
- **Par convention, pour $a \neq 0$, on a $a^0 = 1$.**

**Exemples**

- $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$
- $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$
- $1997^0 = 1$

**Comment lit-on ?**

- $a^n$ se lit : « $a$ puissance $n$ ».
- $a^2$ se lit : « $a$ au carré ».
- $a^3$ se lit : « $a$ au cube ».

**Remarques**

- $n$ est appelé l'**exposant**.
- $a^1 = a$ et $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ qui est l'inverse de $a$.

## Propriétés Règles de calculs

**Pour tous nombres entiers $n$ et $m$ et tous nombres non nuls $a$ et $b$.**

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

↪ Méthode 1 p. 49

# 2 Racine carrée

## Définition Racine carrée d'un nombre positif

**La racine carrée d'un nombre positif $a$ est le nombre positif dont le carré est $a$. On le note $\sqrt{a}$ et on a : $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.**

**Comment lit-on ?**

$\sqrt{a}$ se lit : « racine carrée *de* $a$ ».

$\left(\sqrt{a}\right)^2$ se lit : « Racine de $a$ au carré ».

**Exemples**

- $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$ et 3 est positif.
- $\left(\sqrt{12,4}\right)^2 = 12,4$ car 12,4 est positif.

**Remarques**

- Le carré d'un nombre est toujours positif d'après la règle des signes. Donc lorsque $a$ est strictement négatif, $\sqrt{a}$ n'existe pas et n'a donc pas de sens.
- Quelques valeurs de racines carrées à connaître :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{0} = 0$ | $\sqrt{1} = 1$ | $\sqrt{4} = 2$ | $\sqrt{9} = 3$ | $\sqrt{16} = 4$ | $\sqrt{25} = 5$ |
| $\sqrt{36} = 6$ | $\sqrt{49} = 7$ | $\sqrt{64} = 8$ | $\sqrt{81} = 9$ | $\sqrt{100} = 10$ | $\sqrt{121} = 11$ |

## Propriétés Règles de calculs

- **Pour tout nombre $a$ positif : $\sqrt{a^2} = a$ et pour tout nombre $a$ négatif : $\sqrt{a^2} = -a$.**
- **Pour tous nombres positifs $a$ et $b$, on a : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.**
- **Pour tous nombres $a$ positifs et $b$ positifs non nuls : $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.**

**Exemples**

- $\sqrt{3,6^2} = 3,6$ car 3,6 est positif.
- $\sqrt{(-7)^2} = -(-7) = 7$ car $(-7)$ est négatif. En effet $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$.
- $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$ $\quad \sqrt{\dfrac{36}{25}} = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \dfrac{6}{5}$

**Remarque** Attention $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$, par exemple d'une part $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ et d'autre part $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

# Exercices résolus

## Méthode 1 Simplifier des calculs avec des puissances

### Énoncé

**Écrire les nombres suivants sous la forme $a^n$ où $a$ est un nombre et $n$ un entier.**

$A = (-3)^4 \times (-3)^{-7}$ $B = \dfrac{5{,}2^5}{5{,}2^2}$ $C = \dfrac{36^{-3}}{6^{-3}}$ $D = \left(x^{11}\right)^9$

### Solution

$A = (-3)^4 \times (-3)^{-7} = (-3)^{4+(-7)} = (-3)^{-3}$ (1)

$B = \dfrac{5{,}2^5}{5{,}2^2} = 5{,}2^{5-2} = 5{,}2^3$ (2)

$C = \dfrac{36^{-3}}{6^{-3}} = \left(\dfrac{36}{6}\right)^{-3} = 6^{-3}$ (3)

$D = \left(x^{11}\right)^9 = x^{11\times 9} = x^{99}$ (4)

### Conseils & Méthodes

1. On reconnaît $a^n \times a^m$ : on additionne les exposants.
2. On reconnaît $\dfrac{a^n}{a^m}$ : on soustrait les exposants
3. On reconnaît $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ : on divise les puissances.
4. On reconnaît $(a^n)^m$ : on multiplie les exposants.

### À vous de jouer !

**1** Écrire les nombres suivants sous la forme $a^n$ où $a$ est un nombre et $n$ un entier.

$E = 6^{-14} \times 6^8$ $F = \dfrac{(-49)^{-5}}{(-7)^{-5}}$ $G = \left(5{,}6^7\right)^{-3}$ $H = \dfrac{1235^{15}}{1235^{-13}}$

**2** Écrire les nombres suivants sous la forme $a^n$ où $a$ est un nombre et $n$ un entier.

$I = 5^{78} \times 2^{78}$ $J = \left(12^{-3}\right)^{-8}$ $K = \dfrac{2^3 \times 7^4}{14^3}$ $L = (-7)^2 \times (-3)^2$

Exercices 62 à 74 p. 57

## Méthode 2 Écrire une racine sous la forme $a\sqrt{b}$

VIDÉO ALL MATHS PARNAK
Comprendre une méthode
www.lienmini.fr/8270-5

### Énoncé

**Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a$ et $b$ entiers, $b$ étant le plus petit possible. a) $\sqrt{45}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{20}$ d) $\sqrt{72}$ e) $\sqrt{300}$**

### Solution

**a)** $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5}$ (1)
$= \sqrt{3^2 \times 5}$ (2)
$= \sqrt{3^2} \times \sqrt{5}$ (3)
$= 3\sqrt{5}$ (4)

**b)** $\sqrt{18} = \sqrt{3 \times 6} = \sqrt{3 \times 3 \times 2} = \sqrt{3^2}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

**c)** $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{2^2 \times 5} = 2\sqrt{5}$

**d)** $\sqrt{72} = \sqrt{9 \times 8} = 3\sqrt{8} = 3\sqrt{2^2 \times 2} = 3 \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

**e)** $\sqrt{300} = \sqrt{3 \times 10^2} = 10\sqrt{3}$

### Conseils & Méthodes

1. On fait apparaître le produit d'un carré parfait (le plus grand possible) par un entier.
2. On applique $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour $a$ et $b$ positifs.
3. On utilise $\sqrt{a^2} = a$ pour $a$ positif.
4. Quand on a fini d'appliquer la méthode, on vérifie qu'on ne peut pas la réappliquer pour simplifier encore le nombre sous la racine.

### À vous de jouer !

**3** Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{6}$ avec $a$ entier.

**a)** $\sqrt{150}$ **b)** $\sqrt{216}$ **c)** $\sqrt{726}$

**4** Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{3}$ avec $a$ entier.

**a)** $\sqrt{108}$ **b)** $\sqrt{27}$ **c)** $\sqrt{363}$

**5** Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a$ et $b$ entiers, $b$ étant le plus petit possible.

**a)** $\sqrt{63}$ **b)** $\sqrt{99}$ **c)** $\sqrt{50}$

**6** Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a$ et $b$ entiers, $b$ étant le plus petit possible.

**a)** $\sqrt{12}$ **b)** $\sqrt{80}$ **c)** $\sqrt{384}$

Exercices 81 à 95 p. 58

# 3 Multiples, diviseurs et nombres premiers

## Définitions Multiples et diviseurs

**Soit $a$ et $b$ deux nombres entiers. S'il existe un nombre entier $k$ tel que $a = b \times k$, on dit que :**
- **$b$ divise $a$ ou que $b$ est un diviseur de $a$ ou que $a$ est divisible par $b$**
- **$a$ est un multiple de $b$**

**Exemple** $44 = 4 \times 11$ donc on peut dire que :
- 4 et 11 sont des diviseurs de 44,
- 44 est un multiple de 4,
- 11 divise 44.

**Remarques**
- $b$ est un diviseur de $a$ lorsque le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$ est égal à 0.
- 1 et $n$ sont des diviseurs de $n$, pour tout entier $n$ non nul.

## Définitions Nombres pairs et nombres impairs

**Soit $n$ un nombre entier.**
- **$n$ est pair si et seulement s'il existe un entier $k$ tel que $n = 2k$.**
- **$n$ est impair si et seulement s'il existe un entier $k$ tel que $n = 2k + 1$.**

**Remarque** Un nombre pair est un nombre divisible par 2. Un nombre impair est un nombre qui n'est pas pair.

**Exemples**
- $17 = 2 \times 8 + 1$ donc 17 est impair.
- $66 = 2 \times 33$. On sait que 66 est divisible par 2 donc il est pair.

## Propriété Fraction irréductible

**Une fraction est irréductible lorsque le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux, c'est-à-dire s'ils n'ont pas de diviseur commun autre que 1.**

**Exemple** $\dfrac{4\,312}{1\,008} = \dfrac{2^3 \times 7^2 \times 11}{2^4 \times 3^2 \times 7} = \dfrac{7 \times 11}{2 \times 3^2} = \dfrac{77}{18}$. La fraction $\dfrac{77}{18}$ est irréductible.

## Définition Nombre premier

**Un nombre premier est un nombre entier qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.**

**Remarques**
- 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur, lui-même.
- Les dix premiers nombres premiers sont : 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29.

On peut trouver les suivants à l'aide du crible d'Eratosthène ↪ Activité 3 p.47

## Propriété Test de primalité

**Soit $n$ un nombre entier supérieur ou égal à 2. Si $n$ n'admet pour diviseurs aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$, alors $n$ est un nombre premier.**

**Exemple** 373 n'est pas divisible par 2, par 3, par 5, par 7, par 11, par 13 et par 17 qui sont les nombres premiers plus petit que $\sqrt{373} \approx 19{,}3$. Donc 373 est donc un nombre premier.

## Propriété Unicité de la décomposition

**La décomposition en produit de facteurs premiers est unique (à l'ordre des facteurs près).**

**Exemple** $12 = 2 \times 2 \times 3$ et on ne peut pas écrire autrement 12 comme un produit de nombres premiers.

# Exercices résolus

## Méthode 3 Démontrer à l'aide de l'écriture littérale

**Énoncé**

**Montrer que le carré de tout nombre pair est pair.**

**Solution**

Soit $n$ un nombre pair, alors il existe un entier $k$ tel que $n = 2 \times k$. (1)

$n^2 = (2k)^2 = 2^2 \times k^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$ (2)

Comme $k$ est un entier, $2k^2$ est également un entier donc $n^2$ est pair.

**Conseils & Méthodes**

1. On écrit le nombre sous la forme littérale donnée dans la définition des multiples, diviseurs, pair et impair.
2. On reconnaît ici l'écriture littérale d'un nombre pair.

### À vous de jouer !

**7** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

**a)** La somme de deux nombres impairs est un nombre impair.

**b)** La somme de deux nombres pairs est un nombre pair.

**c)** La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre pair.

**8** Soit $a$ un nombre entier.
Montrer que la somme de deux multiples de $a$ est un multiple de $a$.

**9** Démontrer que si $a^2$ est pair alors $a$ est pair à l'aide de la contraposée.

↪ Exercices 109 à 117 p. 60

## Méthode 4 Déterminer si un nombre est premier

**Énoncé**

**1. 503 est-il divisible :**

**a) par 2?** **b) par 3 ?** **c) par 5 ?**

**2. a) Donner la liste des nombres premiers inférieurs à $\sqrt{503}$.**

**b) Montrer que 503 est un nombre premier.**

**3. 323 est-il un nombre premier ?**

**Solution**

**1. a)** 503 n'est pas divisible par 2 car il n'est pas pair.

**b)** 503 n'est pas divisible par 3 car 5 + 0 + 3 = 8 et 8 n'est pas un multiple de 3.

**c)** 503 n'est pas divisible par 5 car son chiffre des unités n'est ni 0 ni 5.

**2. a)** $\sqrt{503} \approx 22{,}4$. Les nombres premiers inférieurs à 22 sont :

2 3 5 7 11 13 17 et 19 (1)

**b)** 503 n'est divisible ni par 7, ni par 11, ni par 13, ni par 17 et ni par 19 car le reste de la division euclidienne de 503 par chacun de ces nombres est non nul. (2)
Donc 503 est un nombre premier.

**3.** $\sqrt{323} \approx 17{,}9$ et $\frac{323}{17} = 19$. (3)
Donc 323 n'est pas un nombre premier car il est divisible par 17 (et par 19).

**Conseils & Méthodes**

1. D'après le test de primalité, il suffit de tester tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{503}$ en tant que diviseurs de 503.
2. Le quotient de 503 par 7 n'est pas un nombre entier donc 503 n'est pas divisible par 7.
Il en est de même avec les nombres premiers suivants.
3. Il suffit de trouver un diviseur autre que 323 pour montrer que 323 n'est pas premier.

### À vous de jouer !

**10** Montrer que 487 est un nombre premier.

**11** Prouver que 301 n'est pas un nombre premier.

**12** Parmi les nombres suivants, lesquels sont premiers ?
39 53 79 119 209.

↪ Exercices 118 à 124 p. 60

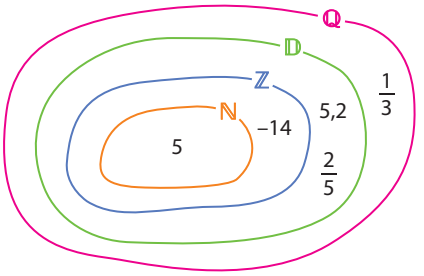
# 4 Ensembles de nombres

## Définition Nombres entiers naturels, relatifs, décimaux et rationnels

**• L'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$, est l'ensemble des entiers positifs : $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \ldots\}$.**
**• L'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, est l'ensemble des entiers positifs ou négatifs : $\mathbb{Z} = \{\ldots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\}$.**
**• L'ensemble des nombres décimaux, noté $\mathbb{D}$, est l'ensemble des quotients qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a$ un entier relatif et $n$ un entier positif.**
**• L'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec $a$ un entier relatif, $b$ un entier relatif non nul.**

**Remarques**
• Un nombre décimal a une écriture décimale finie.
• Tout entier naturel est un entier relatif, tout entier est un nombre décimal et tout nombre décimal est un nombre rationnel. Les ensembles sont inclus les uns dans les autres. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

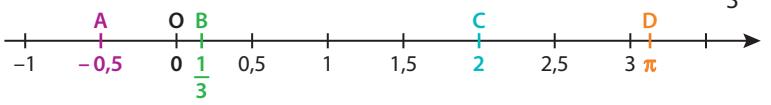
**Exemples**
• $5 \in \mathbb{N}$ et $5 \in \mathbb{Z}$.
• $5{,}2 = \frac{52}{10^1}$ donc $5{,}2 \in \mathbb{D}$ et $5{,}2 \in \mathbb{Q}$.
• $-14 \notin \mathbb{N}$ mais $-14 \in \mathbb{Z}$.
• $\frac{2}{5} \in \mathbb{Q}$ par définition et $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ donc $\frac{2}{5} \in \mathbb{D}$.
• $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ mais $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$. ➜ Méthode 5 p. 53




## Définition Nombres réels, nombres rationnels

**Soit une droite munie d'une origine O et d'une graduation.**
**• L'ensemble des abscisses des points de l'axe ainsi défini s'appelle l'ensemble des nombres réels et se note $\mathbb{R}$. Un tel axe est appelé droite des réels.**
**• Les nombres réels qui n'appartiennent pas à l'ensemble des nombres rationnels sont appelés irrationnels.**

**Exemple** On a placé les points A, B, C et D d'abscisses respectives $-0{,}5$ ; $\frac{1}{3}$ ; 2 et $\pi$.




## Propriété Nombres irrationnels

**• $\pi$ est irrationnel. (Admis)**
**• Soit $n$ un entier. Si $n$ est un carré parfait alors $\sqrt{n}$ est entier, sinon $\sqrt{n}$ est irrationnel.**

**Exemples**
• $\sqrt{16} = 4$ donc $\sqrt{16} \in \mathbb{N}$.
• $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

## Définition Encadrement d'un réel

**Soit $n \in \mathbb{Z}$. Donner un encadrement décimal d'un réel $x$ à $10^{-n}$ près (ou d'amplitude $10^{-n}$), c'est donner deux nombres décimaux $a$ et $b$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $b - a = 10^{-n}$.**

**Exemple** Un encadrement de $\pi$ à $10^{-3}$ près est $3{,}141 \leqslant \pi \leqslant 3{,}142$.

# Exercices résolus

## Méthode 5 Déterminer si un nombre est décimal

**Énoncé**

**Les nombres $\frac{785}{16}$ et $\frac{8}{7}$ sont-ils décimaux ?**

**Solution**

- $\frac{785}{16} = 49{,}062\,5 = \frac{490\,625}{10^4}$ donc $\frac{785}{16}$ est décimal. (1)
- $\frac{8}{7} \approx 1{,}14\ldots$ L'écriture décimale ne se termine pas.

Si $\frac{8}{7}$ est décimal, il existe des entiers $a$ et $n$ tels que $\frac{8}{7} = \frac{a}{10^n}$.
On a alors $7a = 8 \times 10^n$.
L'unique décomposition (2) en produit de facteurs premiers de $8 \times 10^n$ est $2^3 \times (2 \times 5)^n$, elle ne contient que des 2 et des 5 tandis que l'unique décomposition en produit de facteurs premiers de $7 \times a$ contient 7 car 7 est premier.
On obtient donc une contradiction (3) car nous obtenons deux décompositions différentes, donc notre supposition est fausse : $\frac{8}{7}$ n'est pas décimal.

**Conseils & Méthodes**

(1) Un nombre est décimal s'il s'écrit sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a$ et $n$ entiers.

(2) Tout entier naturel peut se décomposer de manière unique en produit de facteurs premiers.

(3) Voir le raisonnement par l'absurde p. 388.

### À vous de jouer !

**13** Montrer que $\frac{5}{7}$ n'est pas un nombre décimal.

**14** Montrer que les nombres suivants sont des décimaux.

$-5$ $\quad \frac{7}{2}$ $\quad 0{,}034$ $\quad 7\,584\,000$

↪ Exercices 125 à 136 p. 61

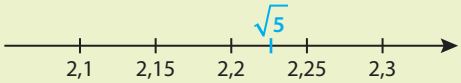
## Méthode 6 Donner un encadrement d'un réel

**Énoncé**

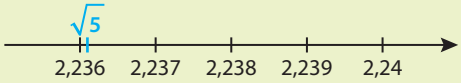
**Placer sur une droite graduée $\sqrt{5}$ puis en donner un encadrement à $10^{-1}$ et $10^{-3}$ près.**

**Solution**

À l'aide de la calculatrice, on obtient $\sqrt{5} \approx 2{,}236\,067\,978$.




L'encadrement à $10^{-1}$ près est (1) $2{,}2 \leqslant \sqrt{5} \leqslant 2{,}3$. (2)




L'encadrement à $10^{-3}$ près est (3)
$2{,}236 \leqslant \sqrt{5} \leqslant 2{,}237$. (4)

**Conseils & Méthodes**

(1) On obtient le plus petit nombre d'un encadrement à $10^{-1}$ en tronquant à 1 chiffre après la virgule, c'est-à-dire en retirant les décimales après la première.

(2) Le deuxième nombre de l'encadrement s'obtient en ajoutant $10^{-1} = 0{,}1$ au premier.

(3) On obtient le plus petit nombre d'un encadrement à $10^{-3}$ en tronquant à 3 chiffres après la virgule, c'est-à-dire en retirant les décimales après la troisième.

(4) Le deuxième nombre de l'encadrement s'obtient en ajoutant $10^{-3} = 0{,}001$ au premier.

### À vous de jouer !

**15** Donner un encadrement de $\frac{10}{7}$ :

**a)** à $10^{-1}$ près. **b)** à $10^{-2}$ près. **c)** à $10^{-3}$ près.

**16** Donner un encadrement d'amplitude $10^{-2}$ des nombres suivants.

**a)** $7{,}456\,8$ **b)** $\frac{5}{9}$ **c)** $2{,}24 \times 10^{-2}$

↪ Exercices 137 à 141 p. 61

# Exercices résolution de problèmes

## J'apprends à rédiger une solution

**Réflexe 1**
Vérifier les conditions d'application d'une propriété ou les éléments d'une définition.

**Réflexe 2**
S'assurer dans la rédaction que ces conditions sont vérifiées.

**Réflexe 3**
Utiliser les bonnes implications logiques pour lier les différents éléments de la réponse dans la rédaction finale.

### ▶ Énoncé

**Démontrer que si un entier est multiple de 18 alors il est aussi multiple de 3 et de 6.**

### ▶ Solution commentée

**Étape 1**

Je remarque les connecteurs logiques SI et ALORS qui permettent d'identifier « ce que l'on sait » et « ce qu'il faut démontrer ».
Il s'agit de démontrer qu'un nombre entier $N$ est un multiple soit de 3 et de 6.
Ce qui se traduit par écrire l'entier sous la forme $3k'$ et $6k''$, où $k'$ et $k''$ sont entiers.

**Étape 2**

Je sais que cet entier $N$ est un multiple de 18, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k$ tel que $N = 18k$ et $18k = 3 \times 6 \times k$. **Réflexe 1**
Il faut donc identifier $k'$ et $k''$ et vérifier que ce sont des entiers. **Réflexe 2**

*Réponse rédigée*

Soit $N$ un entier multiple de 18.
Il existe un entier $k$ tel que $N = 18k$.
Or $18 = 3 \times 6$ donc $N = 3 \times 6 \times k$.
• On pose $k' = 6k$.
On a $N = 3 \times k'$.
$k$ étant entier, $k'$ est aussi entier. **Réflexe 3**
Donc $N$ est un multiple de 3.
• En posant $k'' = 3k$, on a aussi $N = 6 \times k''$.
$k$ étant entier, $k''$ est aussi entier. **Réflexe 3**
Donc $N$ est un multiple de 6.
On a bien montré que $N$ est un multiple de 3 et de 6.
Ainsi, si $N$ est un multiple de 18, c'est aussi un multiple de 3 et de 6. **Réflexe 3**

## Je m'entraîne à rédiger une solution

### 17 Produit et somme de multiples

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
**a)** Le produit de deux multiples de 4 est un multiple de 16.
**b)** La somme de deux multiples de 4 est un multiple de 4.
**c)** La somme de deux multiples de 4 est un multiple de 16.

### 18 Différences

Démontrer que si deux entiers sont divisibles par 9 alors leur différence est également divisible par 9.

### 19 Réciproque

1. Démontrer que si un entier est multiple de 15 alors il est aussi multiple de 3 et de 5.
2. La réciproque semble-t-elle vraie ?

### 20 Multiples de 17

Sachant que 221 est divisible par 17, prouver que 442 et 22 100 sont également divisibles par 17.

### 21 Divisibilité d'une somme

Montrer que si deux nombres $a$ et $b$ sont deux entiers divisibles par 7, alors leur somme $a + b$ est également divisible par 7.

### 22 Double et parité

**a)** Montrer que le double d'un nombre pair est un nombre pair.
**b)** Quelle est la parité du double d'un nombre impair ? Justifier

### 23 Triple et parité

Étudier la parité du triple d'un nombre en étudiant d'abord le cas d'un nombre pair puis celui d'un nombre impair.

# Exercices automatismes

## Rituel 1

### Effectuer des calculs simples avec des décimaux

**24** Calculer.
**a)** $478 \times 100$ **b)** $47{,}8 \times 10$ **c)** $0{,}478 \times 10\,000$

**25** Calculer.
**a)** $125 \div 1\,000$ **b)** $12{,}5 \div 100$ **c)** $0{,}125 \div 10$

**26** Calculer.
**a)** $426{,}5 \times 0{,}01$ **b)** $4{,}59 \times 0{,}001$ **c)** $654 \times 0{,}1$

**27** Calculer.
**a)** $987 \div 0{,}1$ **b)** $56{,}4 \div 0{,}01$ **c)** $0{,}003 \div 0{,}001$

### Utiliser un ordre de grandeur pour contrôler un résultat

**28** De quelle puissance de 10 les nombres suivants sont-ils les plus proches ?
**a)** 98,745 **b)** 87 000 **c)** 0,032 5

**29** Donner sans calculatrice un ordre de grandeur du tiers de 954.

## Rituel 2

### Passer d'une écriture à une autre

**30** Donner l'écriture décimale de :
**a)** $5 \times 10^3$ **b)** $0{,}032 \times 10^2$ **c)** $85 \times 10^{-4}$

**31** Écrire sous forme de fraction décimale.
**a)** 0,125 **b)** 2,86 **c)** 0,75
**d)** 0,007 **e)** 967,2 **f)** 23,87

**32** Écrire sous forme d'une puissance de 10.
**a)** $10^5 \times 10^{-3}$ **b)** $\dfrac{10^6}{10^{-2}}$ **c)** $(10^{-1})^4$

### Effectuer une application numérique d'une formule mathématique

**33** Soit $n$ un nombre défini par $n = 2k + 1$.
Quelles sont les valeurs prises par $n$ lorsque $k$ prend ses valeurs dans l'ensemble $\{-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}$ ?

**34** Soit $x$ un nombre défini par $x = a \times 10^n$.
Quelles sont les valeurs prises par $x$ lorsque $a = 456{,}87$ et $n$ prend ses valeurs dans l'ensemble $\{-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}$ ?

## Rituel 3

### Effectuer des calculs simples avec des fractions

**35** Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.
**a)** $\dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{2}$ **b)** $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2}$ **c)** $\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{2}$ **d)** $\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}$

**36** Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.
**a)** $-5 - \dfrac{2}{3}$ **b)** $-5 \times \dfrac{-2}{3}$ **c)** $-\dfrac{5}{-\frac{2}{3}}$

### Résoudre une équation du premier degré

**37** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
**a)** $5x - 4 = 2x + 3$ **b)** $x + 13{,}5 = 3x - 6{,}5$

**38** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
**a)** $\dfrac{21}{5}x = 3$ **b)** $-2x = \dfrac{18}{4}$

**39** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
**a)** $-x - 5 = -12$ **b)** $169 = \dfrac{13}{x}$

## Rituel 4

### Repérer un nombre rationnel sur une droite graduée

**40** Recopier la droite graduée suivante puis placer les points A, B et C d'abscisses respectives $\dfrac{19}{6}$, $\dfrac{10}{3}$ et $\dfrac{25}{6}$.

**41** Donner l'abscisse des points P, Q et R sous forme de fractions.

### Effectuer des calculs simples avec des décimaux

**42** Calculer.
**a)** $70 \times 70$ **b)** $0{,}3 \times 0{,}3$ **c)** $0{,}08 \times 0{,}08$

**43** Calculer.
**a)** $0{,}325 \times 2$ **b)** $1\,646 \times 0{,}5$ **c)** $4{,}21 \times 3$

Travaillez les méthodes des automatismes p. 8

# Exercices d'entraînement

## Je consolide mes acquis

### 44 Calculs

Calculer.

$A = -3 \times 7 + 5$ $B = 5 \times (-8) - 3$

$C = -6 + 4 \times 2$ $D = -1 - 7 \times 9$

$E = (-3) \times (-7) \times 2 \times (-5)$ $F = 3 - 5 \times (-8)$

### 45 Multiplier par une puissance de 10

Donner l'écriture décimale des nombres suivants.

$L = 963 \times 10^{-2}$ $M = 5{,}412 \times 10^{4}$

$N = 0{,}00\,123 \times 10^{3}$ $P = 7\,800 \times 10^{-1}$

### 46 Critères de divisibilité

Donner deux nombres entiers qui soient divisibles :

**a)** par 2 et par 3. **b)** par 2 et par 5.

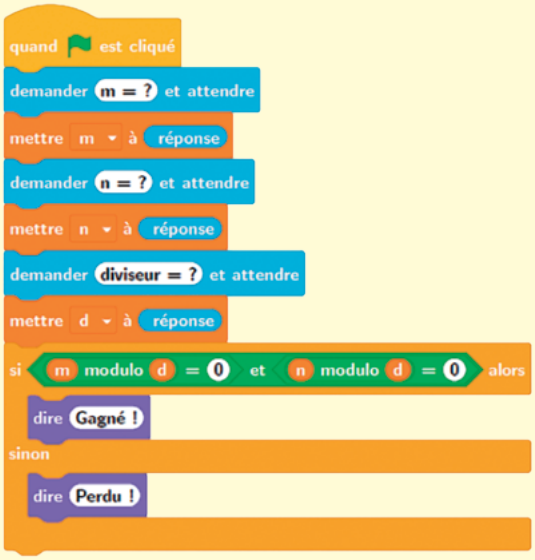
**c)** par 9. **d)** par 10.

### 47 Division euclidienne

On donne l'égalité $573 = 25 \times 22 + 23$.

Sans faire de division, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 573 par 25, puis de la division euclidienne de 573 par 22.

### 48 Scratch




**1.** Tester à la main le script pour $m = 6$, $n = 9$ et $d = 5$ puis pour $m = 6$, $n = 9$ et $d = 3$.

**2.** À quoi sert ce script ?

### 49 Produit de facteurs premiers

Décomposer chacun des nombres suivants en produit de facteurs premiers.

**a)** 2 835 **b)** 1 323 **c)** 1 001 **d)** 45 600

### 50 Théorème de Pythagore

Le triangle DEF est rectangle en E avec EF = 15 et DF = 24. Donner la valeur exacte de DE. Justifier.

## Fractions

### 51

Effectuer les sommes suivantes.

$A = -\frac{12}{7} + \frac{5}{14}$ $B = \frac{8}{35} + \frac{6}{105}$ $C = \frac{23}{26} - \frac{12}{260}$ $D = -\frac{5}{32} - \frac{3}{8}$

### 52

Effectuer les produits suivants.

$E = \frac{10}{15} \times \frac{7}{20}$ $F = -\frac{5}{12} \times \frac{18}{13}$

$G = 3 \times \left(-\frac{7}{9}\right)$ $H = -\frac{63}{30} \times \frac{60}{-42}$

### 53

Effectuer les divisions suivantes.

$M = \dfrac{\frac{21}{-24}}{\frac{14}{-32}}$ $N = \dfrac{\frac{45}{18}}{12}$ $P = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}}$

### 54

Effectuer les calculs suivants.

$R = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{5}{2}$ $S = \dfrac{1+\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}}$ $T = \frac{4}{5} \times \frac{11}{6} + \frac{1}{5}$ $U = \dfrac{\frac{7}{9}}{\frac{1}{3} - 2}$

### 55

Calculer les expressions suivantes.

$$A = \frac{\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right)\left(1-\frac{5}{5}\right)}{3}$$

$$B = \frac{25}{8} \times \frac{\left(\frac{23}{4} - 13 \times \frac{27}{19}\right)}{\frac{23}{4} - 13 \times \frac{27}{19}} \div \frac{25}{8}$$

$$C = \cfrac{12}{9 + \cfrac{8}{7 + \cfrac{6}{5 + \cfrac{4}{3 + \cfrac{2}{1+1}}}}}$$

$$D = \left(2 + \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2 + \frac{3}{4}} - \frac{\frac{3}{7} - \frac{8}{9}}{\frac{8}{9} - \frac{3}{7}}$$

### 56

Esteban a demandé un ordinateur pour son anniversaire. Ses parents sont d'accord pour lui offrir s'il paye $\frac{1}{3}$ du prix. Ses trois oncles payent chacun $\frac{1}{12}$ de l'ordinateur. Le reste est payé par ses parents. Quelle fraction de l'ordinateur les parents d'Esteban ont-ils payée ?

### 57

Papi Michel a cuisiné des cookies, les deux tiers sont aux noisettes. Tigane mange la moitié de ceux aux noisettes et seulement un quart des autres. Quelle fraction des cookies a-t-il mangée ? Quelle fraction reste-t-il ?

## Questions de cours

**58** **1.** Comment multiplie-t-on deux puissances de même exposant ?
**2.** Comment divise-t-on $3^5$ par $3^2$ ?
**3.** Soit un nombre $a$ positif, quelle est la définition de la racine de $a$ ?

**59** **1.** Quels sont les carrés parfaits compris entre 1 et 144 ?
**2.** Quelle est la formule du produit de deux racines ?

**60** Donner la définition d'un nombre pair, d'un nombre impair et d'un nombre premier.

**61** Répondre aux affirmations suivantes en justifiant.
**1.** Un entier relatif est-il un rationnel ?
**2.** Un nombre décimal est-il un réel ?
**3.** Un entier est-il un nombre décimal ?
**4.** Un nombre réel est-il un nombre rationnel ?
**5.** Un rationnel est-il un nombre décimal ?

## Puissances

Méthode 1 p. 49

**62** Écrire les nombres suivants sous la forme d'un produit de puissances de 2, de 3 et de 7.
$A = 2\times2\times2\times3\times7\times7$ $B = 12\times21\times49$
$C = 32\times21\times12$ $D = 42$
$E = \dfrac{2\times3\times7}{3\times3\times7\times7}$ $F = \dfrac{1}{49\times32\times27}$

**63** Recopier et compléter.
**a)** $17^{-5} = \dfrac{1}{17^{\cdots}}$ **b)** $6^{\cdots} = \dfrac{1}{6^6}$
**c)** $8^{-7} = \dfrac{1}{8^{\cdots}}$ **d)** $\dfrac{1}{9^{\cdots}} = 9^{-23}$

**64** Parmi les nombres suivants, lesquels sont positifs ?
$2^{-3}$ $(-5)^2$ $(-4)^{-4}$ $-6^5$ $(-1{,}2)^6$ $-0{,}6^{-7}$

**65** Écrire sous la forme $a^n$, où $a$ est un nombre relatif et $n$ est un entier relatif.
**a)** $5^2\times5^4$ **b)** $6^5\times6^{-8}$ **c)** $3^4\times5^4$
**d)** $2{,}5^{-7}\times4{,}2^{-7}$ **e)** $-4\times(-4)^{-7}$ **f)** $8^0\times8^3$

**66** Écrire sous la forme $a^n$, où $a$ est un nombre relatif et $n$ est un entier relatif.
**a)** $\dfrac{3^8}{3^{-4}}$ **b)** $\dfrac{6^5}{3^5}$
**c)** $\dfrac{4^6}{4^2}$ **d)** $\dfrac{(-4{,}5)^4}{3^4}$
**e)** $\dfrac{9^{-3}}{(-2{,}5)^{-3}}$ **f)** $\dfrac{3{,}2^{-5}}{3{,}2^{-2}}$

**67** Écrire sous la forme d'une seule puissance.
**a)** $2{,}8\times2{,}8^{-3}$ **b)** $\dfrac{5^{-2}}{5^{-4}}$ **c)** $((-3{,}7)^{-2})^5$ **d)** $\dfrac{7^{-3}}{2^{-3}}$
**e)** $((5{,}6)^{-4})^{-2}$ **f)** $10^7\times10^{-7}$ **g)** $\dfrac{(-4{,}2)^{-5}}{(-3)^{-5}}$ **h)** $5{,}3^{-6}\times4^{-6}$

**68** Écrire sous la forme d'une seule puissance.
**a)** $8\times\dfrac{8^{-3}}{8^2}$ **b)** $\dfrac{(-5)^3\times8^3}{4^3}$
**c)** $\left(\dfrac{6^5}{6^2}\right)^{-4}$ **d)** $(7{,}5^{-2}\times7{,}5^6)^4$

**69** Simplifier, si possible, les expressions suivantes où $x$ et $y$ sont des nombres non nuls.
$I = \dfrac{x^5y^8}{x^5y^3}$ $J = (x^{-2})^{-8}$ $K = x^{14}y^{14}$
$L = (-x)^3(-y)^4$ $M = x^2 + y^2$ $N = -(-y)^1y^0$
$O = \dfrac{1}{x^7}$ $P = \dfrac{y^5}{x^3y}$ $Q = x^3y^3 - y^3x^3$

**70** Simplifier, si possible, les expressions suivantes où $a$ et $b$ sont des nombres non nuls.
$I = \dfrac{a^7b^9}{b^5a^4}$ $J = (a^{-3})^{-8}$ $K = a^{11}b^{11}$ $L = (-a)^2(-b)^5$
$M = a^3 + b^3$ $N = -(-a)^{111}a^{99}$ $O = \dfrac{1}{b^{-4}}$ $P = \dfrac{a^3}{b^{-3}}$

**71** Oral Iness et Samuel ne sont jamais d'accord. Iness affirme : « Trois plus trois à la puissance 4 vaut 1 296 » tandis que Samuel a trouvé 84.

Le lendemain c'est Samuel qui affirme : « Le tiers de neuf plus trois vaut 6 » tandis qu'Iness a trouvé 4.
Discuter pour aider Iness et Samuel à se mettre d'accord.

**72** Écrire la notation scientifique des nombres suivants.
**a)** 580 000 000 000 000
**b)** 45 235 560 015
**c)** 0,000 000 000 456
**d)** 0,000 001 32
**e)** $564\,651\times10^{-2}$
**f)** $0{,}023\,5\times10^3$

# Exercices d'entraînement

**73** Physique SVT

**1.** Le télescope spatial James-Webb se trouve à 1,5 millions de kilomètres de la Terre. Grâce à lui, on a pu observer la nébuleuse de la Tarentule, située à 160 000 années-lumière de la Terre.

À combien de kilomètres de la Terre se situe la nébuleuse de la Tarentule ? On exprimera le résultat à l'aide d'une puissance de 10.

**Coup de pouce**
1 année-lumière = 9 461 milliards de kilomètres.

**2.** Le microscope électronique le plus puissant du monde, le Titan Krios, offre une résolution de l'ordre du dixième de nanomètre. Il permet d'observer des virus de taille comprise entre 0 et 400 nanomètres, des bactéries de taille entre 200 et 1 000 nanomètres et des cellules de taille entre 5 et 50 micromètres.

**Coup de pouce** 1 nanomètre = $10^{-9}$ mètre et 1 micromètre = $10^{-6}$ mètre

Exprimer les tailles citées en mètres dans l'énoncé à l'aide de puissances de 10.

**74** Donner l'écriture décimale puis scientifique des nombres suivants.

$A = \dfrac{5 \times 10^6 \times 6 \times 10^{-3}}{4 \times 10^2}$

$B = 235 \times 10^4 + 2{,}8 \times 10^2 + 67 \times 10^{-1}$

## Définition de la racine carrée

**75** Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
**a)** 64 est le carré de 8.
**b)** La racine carrée de 7 est 49.
**c)** −3 a pour carré −9.
**d)** 121 est la racine carrée de −11.
**e)** $(-5)^2$ est le carré de 5.

**76** Recopier et compléter les phrases suivantes.
**a)** $16 = 4^2$. Or … est positif donc $\sqrt{16} = \ldots$
**b)** $\ldots = 2^2$. Or … est positif donc $\sqrt{\ldots} = 2$.
**c)** $0{,}09 = \ldots^2$. Or … est positif donc $\sqrt{0{,}09} = \ldots$
**d)** $\ldots = 0{,}6^2$. Or … est positif donc $\sqrt{\ldots} = 0{,}6$.
**e)** $144 = \ldots^2$. Or … est positif donc $\sqrt{144} = \ldots$

**77** Déterminer, si possible, la racine carrée des nombres suivants.
**a)** 100 **b)** 16 **c)** −49
**d)** $(-7)^2$ **e)** 169 **f)** −4

**78** Sans calculatrice, calculer.
**a)** $\sqrt{(-9)^2}$ **b)** $\sqrt{144}$ **c)** $\sqrt{0{,}04}$
**d)** $\sqrt{1600}$ **e)** $\sqrt{7}^2$ **f)** $\sqrt{8}^4$

**79** Calculer les produits suivants.
$J = 8\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}$ $K = 3\sqrt{5} \times 4\sqrt{5}$
$L = 2\sqrt{2} \times 5\sqrt{2}$ $M = -7\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$

**80** Calculer les carrés suivants.
$N = \left(\sqrt{12}\right)^2$ $O = \left(4\sqrt{2}\right)^2$
$P = \left(-3\sqrt{5}\right)^2$ $Q = \left(-5\sqrt{13}\right)^2$

## Propriétés de la racine carrée

Méthode 2 p. 49

**81** Écrire les nombres suivants sous la forme $a^2 \times b$.
**a)** 18 **b)** 12 **c)** 24 **d)** 28
**e)** 45 **f)** 72 **g)** 150 **h)** 288.

**82** Écrire sous la forme $a\sqrt{2}$ avec $a$ entier les nombres suivants.
**a)** $\sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{18}$ **c)** $\sqrt{50}$
**d)** $\sqrt{128}$ **e)** $\sqrt{162}$ **f)** $\sqrt{200}$

**83** Écrire sous la forme $a\sqrt{5}$ avec $a$ entier les nombres suivants.
**a)** $\sqrt{20}$ **b)** $\sqrt{80}$ **c)** $\sqrt{125}$
**d)** $\sqrt{245}$ **e)** $\sqrt{320}$ **f)** $\sqrt{500}$

**84** Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, où $a$ et $b$ sont deux entiers positifs, $b$ étant le plus petit possible.
**a)** $\sqrt{32}$ **b)** $\sqrt{75}$ **c)** $\sqrt{99}$
**d)** $\sqrt{54}$ **e)** $\sqrt{48}$ **f)** $\sqrt{27}$

**85** Simplifier les expressions suivantes.
$A = 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - \sqrt{2}$
$B = -9\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 7\sqrt{3} - 4\sqrt{5}$
$C = 3\sqrt{7} - 7\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 5\sqrt{7}$

**86** **1. a)** Écrire $\sqrt{27}$, $\sqrt{12}$ et $\sqrt{300}$ sous la forme $a\sqrt{3}$ avec $a$ entier.
**b)** En déduire $\sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{300}$.
**2.** Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où $a$ et $b$ sont deux entiers positifs, $b$ étant le plus petit possible.
$E = \sqrt{50} + 4\sqrt{18} - 7\sqrt{8}$
$F = \sqrt{20} - 8\sqrt{45} + 2\sqrt{5}$

**87** Écrire le nombre suivant sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a$ et $b$ entiers, $b$ étant le plus petit possible.

$A = \sqrt{72} + \sqrt{18}$ $B = \sqrt{27} - \sqrt{108}$ $C = 4\sqrt{80} + 3\sqrt{125}$

**88** Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b} + c$, où $a$, $b$ et $c$ sont deux entiers positifs, $b$ étant le plus petit possible.

$G = \sqrt{12} + 8 + 4\sqrt{300} - 5$ $H = 5\sqrt{63} - \sqrt{81} + \sqrt{7}$

**89** Calculer les produits suivants.

$J = 7\sqrt{2} \times 4\sqrt{3}$ $K = 3\sqrt{5} \times 9\sqrt{3}$

$L = 4\sqrt{5} \times (-5\sqrt{2})$ $M = -2\sqrt{11} \times 6\sqrt{33}$

**90** Sans calculatrice, écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où $a$ et $b$ sont deux entiers positifs, $b$ étant le plus petit possible.

**a)** $\sqrt{7^4}$ **b)** $\sqrt{5^5}$ **c)** $\sqrt{3^6}$ **d)** $\sqrt{78^3}$

**91** Écrire les nombres suivants sous forme de quotient avec un dénominateur entier.

**a)** $\sqrt{\frac{4}{9}}$ **b)** $\sqrt{\frac{1}{16}}$ **c)** $\sqrt{\frac{49}{25}}$ **d)** $\frac{2}{7} \times \sqrt{\frac{49}{64}}$

**92** Écrire les quotients suivants avec un dénominateur entier.

**a)** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{7}{2\sqrt{5}}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ **d)** $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$

**93** Écrire les nombres suivants sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où $a$ et $b$ sont des entiers relatifs et $c$ le plus petit entier possible.

$A = 6(3 + \sqrt{7})$

$B = -3\sqrt{5}(2 + 6\sqrt{5})$

$C = (11 + 2\sqrt{3})(3 - 7\sqrt{3})$

$D = (4\sqrt{15} + 12)(5 - 3\sqrt{15})$

**94** ABC est un triangle rectangle en A.

On donne $BC = 5\sqrt{7}$ cm et $AB = 3\sqrt{7}$ cm.

**1.** Déterminer la valeur exacte de AC. Donner le résultat sous la forme $a\sqrt{7}$ où $a$ est un entier positif.

**2.** Donner la valeur exacte du périmètre du triangle ABC puis l'arrondi au millimètre.

**95** L'unité choisie est le centimètre.

On considère un rectangle ayant pour longueur $\sqrt{50}$ et pour largeur $\sqrt{32}$.

**1.** Déterminer le périmètre exact de ce rectangle. Donner la réponse sous la forme $a\sqrt{b}$, où $a$ et $b$ sont des entiers relatifs, $b$ étant le plus petit possible.

**2.** Calculer l'aire exacte du rectangle. Donner la réponse sous la forme la plus simple possible.

## Multiples, diviseurs, parité

**96** Donner tous les multiples de 11 compris entre 50 et 300.

**97** Parmi les nombres suivants, donner les multiples de 4, les multiples de 9 et les multiples de 25. Justifier.

36 52 100 150 225 325

**98** **1.** Quel est le plus grand multiple de 3 strictement inférieur à 5 681 ?

**2.** Quel est le plus petit multiple de 12 supérieur ou égal à 2 189 ?

**99** **1.** Quel est le plus grand nombre pair multiple de 3 et inférieur à 60 ?

**2.** Quel est le plus petit nombre impair multiple de 7 et supérieur à 50 ?

**100** Trouver tous les nombres de trois chiffres divisibles à la fois par 3 et par 5 et dont le chiffre des centaines est 7.

**101** Logique

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

**a)** Tous les multiples de 12 sont des multiples de 6.

**b)** Tous les multiples de 6 sont des multiples de 12.

**c)** Tous les nombres pairs sont divisibles par 4.

**d)** Tous les multiples de 3 sont des nombres impairs.

**e)** Si un nombre est divisible par 10 alors il est divisible par 100.

**102** Python

**1.** Tester le programme en langage Python suivant avec `a=5` et `b=27`.

```
a= int(input("a=?")
b= int(input("b=?")
m=a
i=0
while m<b:
      m=a*i
      i=i+1
print(m-a)
```

**2.** À quoi sert ce programme ?

**103** Algo

On veut déterminer si un entier naturel `a` est multiple d'un entier naturel `b`.

**1.** Quelle opération permet de trouver le résultat ?

**2.** Quelle condition portant sur le résultat permet de conclure ?

**3.** On dispose d'une fonction `reste(a,b)` qui, à partir de deux entiers `a` et `b`, donne le reste de la division euclidienne de `a` par `b`. Proposer un algorithme qui détermine, à partir de deux entiers `a` et `b`, si `a` est un multiple de `b`.

**104** Écrire la liste de tous les diviseurs de :

**a)** 32 **b)** 67 **c)** 81 **d)** 144

**105** Donner la liste des diviseurs de chacun des deux nombres, puis déterminer les diviseurs communs.

**a)** 25 et 65 **b)** 80 et 120 **c)** 81 et 49 **d)** 39 et 51

# Exercices d'entraînement

**106** Chercher le plus grand diviseur commun des numérateurs et dénominateurs de chacune de ces fractions puis la mettre sous forme irréductible.

**a)** $\frac{48}{56}$ **b)** $\frac{56}{63}$ **c)** $\frac{63}{48}$ **d)** $\frac{650}{900}$ **e)** $\frac{1\,155}{1\,164}$

**107** Mme Maths a 35 Rubix cubes de 6 cm de côté qu'elle veut ranger sur une étagère sans les superposer.
Dans un magasin, elle a le choix entre trois dimensions d'étagères, laquelle va-t-elle choisir ?

**a)** $30 \times 42$ **b)** $10 \times 200$ **c)** $15 \times 100$

**108** **Analyser un problème pour le résoudre**

Agatha dit à Ofelia : « J'ai plus de 400 cartes *Pokemon*® mais moins de 450 ! Que je les groupe par 2, par 3, par 4 ou par 5, c'est toujours la même chose : il en reste toujours une toute seule ! ».
Combien Agatha a-t-elle de cartes *Pokemon*® ?

↪ Résolution de problèmes p. 134 et p. 274

## Multiples, diviseurs et écriture littérale

Démo Méthode 3 p. 51

**109** Prouver que tous les multiples de 9 sont des multiples de 3.

**110** Montrer que le produit d'un multiple de 2 et d'un multiple de 13 est un multiple de 26.

**111** Montrer que la somme de deux multiples de 5 est un multiple de 5.

**112** **Rédiger une solution**

**1.** 35 et 6 300 sont-ils divisibles par 7 ? Justifier.
**2.** En utilisant la question **1.** démontrer que 6 335 est divisible par 7.
**3.** Démontrer dans le cas général que si $x$ et $y$ sont deux nombres entiers divisibles par 7 alors leur somme $x + y$ est divisible par 7.
**4.** En écrivant le nombre 6 349 147 comme une somme de quatre multiples de 7, démontrer que 6 349 147 est un multiple de 7.

↪ Résolution de problèmes p. 54 et p. 246

**113** Quelle est la parité de la somme $a + b$ lorsque :
**a)** $a$ et $b$ sont tous les deux pairs ?
**b)** $a$ et $b$ sont tous les deux impairs ?
**c)** $a$ est pair et $b$ est impair ?

**114** Montrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

**115** Soient $a$ et $b$ deux nombres impairs, montrer que la somme de leur carré est paire.

**116** Montrer que le cube d'un nombre impair est un nombre impair.

**117** Soit $n$ un entier naturel.
**1.** Démontrer que si $n$ est impair alors 8 divise $n^2 - 1$.
**2.** Démontrer que $2^n + 2^{n+1}$ est divisible par 3.

## Nombres premiers

Méthode 4 p. 51

**118** **1.** Donner la liste des nombres premiers inférieurs à $\sqrt{821}$.
**2.** Montrer que 821 est un nombre premier.

**119** Prouver que 377 n'est pas un nombre premier.

**120** **1.** Parmi les nombres entiers naturels suivants, chercher ceux qui sont des nombres premiers.

**a)** 157 **b)** 231 **c)** 311 **d)** 468

**2.** Les fractions suivantes sont-elles irréductibles ? Si elles ne le sont pas, les simplifier pour les rendre irréductibles.

**a)** $\frac{231}{468}$ **b)** $\frac{622}{314}$ **c)** $\frac{157}{311}$ **d)** $\frac{204}{231}$

**121** Voici des nombres.

19 169 1 009 127 558 615

Parmi ces nombres, indiquer :
**a)** ceux qui sont pairs.
**b)** ceux qui ne sont pas des nombres premiers.

**122** À l'aide de la définition des nombres premiers, démontrer que le carré d'un nombre premier n'est pas premier.

**123** **1.** Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres suivants.
$A = 4\,725$, $B = 1\,584$ et $C = 7\,546$.
**2.** Donner la forme irréductible des fractions suivantes.
$\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$ et $\frac{C}{A}$.
**3.** Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a$ et $b$ entiers, $b$ étant le plus petit possible.
$\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ et $\sqrt{C}$.

**124** **Histoire des maths**

Un nombre de Mersenne est un nombre de la forme $2^n - 1$ où $n$ est un entier positif. Ces nombres doivent leur nom au moine français Marin Mersenne au XVII^e siècle.

Marin Mersenne (1588-1648)

**1.** Donner les valeurs des nombres de Mersenne pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 5$, $n = 7$ et $n = 11$.
**2.** Ces nombres sont-ils premiers ?
**3.** Les nombres de Mersenne avec $n$ premier sont-ils tous premiers ?

## Nature d'un nombre

Méthode 5 p. 53

**125** Compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

**a)** 6,8 ... $\mathbb{Q}$ **b)** $\frac{3}{5}$ ... $\mathbb{Z}$ **c)** $\mathbb{Z}$ ... $\mathbb{N}$

**d)** $\sqrt{49}$ ... $\mathbb{D}$ **e)** $\mathbb{R}$ ... $\mathbb{D}$ **f)** $-\frac{4}{56}$ ... $\mathbb{Q}$

**126** Quel est le plus petit ensemble de nombres auquel appartient chacun des nombres suivants ?

**a)** $-13$ **b)** $\frac{-1}{4}$ **c)** $\sqrt{25}$ **d)** $\frac{27}{9}$ **e)** $\frac{5+3}{7}$

**127** Démontrer que les nombres suivants sont des décimaux.

**a)** $-5$ **b)** $\frac{7}{2}$ **c)** 0,034 **d)** 7 584 000

**128** À l'aide de la calculatrice, dire sans justifier si les nombres suivants semblent appartenir à l'ensemble des nombres décimaux.

**a)** $-1{,}2$ **b)** $\frac{3}{12}$ **c)** $10^{56}$ **d)** $\sqrt{15}$ **e)** 1 542 000

**129** Logique & Démo

On souhaite démontrer par un raisonnement par l'absurde que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

**a)** Supposons que $\frac{1}{3}$ est un décimal.

Montrer qu'il existe alors deux entiers $a$ et $n$ tels que $10^n = 3a$.

**b)** Expliquer pourquoi $10^k$ ne peut pas être un multiple de 3.

**c)** Conclure.

**130** Logique & Démo

Montrer en raisonnant par l'absurde que $\frac{2}{3}$ n'est pas un décimal.

On pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.

**131** Les nombres suivants sont-ils décimaux ? Justifier.

**a)** $\frac{7}{11}$ **b)** $\frac{77}{32}$ **c)** $\frac{125}{13}$ **d)** $\frac{73}{6}$.

**132** Soit $A = \frac{4\sqrt{27}}{2\sqrt{3}}$. Montrer que A est un nombre entier.

**133** Soit $A = \frac{135}{63}$ et $B = -\frac{6}{7}$. Montrer que A – B est un entier.

**134** Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse.
Si elle est fausse donner un contre-exemple.

**a)** La différence de deux entiers relatifs est un entier relatif.

**b)** La somme de deux nombres décimaux est un nombre décimal.

**c)** Le produit de deux rationnels est un entier naturel.

**d)** Le quotient de deux nombres réels est un rationnel.

**135** Esprit critique

1. On suppose que $5\sqrt{2}$ est un rationnel.
Comment peut-il s'écrire ? Comment s'écrit alors $\sqrt{2}$ ?
Est-ce possible ? Qu'en déduit-on ?

2. Montrer que le nombre $\pi + \frac{8}{7}$ est un irrationnel.

**136** 1. Le produit de deux rationnels est-il un nombre rationnel ? Justifier.

2. Le produit de deux irrationnels est-il irrationnel ? Justifier.

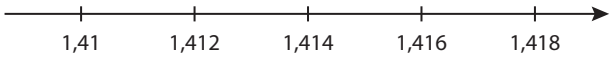
## Encadrement

Méthode 6 p. 53

**137** Donner un encadrement de $\frac{11}{13}$ :

**a)** à $10^{-1}$ près. **b)** à $10^{-2}$ près. **c)** à $10^{-3}$ près.

**138** 1. Recopier la droite graduée suivante et placer les points A et B d'abscisses respectives $\sqrt{2}$ et $\frac{17}{12}$.




2. Donner un encadrement au millième de $\frac{17}{12} - \sqrt{2}$.

**139** Donner un encadrement d'amplitude 0,1 des puissances suivantes.

**a)** $5^{-2}$ **b)** $3 \times 8^{-3}$ **c)** $5{,}6 \times 10^{-3}$

**140** Donner un encadrement des racines suivantes entre deux entiers successifs.

**a)** $\sqrt{37}$ **b)** $\sqrt{78}$ **c)** $\sqrt{105}$ **d)** $\sqrt{13}$

**141** Encadrer les fractions suivantes entre deux entiers successifs.

**a)** $\frac{17}{3}$ **b)** $\frac{85}{7}$ **c)** $\frac{45}{13}$ **d)** $\frac{854}{117}$ **e)** $-\frac{59}{16}$

## À chacun son rythme

**142** On considère $A = \sqrt{450}$, $B = \sqrt{360}$ et $C = \sqrt{294}$.

**Énoncé A**

1. **a)** Déterminer $A^2$ et $B^2$.

**b)** Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de A et B puis simplifier $\frac{A}{B}$.

2. Écrire A sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a$ et $b$ entiers, $b$ étant le plus petit possible.

**Énoncé B**

1. Écrire $2A - 3C$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a$ et $b$ entiers, $b$ étant le plus petit possible.

2. Justifier que le produit d'un multiple de $A^2$ et d'un multiple de $C^2$ est un multiple de 36.

**Énoncé C**

Justifier que $A + \frac{5}{7}$ est irrationnel.

# Exercices de synthèse

## 143 Puissances

**1.** Calculer A et donner le résultat sous forme fractionnaire la plus simple possible.

$$A = \frac{14 \times 10^5 \times 35 \times 10^{-3}}{21 \times 10^3}$$

**2.** Écrire B sous la forme $a \times 10^n$ où $a$ est un nombre entier et $n$ un nombre entier relatif.

$$B = \frac{35 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^5}{21 \times 10^{-1}}$$

**3.** Calculer et donner le résultat en écriture scientifique de

$$C = \frac{5 \times 10^{-3} \times 12 \times 10^6}{15 \times 10^2 \times 8 \times 10^{-5}}$$

**4.** Donner l'écriture décimale et l'écriture scientifique de

$$D = \frac{3 \times 10^2 \times 1{,}2 \times (10^{-3})^4}{0{,}2 \times 10^{-7}}$$

*(D'après Brevet)*

## 144 Racines

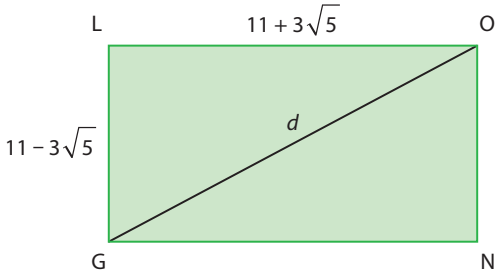
Écrire sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où $a$ et $b$ sont des entiers relatifs et $c$ le plus petit entier possible.

$A = 2(3 + \sqrt{5})$ $\quad B = 5\sqrt{7}(-2 + 4\sqrt{7})$

$C = (6 - 2\sqrt{2})(3 + 7\sqrt{2})$ $\quad D = (-9\sqrt{11} + 12)(4 - 3\sqrt{11})$

## 145 Dans un quadrilatère

On considère la figure suivante. L'unité est le centimètre.




Calculer, en détaillant et en donnant les valeurs exactes des résultats en centimètres :

**a)** le périmètre du rectangle LONG.

**b)** l'aire du rectangle LONG.

**c)** la longueur $d$ de la diagonale du rectangle LONG.

## 146 Diviseurs

Un nombre entier est dit « parfait » s'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs autres que lui-même.

**1.** Montrer que 28 et 496 sont des nombres parfaits.

**2.** 130 est-il un nombre parfait ? Justifier.

## 147 Ensemble de nombres

On pose $M = \frac{20\,755}{9\,488} - \frac{3}{8}$.

**1.** Écrire, en détaillant les calculs, le nombre M sous la forme d'une fraction irréductible.

**2.** Le nombre M est-il décimal ?
Est-il rationnel ? Justifier.

*(D'après Brevet)*

## 148 Nombres impairs

On veut démontrer que la somme de deux entiers naturels impairs consécutifs est un multiple de 4.

**1.** Choisir deux entiers impairs consécutifs et les additionner. Vérifier que la somme est un multiple de 4.

**2.** Combien faut-il ajouter à un entier naturel impair pour obtenir l'entier impair qui le suit ?

**3.** Donner les écritures littérales de deux entiers naturels impairs consécutifs.

**4.** Montrer que leur somme peut s'écrire $4m$ où $m$ est un entier naturel puis conclure.

## 149 Fractions

Soit $A = \frac{8}{3} - \frac{\frac{5}{3}}{\frac{20}{21}}$ et $B = \frac{2 + \frac{2}{3}}{\frac{4}{5} - \frac{2}{3}}$.

**1.** Calculer A et B en détaillant les étapes de calculs et écrire le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

**2.** Déterminer le plus petit ensemble de nombres qui contient chacun d'entre eux.

## 150 Notation scientifique

SVT

Le cœur humain effectue environ 5 000 battements par heure.

**1.** Écrire 5 000 en notation scientifique.

**2.** Calculer le nombre de battements effectués en un jour, sachant qu'un jour dure 24 heures.

**3.** Calculer le nombre de battements effectués pendant une vie de 80 ans.

On considère qu'une année correspond à 365 jours.
Donner la réponse en notation scientifique.

*(D'après Brevet)*

## 151 Encadrement

**1.** Encadrer $\frac{34}{19}$ entre deux entiers consécutifs.

**2.** Quelle est l'amplitude de l'encadrement suivant ?

$$\frac{33}{19} < \frac{34}{19} < \frac{35}{19}$$

**3.** En posant la division à la main, donner un encadrement au centième de $\frac{34}{19}$.

**4.** À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de $\frac{34}{19}$ à $10^{-5}$ près.

## 152 Quantité conjuguée

Écrire les nombre suivants sans racine au dénominateur.

$A = \dfrac{5}{\sqrt{3}+1}$ $\quad B = \dfrac{-2}{3-\sqrt{5}}$ $\quad C = \dfrac{4-\sqrt{7}}{\sqrt{7}+5}$

## 153 Des molécules d'eau

Chimie

L'unité de masse atomique unifiée (symbole u) est une unité de mesure standard, utilisée pour mesurer la masse des atomes : 1 u = 1,660 54 × $10^{-27}$ kg (valeur fournie par le Comité International des Poids et Mesures).

La masse d'un atome d'hydrogène est 1 u et celle d'un atome d'oxygène est 16 u.

**1.** Une molécule d'eau est constituée d'un atome d'oxygène et de deux atomes d'hydrogène.

Calculer la masse théorique d'une molécule d'eau.

**2.** On admet qu'un litre d'eau pèse 1 kg.

Calculer le nombre théorique de molécules d'eau dans un litre.

**3.** Une estimation du volume total des océans est de 1,370 milliard de $km^3$.

Donner un ordre de grandeur du nombre théorique de molécules d'eau présentes dans les océans.

**4.** Le débit moyen de la Seine à Paris est d'environ 250 $m^3$ par seconde.

Donner une estimation du nombre de molécules d'eau qui passe sous le pont de l'Alma chaque seconde, puis chaque année.

## 154 Première puissance supérieure à un nombre donné

Python

**1.** Écrire un programme en langage **Python** qui écrit les 10 premières puissances d'un entier `a`.

**2.** Modifier le programme de la question **1.** pour qu'il détermine la plus grande puissance de `a` inférieure à un nombre `b` donné.

**3.** Modifier le programme de la question **1.** pour qu'il détermine la plus petite puissance de `a` supérieure à un nombre `b` donné.

**4.** À partir des programmes écrits aux questions **2.** et **3.**, écrire un programme qui détermine la première puissance d'un nombre positif `a` supérieure ou inférieure à une valeur donnée `b`.

## 155 Écritures exactes et simplifiées

On pose $M = \sqrt{166 + 66\sqrt{5}}$ et $N = \sqrt{166 - 66\sqrt{5}}$.

On donnera tous les résultats sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où $a$, $b$ et $c$ sont des entiers relatifs, $c$ le plus petit possible.

**1.** Justifier l'existence du nombre N sans calculatrice.

**2. a)** Calculer $M^2$ et $N^2$ puis $M \times N$.

**b)** En déduire $(M + N)^2$ puis la valeur exacte de M + N.

**3. a)** Développer $(11 + 3\sqrt{5})^2$ et en déduire une écriture simplifiée de M.

**b)** Développer $(11 - 3\sqrt{5})^2$ et en déduire une écriture simplifiée de N.

**c)** Retrouver grâce aux deux questions précédentes la valeur exacte de M + N obtenue au **2. b)**.

## 156 Escaliers et division euclidienne

L'escalier d'une tour a un nombre de marches compris entre 130 et 150. Si je les monte trois par trois, j'arrive en haut. Si j'étais capable de les monter quatre par quatre, je finirais par une marche. Combien y a-t-il de marches ?

## 157 Analyser un problème pour le résoudre

Deux voitures font des tours sur un circuit fermé. Elles partent toutes les deux à midi de la ligne de départ. L'une parcourt le circuit en 30 minutes, l'autre en 36 minutes.

À quelle heure les deux voitures repasseront-elles en même temps la ligne de départ ?

Combien auront-elles fait de tours ?

↪ Résolution de problèmes p. 134 et p. 274

## 158 Facteurs premiers et parité

$n$ est un entier naturel.

**1.** Quels sont les nombres présents dans la décomposition en facteurs premiers de $3^n$.

**2.** En déduire la parité de $3^n$ puis de $3^n + 1$.

## 159 Divisibilité

Démo

Soit $n$ un nombre entier non premier et $d$ un diviseur de $n$. On suppose qu'il existe un entier $d'$ qui divise $d$.

Démontrer que $d'$ divise aussi $n$.

## 160 Une propriété du cours

Logique & Démo

Soit $n$ un nombre entier non premier.

**1.** Pourquoi existe-t-il un diviseur de $n$ autre que 1 et $n$ ?

**2.** Soit $d$ le plus petit diviseur de $n$ autre que 1.

Démontrer que $d$ est premier en utilisant un raisonnement par l'absurde et l'exercice précédent.

**3.** Démontrer que $\sqrt{n} > d$.

# Exercices d'approfondissement

## 161 Développement décimal périodique — Défi

Un nombre possède un développement décimal illimité périodique lorsque sa partie décimale est illimitée et qu'une séquence de nombres se répète.

**1.** Déterminer la 314e décimale de $\frac{253}{7}$.

**2.** On souhaite déterminer de quel nombre rationnel 1 000, 10 001 000… est le développement décimal.
**a)** On pose $x = 0{,}10\,001\,000\ldots$. Expliquer pourquoi $x$ vérifie l'égalité $10\,000x = 1\,000 + x$ puis résoudre l'équation.
**b)** Conclure.

## 162 Approche du nombre d'or

On appelle « nombre d'or » le nombre $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et on donne le nombre C tel que $C = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$.

Donner un encadrement à $10^{-5}$ près de $\varphi - C$.

## 163 Développement décimal illimité

**1.** Justifier que $x = 0{,}999\ldots$ est solution de l'équation $10x - 9 = x$. **2.** Résoudre $10x - 9 = x$. **3.** Conclure.

## 164 Encadrement

**1. a)** Donner une valeur approchée par excès à $10^{-3}$ près de $\sqrt{2}$.
**b)** Donner une valeur approchée par défaut à $10^{-3}$ près de $\frac{\pi}{2}$.

**2.** Donner, si possible, deux valeurs de nombres entiers $n$, décimaux $d$ et rationnels $q$ tels que :

**a)** $\sqrt{2} < n < \frac{\pi}{2}$ **b)** $\sqrt{2} < d < \frac{\pi}{2}$ **c)** $\sqrt{2} < q < \frac{\pi}{2}$

## 165 Nature du nombre d'or

On appelle « nombre d'or » le nombre $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Supposons que $\varphi = \frac{p}{q}$ avec $p$ et $q$ entiers, cette fraction étant irréductible.

**1.** On admet que $\varphi^2 = \varphi + 1$.
En déduire que $p^2 = q^2 + pq$.
**2. a)** Si $p$ et $q$ sont impairs, quelle est la parité de $p^2$ ?
celle de $q^2 + pq$ ?
Est-ce possible ?
**b)** Si $p$ est pair et $q$ impair, quelle est la parité de $p^2$ ?
Quelle est la parité de $q^2 + pq$ ?
Est-ce possible ?
**c)** Que se passe-t-il si $p$ est impair et $q$ est pair ?
**d)** Il ne reste donc que le cas où $p$ et $q$ sont pairs tous les deux.
Pourquoi est-ce impossible ?
Conclure sur la nature de $\varphi$.

## 166 Histoire des maths

**1.** Écrire la liste des 10 premiers nombres premiers.
**2.** En choisir deux et les sommer entre eux.
Recommencer avec deux autres, plusieurs fois.
Qu'observe-t-on ?
**3.** Écrire les nombres 34 ; 68 et 100 comme la somme de deux nombres premiers.
La conjecture de Goldbach (1690-1764) dit que :
« Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers ».
Formulée en 1742 par le mathématicien allemand Christian Goldbach, cette conjecture n'a toujours pas été démontrée à ce jour !

# Vers la 1re

## 167 Vers STD2A

**1.** AIJD est un carré de côté 10 cm.
M est le milieu de [DJ] et C est le point de la demi-droite [DJ) tel que MI = MC.
B est le point tel que ADCB soit un rectangle.
Calculer la valeur exacte de la longueur MI et en déduire la valeur exacte de la longueur DC du rectangle ADCB.
**2.** Vérifier que le rapport « longueur sur largeur » du rectangle ADCB est égal à $\varphi$ avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Un tel rectangle est appelé « rectangle d'or ».
**3.** Prouver que IBCJ est un rectangle d'or.

## 168 Vers la Spécialité Maths

Soit $E = \frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{18}} + \frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{18}}$.

Écrire le nombre E sous la forme $a\sqrt{b}$ où $a$ est une fraction irréductible et $b$ est un nombre entier.

## 169 Vers STI2D

L'énergie distribuée par EDF est mesurée en kilowattheures (symbole : kWh).
Une autre unité de mesure d'énergie est le Joule (symbole : J).
On sait que 1 kWh = $3{,}6 \times 10^6$ J.
Les économistes utilisent pour les combustibles (gaz, bois, charbon...) une autre unité appelée tonne équivalent pétrole (tep), qui correspond à la quantité d'énergie libérée par la combustion d'une tonne de pétrole.
On sait que 1 tep = $4{,}18 \times 10^{10}$ J.
Arrondir les résultats au centième.
**1.** Une tonne de charbon a un pouvoir calorifique de $2{,}8 \times 10^{10}$ J.
Exprimer ce pouvoir en kWh puis en tep.
**2.** Calculer, en kWh, l'énergie correspondant à un tep.
**3.** En France, en 2021, l'énergie consommée par les transports était égale à $43{,}1 \times 10^6$ tep
Exprimer cette énergie en kWh. (*Source* : INSEE)

# Préparer le contrôle — Je révise

Objectif

## 1 Calculer avec des puissances

### Puissances

- Pour tout nombre entier $n$ positif non nul, pour tout nombre réel $a$, on a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

- Pour $a \neq 0$, on a :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}}.$$

- Pour $a \neq 0$, on a : $a^0 = 1$.

### Règles de calculs

- Pour tous nombres entiers relatifs $n$ et $m$ et tous nombres réels non nuls $a$ et $b$.

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Objectif

## 2 Calculer avec des racines

### Racines

- La racine carrée d'un nombre positif $a$ est le nombre positif dont le carré est $a$.
- On la note $\sqrt{a}$ et on a : $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

### Règle de calculs

- Pour tout $a \geqslant 0$ : $\sqrt{a^2} = a$
- Pour tout $a < 0$ : $\sqrt{a^2} = -a$
- Pour tous nombres positifs $a$ et $b$ : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- Si $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Objectif

## 3 Utiliser les notions de multiples, de diviseurs et de nombres premiers

### Multiples et diviseurs

Soit $a$ et $b$ deux nombres entiers.

- $a$ est un **multiple** de $b$ si et seulement s'il existe un nombre entier $k$ tel que $a = b \times k$.
- On dit aussi que $b$ est un **diviseur** de $a$.

### Parité

Soit $n$ un nombre entier.

- $n$ est **pair** si et seulement s'il existe un entier $k$ tel que $\boldsymbol{n = 2k}$.
- $n$ est **impair** si et seulement s'il existe un entier $k$ tel que $\boldsymbol{n = 2k + 1}$

### Nombres premiers

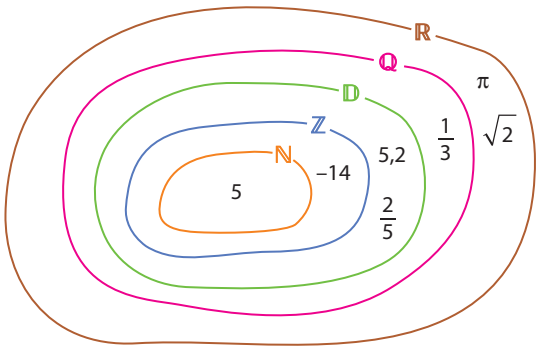
- Un nombre **premier** est un nombre entier qui n'a que **deux diviseurs : 1 et lui-même.**

Objectif

## 4 Déterminer la nature d'un nombre

### Ensembles de nombres

- L'ensemble des **entiers naturels** est $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \ldots\}$
- L'ensemble des **entiers relatifs** est $\mathbb{Z} = \{\ldots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\}$.
- L'ensemble des **décimaux** $\mathbb{D}$ est l'ensemble des quotients écrits sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- L'ensemble des **rationnels** $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres écrits sous la forme d'un quotient $\dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$.
- L'ensemble des **réels** $\mathbb{R}$ est toutes les abscisses des points d'une droite graduée.




### Encadrement par deux décimaux

- Tout nombre réel peut être encadré par 2 décimaux à $10^{-n}$ près.

# Préparer le contrôle — Je me teste

**QCM INTERACTIF**
Tester ses connaissances
www.lienmini.fr/8270-7

## QCM Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Objectif 1

### 1 Calculer avec des puissances

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **170** $3^4$ est égal à : | $3+3+3+3$ | 81 | $(-3)^4$ | $-3\times3\times3\times3$ |
| **171** $7^3\times7^{-5}$ est égal à : | $49^{-2}$ | $7^{-15}$ | $14^{-2}$ | $\frac{1}{7^2}$ |
| **172** $\frac{12^{15}}{4^{15}}$ est égal à : | $\left(\frac{12}{4}\right)^0$ | $3^{15}$ | 14 348 907 | $3^0$ |
| **173** $4{,}57\times10^4+3{,}2\times10^1+5{,}6\times10^{-2}$ est égal à : | $13{,}37\times10^3$ | 45 732,056 | 10,28 | 439,41 |

Objectif 2

### 2 Calculer avec des racines

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **174** Le nombre 12 est égal à : | $\sqrt{12^2}$ | $\sqrt{144}$ | $\sqrt{12}$ | $2\sqrt{3}$ |
| **175** $\sqrt{108}$ est égal à : | $3\sqrt{6}$ | $2\sqrt{27}$ | $6\sqrt{3}$ | 10,39 |
| **176** $(3\sqrt{7})^2$ est égal à : | 21 | 63 | $9\sqrt{7}$ | $3\sqrt{7}$ |
| **177** $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{64}}$ est égal à : | $\frac{36}{64}$ | $\frac{3}{4}$ | $\sqrt{\frac{36}{64}}$ | $\frac{\sqrt{36}}{64}$ |
| **178** Soit un triangle ABC rectangle en A tel que $AB=\sqrt{72}$ et $BC=\sqrt{200}$. Alors : | $AC=16\sqrt{2}$ | $AC=\sqrt{128}$ | $AC=\sqrt{272}$ | $AC=8\sqrt{2}$ |

Objectif 3

### 3 Utiliser les notions de multiples, de diviseurs et de nombres premiers

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **179** S'il existe un entier $k$ tel que $n=2k+1$ alors : | $n$ est un multiple de 2. | $n$ est premier. | $n$ est impair. | $n$ est pair. |
| **180** Parmi les nombres suivants, le(s)quel(s) est (sont) premier(s) ? | 23 | 79 | 91 | 117 |
| **181** Parmi les fractions suivantes, laquelle (lesquelles) est (sont) irréductible(s) ? | $\frac{2\,590}{3\,885}$ | $\frac{74}{111}$ | $\frac{1601}{1621}$ | $\frac{2\,429}{1735}$ |
| **182** S'il existe un entier $p$ tel que $n=3p$ alors : | $n$ divise 3. | $p$ divise $n$. | $n$ est un nombre premier. | $n$ est un multiple de 3. |

Objectif 4

### 4 Déterminer la nature d'un nombre

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **183** Un décimal est un rationnel. | Jamais. | Parfois. | Tout le temps. | Cela dépend. |
| **184** Parmi les nombres suivants, lesquels sont des entiers relatifs ? | 48 | $\sqrt{35}$ | $-\frac{1}{3}$ | $10^{-3}$ |
| **185** À quel(s) ensemble(s) appartient $\frac{3}{4}$ ? | $\mathbb{N}$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{D}$ | $\mathbb{Q}$ |
| **186** Quel est l'encadrement à $10^{-2}$ près de $\sqrt{5}$ ? | $2{,}23\leqslant\sqrt{5}\leqslant2{,}24$ | $2{,}2\leqslant\sqrt{5}\leqslant2{,}3$ | $2{,}23\leqslant\sqrt{5}\leqslant2{,}25$ | $2{,}20\leqslant\sqrt{5}\leqslant2{,}30$ |
| **187** La somme de deux rationnels est : | un décimal. | un irrationnel. | un entier. | un rationnel. |

↪ Corrigés p. 390

# Préparer le contrôle — Je m'entraîne

## Parcours différenciés

| | Objectif 1 | Objectif 2 | Objectif 3 | Objectif 4 |
|---|---|---|---|---|
| Parcours A | 1 188 | 3 191 | 10 120 194 | 15 138 197 |
| Parcours B | 68 189 | 87 192 | 7 114 195 | 13 131 198 |
| Parcours C | 73 190 | 94 193 | 108 196 | 136 199 |

## Exercices

### Objectif 1 — Calculer avec des puissances

**188** Écrire sous la forme d'une seule puissance.

**a)** $3 \times 3^{-4}$ **b)** $\dfrac{7{,}1^2}{7{,}1^4}$

**c)** $((-7)^2)^{15}$ **d)** $\dfrac{6^9}{3^9}$

**e)** $((5{,}6)^3)^0$ **f)** $10^{154} \times 10^{-153}$

**g)** $58^{-6} \times 0{,}5^{-6}$ **h)** $\dfrac{36^2}{36^{-5}}$

**189** Soit $A = \dfrac{64 \times 10^4 \times 27 \times 10^{-2}}{72 \times 10^3}$.
Calculer A puis donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible et sous forme décimale.

**190** Le diamètre du nuage électronique d'un atome d'hydrogène est de $0{,}5 \times 10^{-10}$ m, le diamètre d'un cheveu est de $70 \times 10^{-6}$ m.
Combien d'atomes d'hydrogène faudrait-il « empiler » pour obtenir le diamètre d'un cheveu ?

(*Source :* cea)

### Objectif 2 — Calculer avec des racines

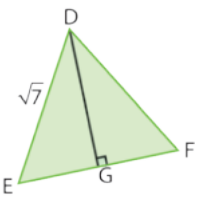
**191** Écrire $\sqrt{8}$ ; $\sqrt{18}$ et $\sqrt{50}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où $a$ et $b$ sont entiers et $b$ le plus petit possible.

**192** **1.** Écrire A et B sous la forme $a\sqrt{5}$ avec $a$ entier.

$A = 2\sqrt{45} + \sqrt{20}$ $\quad B = \sqrt{180} - 2\sqrt{5}$

**2.** Démontrer que $A \times B$ est un nombre entier.

**193** On considère un triangle DEF équilatéral de côté $\sqrt{7}$ cm. Donner les résultats sous la forme $a\sqrt{b}$, où $a$ et $b$ sont entiers et $b$ le plus petit possible.




**1.** Calculer son périmètre.
**2.** Calculer la longueur de la hauteur DG.
**3.** Calculer son aire.

### Objectif 3 — Utiliser les notions de multiples, de diviseurs et de nombres premiers

**194** **1.** Donner la liste des nombres premiers inférieurs à $\sqrt{463}$.
**2.** Montrer que 463 est un nombre premier.

**195** Démontrer que le produit de deux nombres entiers consécutifs est pair.

**196** **1.** Si $k$ divise deux entiers $a$ et $b$ avec $a > b$ alors $k$ divise-t-il $a - b$ ?
**2.** Pour son anniversaire, Jules veut offrir des paquets de bonbons identiques à tous ses camarades de classe. Il dispose de 108 bonbons rouges et de 135 bonbons noirs et il ne veut garder aucun bonbon.

**a)** Combien de paquets de bonbons Jules pourra-t-il réaliser au maximum ?
**b)** Combien y aura-t-il de bonbons de chaque couleur dans chaque paquet ?

### Objectif 4 — Déterminer la nature d'un nombre

**197** Donner un encadrement d'amplitude 0,001 de $\dfrac{\sqrt{3}-2}{5}$.

**198** $\dfrac{65}{91}$ est-il un nombre décimal ? Justifier.

**199** Sachant que $\pi$ est un irrationnel, montrer par un raisonnement par l'absurde que $\dfrac{\pi}{2}$ n'est pas rationnel.

↪ Corrigés p. 390

# Travaux pratiques

50 min — Calculer — Modéliser

## 1 Approximation de $\sqrt{2}$

### A ▸ Avec une calculatrice

**1.** On veut déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$.
Sans calculatrice, donner un encadrement à l'unité de ce nombre.

**2.** Après avoir recopié et complété le tableau suivant, donner un encadrement de $\sqrt{2}$ au dixième.

| $N$ | 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N^2$ | | | | | | | | | | | |

**3.** Quel est l'encadrement de $\sqrt{2}$ au centième ?

### B ▸ Avec un tableur

Tableur

**1.** Construire la feuille de calcul suivante.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Pas | | | | | | | | | | | |
| 2 | $N$ | 1 | | | | | | | | | | 2 |
| 3 | $N^2$ | | | | | | | | | | | |

**2.** Quelle formule doit-on écrire dans la cellule B1 pour calculer le pas qui permette d'aller de B2 à L2 en 10 étapes ?
Compléter la cellule C2 pour augmenter B2 du pas calculé en B1.

**Coup de pouce** Pour recopier la formule sans changer B1, écrire $B$1 au lieu de B1.

Recopier la formule à l'aide de la poignée de recopie jusqu'en K2.

**3.** Compléter la cellule B3 pour obtenir le carré du nombre en B2, puis recopier la formule jusqu'à L3.

**4.** Observer le tableau et donner un encadrement de $\sqrt{2}$ au dixième.

**5.** Remplacer le contenu de B2 et de L2 par les bornes de l'encadrement.
Quel encadrement de $\sqrt{2}$ obtient-on ? Quelle est sa précision ?

**6.** Recommencer la question précédente avec le nouvel encadrement jusqu'à obtenir une précision de $10^{-4}$.
Changer si besoin le format d'affichage des nombres.

### C ▸ Avec un programme

Python

L'algorithme de Héron d'Alexandrie permet également de donner une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre $n$.

- **1re étape :** $E1 = n$
- **2e étape :** $E2 = \frac{1}{2}\left(E1 + \frac{n}{E1}\right)$
- **3e étape :** $E3 = \frac{1}{2}\left(E2 + \frac{n}{E2}\right)$

**1.** On choisit $n = 2$.
Calculer les valeurs obtenues aux quatre premières étapes de cet algorithme en utilisant les touches ci-contre de la calculatrice.

| TI | Numworks | Casio |
|---|---|---|
| rép ? (–) | Ans | Ans (–) |

**2. a)** Compléter le programme en langage **Python** ci-contre pour qu'il affiche les valeurs obtenues aux dix premières étapes de cet algorithme.

**b)** Faire fonctionner ce programme avec $n = 2$.
À quelle étape a-t-on une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $10^{-2}$ près ? à $10^{-8}$ près ?

```
n=float(input("n=?"))
E=n
print(n)
for i in range(2,...) :
    E=...
    print(E)
```

**3.** Pour aller plus loin Modifier le programme ci-contre pour qu'il affiche une valeur approchée de $\sqrt{35}$ à $10^{-5}$ près.

Tableur — 30 min — Représenter — Communiquer

# 2 Dans le cœur des micros

## A ▸ Parlons chiffres

En informatique, on utilise uniquement des 0 et des 1 pour coder les nombres.
On travaille avec un système de numération binaire.

| Écriture binaire | Écriture décimale | Lien entre les deux écritures |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $1 \times 2^0$ |
| 10 | 2 | $1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$ |
| 11 | 3 | $1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ |
| 100 | 4 | $1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$ |

**1.** Bien observer la table de correspondance précédente, puis déterminer l'écriture en binaire des entiers inférieurs à 10.

**2.** Reproduire la feuille de calcul suivante sur un tableur.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Nombre en écriture binaire | | | | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | Nombre en écriture décimale | | | | | | | |

Programmer en H3 le calcul nécessaire pour obtenir l'écriture décimale d'un nombre en binaire.

## B ▸ La table ASCII

L'unité d'enregistrement en informatique est le *bit*, symbolisé par un 0 ou un 1.
Un *octet* correspond à une suite de huit bits, par exemple 0100 1101.

**1.** Combien de nombres peut-on écrire avec un octet ?

**2.** Pour coder la centaine de caractères présents sur un clavier, on les numérote de 0 à 255 et on les code à l'aide d'un octet.
La table qui permet de mettre en correspondance un caractère et le nombre entre 0 et 255 s'appelle la table ASCII.
Télécharger la table et retrouver l'écriture décimale du nombre 0100 0001.
À quelle lettre correspond-il ?

**TABLEUR**
Table ASCII
www.lienmini.fr/8270-tab1

**3.** À l'aide de la partie **A**, retrouver l'écriture en binaire des codes des autres lettres de l'alphabet.

**4.** Constituer des groupes.
Chaque groupe choisit alors quatre mots de moins de dix lettres, les code en binaire puis demande aux autres groupes de les retrouver.

## C ▸ Une unité d'enregistrement appelée « octet »

**1.** Calculer, en octets, la valeur des expressions suivantes.
$A = 2^{10}$ octets, $B = 2^{20}$ octets, $C = 2^{30}$ octets.

**2.** Expliquer pourquoi l'expression A est généralement appelée « 1 kilooctet » (symbole : 1 ko).
On note $A \approx 1$ ko ($10^3$ octets).
Par approximation, on écrit $A = 1$ ko.

**3.** De même, B est appelé « 1 mégaoctet » (symbole : 1 Mo) et C est appelé « 1 gigaoctet » (symbole : 1 Go).
Indiquer par quelles puissances de 10, se traduisent les préfixes *méga* et *giga*.

3

# Intervalles, inégalités, inéquations

## Les maths au quotidien

Pour comparer diverses offres de différents opérateurs téléphoniques ou d'abonnements, on peut utiliser des outils comme les inéquations. Elles peuvent permettre d'analyser les situations et d'agir en consommateur éclairé.

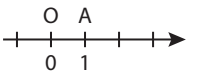
# Pour prendre un bon départ

EXERCICES Sésamath
Réviser ses acquis
www.lienmini.fr/8270-s6

## 1 Placer des nombres sur une droite graduée

Vu au collège

Sur la droite graduée ci-contre, A a pour abscisse 1.
Reproduire et prolonger cette droite graduée, en prenant 1 cm pour unité, et placer sur celle-ci les points dont les abscisses sont :




**a)** $-6$ **b)** $3{,}3$ **c)** $-\frac{5}{2}$ **d)** $\frac{3}{4}$

## 2 Connaître les symboles liés aux inégalités

Vu au collège

Recopier et compléter les phrases suivantes.

**a)** $2 < 3$ signifie que 2 est ... à 3.
**b)** $a \geqslant 0$ signifie que $a$ est ... à 0.
**c)** $3 < x$ signifie que 3 est ... à $x$.
**d)** $10 > x$ signifie que $x$ est ... à 10.
**e)** $-2 \leqslant x$ signifie que $x$ est ... à $-2$.

## 3 Comparer des nombres

Vu au collège

Recopier et compléter par $>$ ou $<$.

**a)** $-4$ ... $-5$ **b)** $5{,}5$ ... $-2$ **c)** $3{,}142\,5$ ... $3{,}132\,6$
**d)** $\frac{1}{2}$ ... $\frac{1}{3}$ **e)** $\frac{9}{4}$ ... $\frac{37}{16}$ **f)** $1{,}01$ ... $1{,}005$
**g)** $2{,}5 \times 10^{-1}$ ... 0 **h)** $-a$ ... $a$ avec $a > 0$ **i)** $-a$ ... $a$ avec $a < 0$.

## 4 Résoudre des équations

Vu au collège

Résoudre les équations suivantes.

**a)** $-2x + 6 = 19$ **b)** $4x - 5 = x + 10$ **c)** $2(x + 5) = 5x + 26$

## 5 Évaluer et comparer

Vu au collège

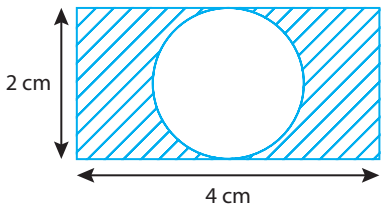
On considère l'expression $A = 5x - 3$.
Peut-on dire que le résultat de A est supérieur ou égal à 2 si on remplace $x$ :

**a)** par 2 ? **b)** par 0 ? **c)** par $-3$ ?

## 6 Calculer des aires

Vu au collège

Quelle est l'aire du domaine hachuré de la figure ci-dessous ?




## 7 Développer une expression

Vu au collège

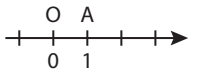
Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

$A = 5(2x + 3) - 2x$
$B = -3(x + 6)$
$C = -4(6 - 2x) + 2x + 7$

# Activités

15 min

## 1 Comprendre les intervalles




**1. a)** Tracer une droite graduée comme ci-contre. Prendre 1 cm pour unité.

**b)** Placer les points d'abscisses 5 et à –3 sur cette droite.

**c)** On note [–3 ; 5] l'ensemble des nombres réels compris entre –3 inclus et 5 inclus. Il s'agit d'un intervalle et –3 et 5 sont ses bornes.

Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui appartiennent à [–3 ; 5] ?

$$-3\ ;\ 10\ ;\ 5{,}01\ ;\ -2{,}99\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ \sqrt{2}.$$

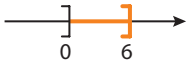
**d)** Surligner sur la droite les points correspondants aux nombres de [–3 ; 5].

**2.** On note ]–3 ; 5] l'ensemble des nombres réels compris entre –3 exclu et 5 inclus.

**Coup de pouce** On note que le crochet n'est pas orienté vers le –3 pour signifier que –3 est exclu.

D'après vous, comment note-t-on l'ensemble des nombres compris entre 4 exclu et 5 inclus ? l'ensemble des nombres compris entre 2 exclu et 6 exclu ?

**3.** On note [10 ; +∞[ l'ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à 10 et ]–∞ ; 4[ l'ensemble des nombres réels inférieurs à 4. Recopier et compléter le tableau suivant.

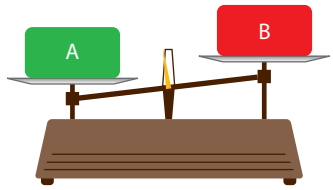
| Ensembles des nombres | Schéma | Inégalité<br>C'est l'ensemble des nombres $x$ tels que : | Intervalle |
|---|---|---|---|
| Compris entre 0 exclu et 6 inclus |   | $0 < x \leqslant 6$ | |
| | | $x > -5$ | |
| Inférieurs ou égaux à 3 | | | ]–∞ ; 3] |

**4.** **Pour aller plus loin** Écrire à l'aide d'un intervalle : $\mathbb{R}$ ; $\mathbb{R}+$ (l'ensemble des réels positifs) et $\mathbb{R}^-$ (l'ensemble des réels négatifs).

↪ Cours 1 p. 74

20 min

## 2 Manipuler des inégalités




**1.** On considère la balance ci-contre.

**a)** Laquelle des deux masses est la plus lourde ?

**b)** On rajoute une masse de 20 g de chaque côté de la balance. Cela changera-t-il le résultat de la comparaison ?

**2.** Recopier et compléter avec $<$ ou $>$ : « Si A $>$ B alors A + 20 … B + 20. »

**3.** Recopier et compléter.

**a)** Si $x \leqslant y$ alors $x + 30$ … $y + 30$.

**b)** Si $M > M'$ alors $M - 4$ … $M' - 4$.

**c)** Si $a \geqslant b$ alors $a + k$ … $b + k$.

**d)** Si $x > 2$ alors $x + 30$ ….

**4.** D'après vous, peut-on dire que « si $a \leqslant b$ alors $k \times a \leqslant k \times b$ » pour n'importe quels nombres réels $a$, $b$ et $k$ ?

**5.** **Pour aller plus loin** Un rectangle a pour longueur 6. Expliquer pourquoi, si sa largeur est inférieure ou égale à 2,1, alors son périmètre sera inférieur ou égal à 16,2.

↪ Cours 2 p. 76

Histoire des maths — 25 min

# 3 Résoudre une inéquation

## A ▸ Inéquation et solution

Une inéquation est une inégalité dans laquelle est présente une (ou des) inconnue(s). Résoudre une inéquation, c'est déterminer l'ensemble des valeurs des inconnues qui vérifient l'inégalité.

Al-Khwarizmi (780-850)

On considère l'inéquation $2x + 3 \geqslant 10$ d'inconnue réelle $x$.
Cette inéquation est une inéquation du 1er degré.

**1.** Expliquer pourquoi 5 est solution de l'inéquation $2x + 3 \geqslant 10$.

**2.** Proposer trois autres nombres solutions de cette inéquation et proposer un nombre qui n'est pas solution de cette inéquation.

## B ▸ Résolution d'une inéquation

Le savant arabe Al-Khwarizmi (env. 780 – env. 850) fut mathématicien, membre de la Maison de la Sagesse de Bagdad. Dans l'un de ses ouvrages, il présente certaines techniques permettant de résoudre les équations :

• *al-jabr* (qui a donné le nom *algèbre*) qui consiste, à éliminer les termes négatifs : par exemple, $4x - 5 = 2x + 9$ « devient » $4x - 5 + 5 = 2x + 9 + 5$, c'est-à-dire $4x = 2x + 14$.
• *al-muqabala* qui consiste à enlever une quantité similaire à chaque membre de l'équation : par exemple, $4x = 2x + 14$ « devient » $4x - 2x = 2x + 14 - 2x$, c'est-à-dire $2x = 14$.

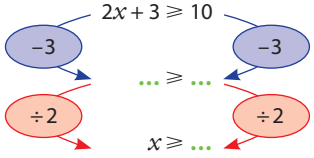
Enfin, on connaissait la division grâce à laquelle, par exemple, $2x = 14$ « devient » $x = 7$ (en divisant par 2 les deux membres de l'égalité).

**1.** D'après vous, les techniques *al-jabr* et *al-muqabala* sont-elles transposables à une inéquation ? Justifier.

**2.** La technique de la division à la fin est-elle transposable à une inéquation ? Qu'en est-il si on arrive à une telle étape ?

**3. a)** Recopier et compléter la résolution ci-contre de l'inéquation $2x + 3 \geqslant 10$.

**b)** Quelles sont les solutions ? Proposer plusieurs écritures.




**4.** Pour aller plus loin De façon analogue, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

**a)** $4x - 6 \leqslant 26$ **b)** $5x + 64 \leqslant 7x + 32$

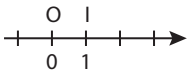
**Coup de pouce** Pour résoudre une inéquation du 1er degré, on s'appuie sur les techniques de résolution d'une équation du 1er degré en utilisant les règles de manipulation des inégalités.

↪ Cours 2 p. 76

Python — 25 min

# 4 Découvrir la valeur absolue

**1.** Tracer un axe muni d'une origine O et d'une graduation comme ci-contre, puis placer sur cet axe les points A(5), B(–5), C(7) et D(–3) (1 unité = 1 cm).




**2.** La distance entre 0 et 5 est la distance (en unité du repère) entre les points d'abscisses 0 et 5. On appelle **valeur absolue** de 5 cette distance et on la note $|5|$. Vérifier que $|-5| = 5$.

**3.** Vérifier que $|a| = a$ si $a$ est positif et $|a| = -a$ si $a$ est négatif.

**4. a)** Déterminer $|-3|$. **b)** Quel autre nombre $b$ vérifie $|b| = 3$ ?

**5.** Déterminer : **a)** $|13|$ **b)** $|-3{,}4|$ **c)** $|2 - \pi|$

**6. a)** D'après vous, que vaut la distance entre 3 et 7 ? entre –2 et 5 ? entre 12 et 5 ? entre –6 et –2 ?
**b)** D'après vous, comment calculer la distance entre le nombre $a$ et le nombre $b$ si $a > b$ ? si $a < b$ ?
**c)** Pour aller plus loin Écrire une fonction en langage **Python** qui renvoie la valeur de la distance entre le nombre $a$ et le nombre $b$.

↪ Cours 4 p. 78

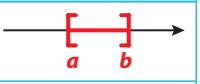
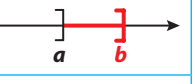
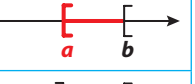
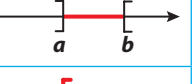
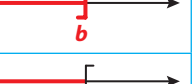
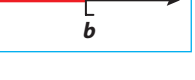
# 1 Intervalles

**Définition** **Intervalle**

**L'ensemble des nombres réels compris entre $a$ (inclus) et $b$ (inclus) est appelé intervalle et se note $[a\,;b]$. $a$ et $b$ sont les bornes de l'intervalle.**

**Son amplitude est l'écart entre les bornes $a$ et $b$ et est donnée par le calcul de $b-a$.**

**Notation** On peut définir d'autres types d'intervalles à l'aide du tableau suivant.

| Ensemble de réels $x$ tels que | Signification | Notation | Représentation |
|---|---|---|---|
| $a \leqslant x \leqslant b$ | $x$ est compris entre $a$ inclus et $b$ inclus | $x \in [a\,;b]$ |  |
| $a < x \leqslant b$ | $x$ est compris entre $a$ exclu et $b$ inclus | $x \in ]a\,;b]$ |  |
| $a \leqslant x < b$ | $x$ est compris entre $a$ inclus et $b$ exclu | $x \in [a\,;b[$ |  |
| $a < x < b$ | $x$ est compris entre $a$ exclu et $b$ exclu | $x \in ]a\,;b[$ |  |
| $x \geqslant a$ (ou $a \leqslant x$) | $x$ est supérieur ou égal à $a$ | $x \in [a\,;+\infty[$ | |
| $x > a$ (ou $a < x$) | $x$ est (strictement) supérieur à $a$ | $x \in ]a\,;+\infty[$ | |
| $x \leqslant b$ (ou $b \geqslant x$) | $x$ est inférieur ou égal à $b$ | $x \in ]-\infty\,;b]$ |  |
| $x < b$ (ou $b > x$) | $x$ est (strictement) inférieur à $b$ | $x \in ]-\infty\,;b[$ |  |

**Remarques**

- Quand le crochet est fermé (orienté vers la borne), la borne est incluse, quand il est ouvert (non orienté vers la borne), la borne est exclue.
- Le crochet est toujours ouvert en $+\infty$ et $-\infty$.
- L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est $]-\infty\,;+\infty[$, celui des nombres réels positifs s'écrit $\mathbb{R}+$ ou $[0\,;+\infty[$ et celui des nombres réels négatifs s'écrit $\mathbb{R}-$ ou $]-\infty\,;0]$.

**Comment lit-on ?**

$-\infty$ et $+\infty$ se lisent respectivement « moins l'infini » et « plus l'infini ». $\mathbb{R}+$ se lit « $\mathbb{R}$ plus » et $\mathbb{R}-$ « $\mathbb{R}$ moins ».

↪ Méthode 1 p. 75

**Exemple**

L'ensemble des nombres réels inférieurs ou égaux à 10 s'écrit $]-\infty\,;10]$.

**Définitions** **Intersection et réunion de deux intervalles**

- **L'intersection de deux intervalles I et J est l'ensemble noté $I \cap J$ qui contient les nombres qui appartiennent à I et à J.**
- **La réunion de deux intervalles I et J est l'ensemble noté $I \cup J$ qui contient les nombres qui appartiennent à I ou à J.**

**Comment lit-on ?**

$I \cap J$ se lit « I inter J » et $I \cup J$ se lit « I union J ».

↪ Méthode 2 p. 75

**Remarque** L'ensemble des nombres réels non nuls est noté $\mathbb{R}^*$ ou $]-\infty\,;0[ \cup ]0\,;+\infty[$.

# Exercices résolus

## Méthode 1 Utiliser la notation des intervalles

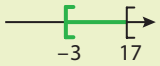
### Énoncé

**1. Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres réels $x$ tels que $-3 \leqslant x < 17$.**

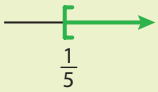
**2. Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres réels $x$ tels que $x$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{5}$.**

### Solution

**1.** L'intervalle correspondant est $[-3 ; 17[$. (1) (2)




**2.** L'intervalle correspondant est $\left[\frac{1}{5} ; +\infty\right[$. (1) (2)




### Conseils & Méthodes

(1) Faire un schéma pour représenter l'intervalle.

(2) Bien repérer si les bornes sont incluses ou exclues pour adapter l'orientation des crochets.

### À vous de jouer !

**1** Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres réels compris entre 2 inclus et 4 inclus.

**2** **1.** Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres réels $x$ tels que $-3 < x < 14$.

**2.** Le représenter sur une droite graduée.

↪ Exercices 53 à 59 p. 83

## Méthode 2 Déterminer une intersection ou une réunion d'intervalles

### Énoncé

**Déterminer l'intersection et la réunion des intervalles suivants.**

**a)** $[-4 ; 5]$ et $[0 ; 10]$ **b)** $]0 ; 5]$ et $[-2 ; 3]$ **c)** $[0 ; 4]$ et $[6 ; 8[$

### Solution

**a)** Schématiquement, on a : (1)

L'intersection des deux intervalles est l'ensemble des nombres qui appartiennent à $[-4 ; 5]$ **et** à $[0 ; 10]$ : on a $[-4 ; 5] \cap [0 ; 10] = [0 ; 5]$. (2)

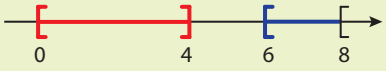
La réunion des deux intervalles est l'ensemble des nombres qui appartiennent à $[-4 ; 5]$ **ou** à $[0 ; 10]$ : on a $[-4 ; 5] \cup [0 ; 10] = [-4 ; 10]$. (3)

**b)** Schématiquement, on a : (1)

On obtient $]0 ; 5] \cap [-2 ; 3] = ]0 ; 3]$. (2) (4)

On obtient $]0 ; 5] \cup [-2 ; 3] = [-2 ; 5]$. (3)

**c)** Schématiquement, on a : (1)




On obtient $[0 ; 4] \cap [6 ; 8[ = \varnothing$ car il n'y a pas de nombre commun aux deux intervalles. (2)

La réunion $[0 ; 4] \cup [6 ; 8[$ ne peut pas être écrite d'une manière simplifiée.

### Conseils & Méthodes

(1) On peut faire un schéma pour s'aider.

(2) L'intersection est l'ensemble des nombres en commun aux deux intervalles : on considère donc ceux qui sont surlignés par les deux couleurs.

(3) La réunion est l'ensemble des nombres qui appartiennent à au moins l'un des deux intervalles : on considère donc ceux qui sont surlignés par l'une au moins des deux couleurs.

(4) 0 n'est pas dans l'intersection car exclu de $]0 ; 5]$ en rouge.

### À vous de jouer !

**3** Déterminer l'intersection et la réunion des intervalles $[-10 ; 5]$ et $[4 ; 12]$.

**4** Déterminer l'intersection et la réunion des intervalles.

**a)** $[10 ; 20[$ et $[0 ; 15[$ **b)** $[0 ; 8[$ et $]9{,}5 ; 10]$

↪ Exercices 60 à 65 p. 84

# 2 Inégalités et inéquations

## Règles Manipulation des inégalités

**$a$, $b$, $c$ et $k$ sont des nombres réels (avec $k \neq 0$).**

- **Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité conserve l'ordre de l'inégalité.**

$$\text{Si } a < b \text{ alors } a + c < b + c \text{ et } a - c < b - c.$$

- **Multiplier ou diviser par un même nombre strictement positif conserve l'ordre de l'inégalité.**

$$\text{Si } k > 0 \text{ et } a < b \text{ alors } ka < kb \text{ et } \frac{a}{k} < \frac{b}{k}.$$

- **Multiplier ou diviser par un nombre strictement négatif change l'ordre de l'inégalité.**

$$\text{Si } k < 0 \text{ et } a < b \text{ alors } ka > kb \text{ et } \frac{a}{k} > \frac{b}{k}.$$

**Remarque** Les propriétés restent identiques en utilisant des inégalités larges ($\leqslant$ ou $\geqslant$) au lieu des inégalités strictes ($<$ et $>$) ou des encadrements.

**Exemple**

Si $a < 10$ alors $-6a > (-6) \times 10$ en multipliant par $(-6)$ (qui est strictement négatif) donc $-6a > -60$.

↪ Méthode 3 p. 77

## Propriété Inégalité et somme

**Soit $a$, $b$, $c$ et $d$ quatre nombres réels tels que $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.**

**Remarque** Attention cela ne fonctionne pas avec les autres opérations.
Par exemple, $a - c < b - d$ n'est pas vraie en général : $15 < 16$ et $8 < 11$ mais $15 - 8 > 16 - 11$.

## Définition Inéquation

**Une inéquation est une inégalité dans laquelle est présente une inconnue (ou des inconnues).**

**Résoudre une inéquation revient à déterminer l'ensemble de toutes les valeurs de l'inconnue qui vérifient l'inégalité.**

**Remarque** Une inéquation de la forme $ax + b < cx + d$ (où $x$ est l'inconnue et $a$, $b$, $c$, $d$ sont des nombres réels avec $a$ et $b$ tous deux non nuls) est appelée **inéquation du 1er degré**.

**Exemple**

$3x + 4 < 7x + 9$ ou $2x + 6 \geqslant x - 5$ sont des exemples d'inéquations d'inconnue $x$ (qui font partie de la famille des inéquations du 1er degré).

## Règles Résolution d'une inéquation du 1er degré

**Si on applique l'une des règles de manipulation des inégalités aux deux membres d'une inéquation, on obtient une inéquation qui lui est équivalente, c'est-à-dire qui a le même ensemble de solutions.**

**Remarque** On se sert du symbole $\Leftrightarrow$ pour signifier « est équivalent à ».

↪ Méthode 4 p. 77

## Définition Modélisation d'un problème

**Modéliser un problème par une inéquation, c'est écrire une inéquation en lien avec les contraintes exposées par le problème.**

↪ Résolution de problèmes p. 80

# Exercices résolus

## Méthode 3 Manipuler des inégalités

### Énoncé

**1. Soit $x$ un nombre réel tel que $x > 4$.**

**Quelles inégalités peut-on en déduire pour $x + 6$ et pour $\frac{x}{2}$ ?**

**2. Soit $a$ un nombre réel tel que $2 < a \leqslant 9$. Donner un encadrement de $-3a$.**

### Solution

**1.** En ajoutant 6 à chaque membre de l'inégalité, on obtient $x + 6 > 4 + 6$, c'est-à-dire $x + 6 > 10$. (1)

En divisant par 2 chaque membre, on obtient $\frac{x}{2} > \frac{4}{2}$, c'est-à-dire $\frac{x}{2} > 2$. (2)

**2.** En multipliant par (–3) chacun des membres des inégalités de départ ($2 < a$ et $a \leqslant 9$), on obtient $2 \times (-3) > -3a \geqslant 9 \times (-3)$, c'est-à-dire $-6 > -3a \geqslant -27$. (3)

### Conseils & Méthodes

1. Ajouter un même nombre à chaque membre ne change pas le sens.
2. Diviser par un même nombre strictement positif chaque membre ne change pas le sens.
3. Multiplier par un même nombre strictement négatif chaque membre change le sens.

### À vous de jouer !

**5** Soit $t \geqslant 10$. Quelles inégalités peut-on en déduire pour $2{,}5t$ et $t - 7$ ?

**6** Sachant que $-4 < x < 0$, donner un encadrement de $\frac{x}{4}$ et $x + 12$.

Exercices 66 à 80 p. 84

## Méthode 4 Résoudre une inéquation du 1er degré

VIDÉO ALL MATHS PARNAK
Comprendre une méthode
www.lienmini.fr/8270-9

### Énoncé

**Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.**

**a)** $6x - 8 < 2x + 16$ **b)** $-3x - 9 \leqslant 1$

### Solution

**a)** On a : (1)

$6x - 8 < 2x + 16$

$-2x$ et $-2x$

$6x - 2x - 8 < 16$

$4x - 8 < 16$

$+8$ et $+8$

$4x < 16 + 8$

$4x < 24$

$\div 4$ et $\div 4$ (2)

$x < \frac{24}{4}$

$x < 6$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = ]-\infty ; 6[$.

**b)** On a : (1)

$-3x - 9 \leqslant 1$

$+9$ et $+9$

$-3x \leqslant 1 + 9$

$-3x \leqslant 10$

$\div(-3)$ et $\div(-3)$ (3)

$x \geqslant \frac{10}{-3}$

$x \geqslant -\frac{10}{3}$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left[-\frac{10}{3} ; +\infty\right[$.

### Conseils & Méthodes

1. Pour résoudre une inéquation du 1er degré on applique les mêmes techniques que pour la résolution d'une équation du 1er degré associées aux règles de manipulation des inégalités.
2. 4 est positif donc le sens de l'inégalité ne change pas lorsqu'on divise par 4.
3. –3 est négatif donc le sens de l'inégalité change lorsqu'on divise par –3.

### À vous de jouer !

**7** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $5x + 7 \leqslant 27$.

**8** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-3x - 12 \geqslant 24$.

Exercices 87 à 96 p. 86

# 3 Comparaison

**Définition** **Comparaison de quantités**

**Comparer deux quantités A et B revient à savoir si A > B, si A < B ou si A = B.**

**Si les quantités A et B dépendent, par exemple, d'une variable $x$, il s'agira de déterminer les valeurs de $x$ pour lesquelles A > B, les valeurs de $x$ pour lesquelles A < B, et les valeurs de $x$ pour lesquelles A = B.**

**Remarque** Pour comparer des quantités ou des expressions, on pourra résoudre des inéquations.

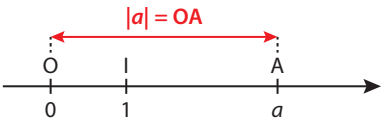
↪ Méthode 5 p. 79

# 4 Valeur absolue d'un nombre réel

On considère une droite graduée munie d'une origine O. Sur cette droite, on considère le point A d'abscisse $a$ et le point B d'abscisse $b$.

**Définition** **Valeur absolue et distance**

**La valeur absolue de $a$, notée $|a|$, est le nombre égal à la distance OA.**




**Propriété** **Valeur absolue et signe**

**Si $a \geqslant 0$, alors $|a| = a$ et, si $a \leqslant 0$, alors $|a| = -a$.**

**Comment lit-on ?**

$|a|$ se lit « **valeur absolue de $a$** ».

**Exemple**

On a $|3| = 3$ et $|-2{,}8| = -(-2{,}8) = 2{,}8$.

**Propriété** **Valeur absolue et racine carrée**

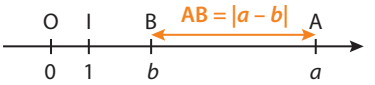
**Pour tout nombre réel $a$, on a $\sqrt{a^2} = |a|$.**

**Définition** **Distance entre deux points**

**On appelle distance entre les réels $a$ et $b$ la distance AB.**

**Propriété** **Distance et valeur absolue**

**La distance entre $a$ et $b$ est égale à $|a - b|$.**




**Exemple**

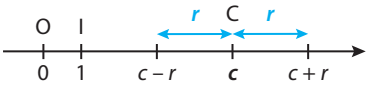
Sur le schéma on peut remarquer que la distance entre –1 et 7 est 8 et que $|-1 - 7| = |-8| = 8$.

**Propriétés** **Intervalle, centre et rayon**

**Si un intervalle peut s'écrire sous la forme $[c - r\,;\, c + r]$ où $c$ est un nombre réel et $r$ un nombre réel strictement positif, alors on a :**

$$x \in [c - r\,;\, c + r] \Leftrightarrow |x - c| \leqslant r.$$

**Dans ce cas le nombre $c$ est appelé centre et le nombre $r$ rayon de l'intervalle.**




↪ Méthode 6 p. 79

# Exercices résolus

## Méthode 5 Comparer deux expressions

**Énoncé**

**On considère les expressions A = 50$x$ + 10 et B = 25$x$ – 115 pour tout nombre réel $x$.**
**Comparer les expressions de A et B suivant les valeurs de $x$.**

**Solution**

• $A > B \Leftrightarrow 50x + 10 > 25x - 115 \Leftrightarrow 25x + 10 > -115$

$\Leftrightarrow 25x > -125 \Leftrightarrow x > -\dfrac{125}{25} \Leftrightarrow x > -5.$ (1)

A est donc supérieur à B si $x > -5$.

• $A = B \Leftrightarrow 50x + 10 = 25x - 115 \Leftrightarrow 25x + 10 = -115$

$\Leftrightarrow 25x = -125 \Leftrightarrow x = -\dfrac{125}{25} \Leftrightarrow x = -5.$

A est donc égal à B si $x = -5$.

• A est donc inférieur à B si $x < -5$. (2)

**Conseils & Méthodes**

(1) On pose puis on résout l'inéquation A > B et l'équation A = B pour trouver les valeurs de $x$ correspondantes à chacun des cas.

(2) On peut ne pas faire le cas A < B car il se déduit des deux autres cas.

**À vous de jouer !**

**9** Comparer les expressions C = 4$x$ + 9 et E = –$x$ + 44 pour tout nombre réel.

**10** Comparer les expressions R = 15 – 2$a$ et S = $a$ + 14 pour tout nombre réel $a$.

↪ Exercices 97 à 102 p. 86

## Méthode 6 Établir un lien entre intervalle et valeur absolue

**Énoncé**

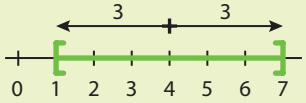
**1. Déterminer sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres réels $x$ tels que $|x - 4| \leqslant 3$.**

**2. On considère l'intervalle I = [6 ; 20]. Écrire une inégalité sous la forme $|x - c| \leqslant r$ (où $c$ et $r$ sont deux nombres à déterminer) vérifiée par tous les nombres $x$ appartenant à I.**

**Solution**

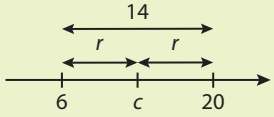
1. $|x - 4| \leqslant 3$ : on cherche donc les valeurs de $x$ telles que la distance entre $x$ et 4 soit inférieure ou égale à 3.

Schématiquement, on a : (1)




L'intervalle est donc [1 ; 7].

2. On a schématiquement, avec $a = 6$ et $b = 20$ :




Le rayon de [6 ; 20] est $r = \dfrac{20 - 6}{2} = 7.$ (2)

Le centre de [6 ; 20] est $c = 20 - 7 = 20 - 7 = 13.$ (3)

Ainsi, $x \in [6 ; 20] \Leftrightarrow x \in [13 - 7 ; 13 + 7] \Leftrightarrow |x - 13| \leqslant 7.$

**Conseils & Méthodes**

(1) Quand on a $|x - c| \leqslant r$, on place $c$ sur l'axe et on regarde à « une distance de $r$ de chaque côté de $c$ ».

(2) Avec $b > a$, l'amplitude de l'intervalle vaut $b - a$ et donc le rayon vaut $\dfrac{b - a}{2}$.

(3) Le centre de l'intervalle peut se calculer en faisant $b - r$ ou $a + r$ d'après le schéma.

**À vous de jouer !**

**11** 1. Déterminer l'intervalle des nombres $x$ vérifiant $|x - 5| \leqslant 1$.

2. Compléter : $x \in [0 ; 10] \Leftrightarrow |x - \ldots| \leqslant \ldots$ .

**12** 1. Déterminer l'intervalle des nombres $x$ vérifiant $|x - 10| \leqslant 20$.

2. Compléter : $x \in [25 ; 37] \Leftrightarrow |x - \ldots| \leqslant \ldots$ .

↪ Exercices 115 à 119 p. 88

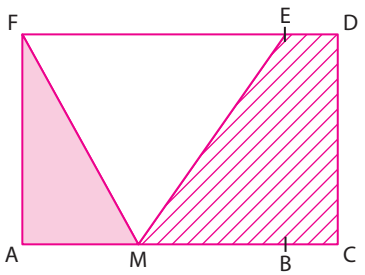
# Exercices résolution de problèmes

## J'apprends à modéliser une situation à l'aide d'une indéterminée

**Réflexe 1**
Identifier l'indéterminée et sa nature.

**Réflexe 2**
Traduire l'énoncé à l'aide de cette indéterminée.

### Énoncé




ACDF est un rectangle tel que AC = 6 et AF = 4.
B ∈ [AC] et E ∈ [FD] tels que CB = 1 et DE = 1.
M est un point quelconque du segment [AB].
Morgan veut chercher à quelle distance du point A il doit placer le point M pour que l'aire hachurée soit supérieure ou égale à l'aire du triangle AMF.
**Quelle inéquation doit-il poser et résoudre pour répondre à ce problème ?**

### Solution commentée

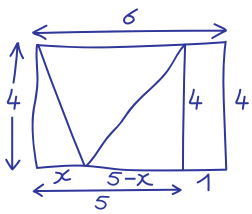
• **Étape 1** Je repère que je dois chercher les valeurs possibles de la distance entre A et M.

L'indéterminée est donc la distance AM que je vais noter $x$. Ces valeurs possibles sont des « inconnues ».

**Réflexe 1**

• **Étape 2** Je cherche les formules « en fonction de $x$ » des deux aires dont parle l'énoncé. **Réflexe 2**

*Brouillon*




$\text{Aire(AMF)} = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{x \times 4}{2}$

Aire(MCDE) = Aire(BCDE) + Aire(MBE)

*Réponse rédigée*

Je pose $x = AM$.

Alors $\text{Aire(AMF)} = \dfrac{AM \times AF}{2}$

$= \dfrac{x \times 4}{2}$

$= 2x$

Et Aire(MCDE) = Aire(BCDE) + Aire(MBE)

$= 4 \times 1 + \dfrac{(5 - x) \times 4}{2}$

$= 4 + \dfrac{20 - 4x}{2}$

$= 4 + 10 - 2x$

$= 14 - 2x$

L'inéquation que doit poser Morgan est donc :
$14 - 2x \geqslant 2x$.

## Je m'entraîne à modéliser une situation à l'aide d'une indéterminée

### 13 Inéquation et contrainte

Un trajet en train entre deux villes de France coûte 9,10 euros (aller simple) si on achète une carte de réduction valant 30 euros, au lieu de 12,70 euros (aller simple) au tarif normal. Lilia consacre un budget d'au plus 140 euros pour ses trajets entre ces deux villes. Elle possède la carte de réduction. Quelle inéquation doit-elle résoudre pour connaître le nombre de trajets au maximum qu'elle peut faire avec son budget ?

### 14 Inéquation et comparaison

Dans le contexte de l'exercice précédent, déterminer l'inéquation à résoudre pour trouver le nombre de trajets à partir duquel l'achat d'une carte de réduction devient intéressant.

### 15 Hauteur d'un triangle équilatéral

On cherche à déterminer les valeurs possibles pour la longueur d'un côté d'un triangle équilatéral afin que celui-ci ait une hauteur supérieure ou égale à 12. Écrire l'inéquation à résoudre.

**CARTES FLASH**
Acquérir des automatismes
www.lienmini.fr/8270-6

# Exercices automatismes

## Rituel 1

### Effectuer mentalement des calculs simples avec des décimaux

**16** Calculer $3{,}32 + 2{,}59$ et $2 \times 5{,}46$.

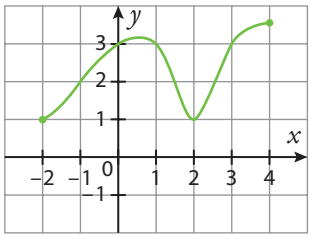
### Effectuer une application numérique d'une formule mathématique

**17** Substituer $R$ par $-2$ dans la formule $5R^2 - 4R$.

**18** Substituer $x$ par $-10$ dans la formule $2x^2 + 3x + 1$.

### Estimer graphiquement des valeurs

On considère une fonction $f$ dont on donne la courbe représentative dans un repère.



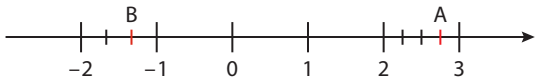

**19** Quelle est l'image de 1 par $f$ ?

**20** Quels sont les antécédents de 3 par $f$ ?

## Rituel 2

### Repérer un nombre rationnel sur une droite graduée

On considère la droite ci-dessous sur laquelle on a placé les points A et B. Les traits tracés entre deux unités sont régulièrement espacés.

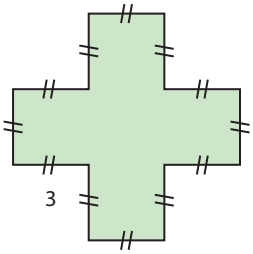



**21** Quel nombre correspond à A ?

**22** Quel nombre correspond à B ?

### Calculer des aires et périmètres simples

**23** Quel est le périmètre de la figure ci-dessous ?




**24** Donner l'aire d'un triangle de base 4 cm et de hauteur 7 cm.

### Passer d'une écriture à une autre

**25** Écrire $\frac{7}{5}$ sous forme décimale.

## Rituel 3

### Utiliser un ordre de grandeur

**26** Donner un ordre de grandeur de $3{,}9 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-5}$.

**27** Vrai ou faux ?
$5{,}766 \times 10^4 + 2{,}12 \times 10^{-3}$ est proche de 57 660.

### Calculer des aires et périmètres simples

**28** Donner le périmètre et l'aire d'un rectangle de longueur 4 cm et de largeur 2 cm.

**29** Quel est le volume d'un cube de 3 cm de côté ?

### Passer d'une écriture à une autre

**30** Écrire 4,6 sous la forme d'une fraction irréductible.

**31** Écrire $\frac{9}{4}$ sous la forme d'un nombre décimal.

## Rituel 4

### Effectuer mentalement des calculs simples avec des décimaux

**32** Calculer $6{,}5 - 2{,}32$.

**33** Calculer $6{,}24 \div 3$.

### Effectuer une application numérique d'une formule mathématique

**34** Remplacer $x_1$ par 1 000 dans le calcul suivant : $(x_1)^2 + 2$.

**35** Substituer $R$ par 4 et $T$ par 1,5 dans $\frac{3RT}{R + 2T}$.
Écrire le résultat sous forme d'une fraction.

↪ Travaillez les méthodes des automatismes p. 8

# Exercices d'entraînement

## Je consolide mes acquis

### 36 Oral Lecture d'inégalité

Lire à haute voix les écritures mathématiques ci-dessous en commençant par « $x$ est ».

**a)** $x > 6$ **b)** $x \leqslant 4$

**c)** $-3 \leqslant x \leqslant 5$ **d)** $25 \geqslant x$

### 37 Nombres décimaux, encadrements

**1.** Donner une valeur approchée à 0,01 près de 18,756.

**2.** Donner un encadrement de 4,768 par deux nombres décimaux au centième près.

**3.** Donner un encadrement de 13,57 au dixième.

### 38 Valeur approchée, encadrement

**1.** Pour chacun des nombres suivants, donner une valeur approchée au centième près à l'aide de la calculatrice.

**a)** $2\pi$ **b)** $2\sqrt{2}$ **c)** $\frac{4}{3}$

**2.** Donner un encadrement au dixième de chacun des nombres ci-dessus.

### 39 Valeurs approchées et aire

**1.** Un rectangle a pour largeur 3,34 cm et pour longueur 5,67 cm.

**a)** Donner une valeur approchée par défaut de l'aire du rectangle à 0,01 près.

**b)** Donner une valeur approchée par excès de l'aire du rectangle à 0,01 près.

**2.** Un disque a pour rayon 5 cm. Donner une valeur approchée de son aire au millième près.

### 40 Équation du 1er degré (1)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

**a)** $2x = 13$ **b)** $9 - x = 5$

**c)** $4x = 0$ **d)** $-x - 2 = 6 - 7x$

### 41 Équation du 1er degré (2)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

**a)** $3x + 5 = 4x - 7$

**b)** $2x - 9 = 8x + 3$

**c)** $-2x + 3 = 3x - 1$

**d)** $1 + \frac{3}{10}x = 4 - \frac{2}{5}x$

**e)** $4x - 5 = 9x + 4$

**f)** $x^2 + 3 - x = x^2 + 10x - 7$

**g)** $5x = 5(x - 2) + 3$

**h)** $(x - 7)^2 = (x + 4)^2$

### 42 Périmètre et équation

La longueur d'un rectangle mesure 2 cm de plus que sa largeur.

**1.** Exprimer le périmètre de ce rectangle en fonction de la largeur $\ell$.

**2.** Quelle doit être la largeur de ce rectangle pour que le périmètre du rectangle soit égale à 26 cm ?

### 43 Scratch

Algo

On considère le programme Scratch ci-dessous.

On donne ci-dessous son affichage obtenu avec le stylo en position d'écriture.

**1.** Quel est le périmètre de cette figure exprimé en nombre de pas ?

**2.** Que faudrait-il modifier dans ce programme pour que les triangles aient des côtés de longueur 30 pas ?

**3.** Par quel(s) nombre(s) peut-on alors remplacer le 6 de la deuxième ligne du programme afin que le périmètre de la figure soit égal à 270 pas ?

### 44 Comparaison de volume

**1.** Calculer le volume d'une boule de rayon 3 cm. En donner une valeur approchée au dixième près.

**2.** Calculer le volume d'une pyramide ayant pour base un carré de côté 5,5 cm et pour hauteur 10 cm. En donner une valeur approchée au dixième près.

**3.** Comparer les volumes de ces deux solides.

## Questions de cours

**45** **1.** Dire à l'oral à quoi correspond [5 ; 10[.
**2.** Comment écrit-on « l'ensemble des nombres réels compris entre 4 exclu et 21 exclu » ?
**3.** La notation suivante est-elle correcte ? ]9 ; +∞]
**4.** Comment écrit-on « l'ensemble des nombres réels $x$ tels que $0 \leqslant x \leqslant 3$ » ?

**46** **1.** Comment est le crochet en $-\infty$ ou en $+\infty$ ?
**2.** Qu'est-ce que $\mathbb{R}^-$ ? En donner une autre notation.
**3.** Comment indiquer dans un intervalle que l'une de ces bornes est exclue ?

**47** Rappeler à l'oral les règles de manipulation, d'opérations sur les inégalités.

**48** **1.** Qu'est-ce que la valeur absolue d'un nombre réel ?
**2.** Peut-on calculer la valeur absolue de tous les nombres réels ?

## Appartenance à un intervalle

**49** Donner tous les nombres entiers appartenant à chacun des intervalles suivants.
**a)** [4 ; 10] **b)** [2,1 ; 5,2] **c)** ]3 ; 7]

**50** On considère l'intervalle I = [0 ; 7[.
**1.** Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui appartiennent à I ? 0 ; –1 ; 6,5 ; 5,99 ; 6,999 ; 7 ; 7,1 ; $5\sqrt{2}$ ; $2\pi$
**2.** Proposer trois nombres décimaux ayant chacun deux décimales appartenant à I.

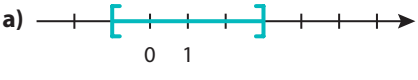
**51** Recopier et compléter par $\in$ ou $\notin$.
**a)** 1,4 … [0 ; 7] **b)** 6 … $\left[\frac{7}{3} ; +\infty\right[$ **c)** –3 … ]–∞ ; –3,5[

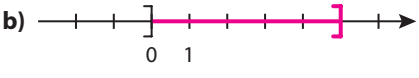
**52** Sans calculatrice, dire si $\frac{2}{3}$ appartient aux intervalles suivants.
**a)** $\left[0 ; \frac{4}{5}\right]$ **b)** $\left[\frac{3}{5} ; 1\right]$ **c)** $\left[\frac{1}{3} ; \frac{2}{5}\right]$

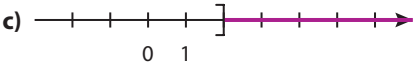
## Notation des intervalles

Méthode 1 p. 75

**53** On considère des droites graduées sur lesquelles on a marqué des ensembles de nombres.
Donner l'intervalle correspondant.

**a)**



**b)**



**c)**



**54** Représenter sur une droite graduée chacun des intervalles suivants.
**a)** ]1 ; 6] **b)** [–0,5 ; 3,2]
**c)** ]–∞ ; 2] **d)** [0 ; +∞[

**55** Représenter sur une droite graduée et décrire, à l'aide d'un intervalle, chacun des ensembles de nombres réels $x$ tels que :
**a)** $0 \leqslant x \leqslant 3$ **b)** $-2 < x < 1$
**c)** $x \leqslant 9$ **d)** $x > -3{,}5$

**56** Écrire les inégalités vérifiées par les réels $x$ pour chacun des cas suivants.
**a)** $x \in [0 ; 1{,}2]$ **b)** $x \in \left]-\frac{5}{3} ; 3\right[$
**c)** $x \in [4{,}73 ; +\infty[$ **d)** $x \in ]-\infty ; 0[$

**57** Les propositions conditionnelles suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Logique
**a)** Si $\frac{1}{4} < x$ alors $x \in [0{,}2 ; +\infty[$.
**b)** Si $x < \pi$ alors $x \in ]-\infty ; 3{,}1]$.
**c)** Si $x \in [0{,}8 ; 2]$ alors $x \in [0{,}7 ; 1]$.
**d)** Si $x \in \left[\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right]$ alors $x \in [0 ; 1]$.

**58** D'après l'Insee, on peut établir le tableau suivant de répartition du niveau de vie annuel des Français (en euros) en 2019. SES

| Inférieur ou égal à 11 660 € | Entre 11 661 et 22 040 € | Entre 22 041 et 39 930 € | Supérieur à 39 930 € |
|---|---|---|---|
| 10 % | 40 % | 40 % | 10 % |

Le niveau de vie est égal au revenu disponible du ménage divisé par le nombre de consommateurs au sein du foyer.
**1.** Donner les intervalles associés aux différents niveaux de vie donnés dans ce tableau.
**2.** Quel est le pourcentage de personnes dont le niveau de vie est dans l'intervalle [0 ; 39 930] ?

**59** **1.** Donner les amplitudes des intervalles suivants.
**a)** [5 ; 100] **b)** $\left[1 ; \frac{4}{3}\right]$
**c)** $\left[2-\frac{1}{3} ; 2+\frac{1}{3}\right]$ **d)** $\left[5-\frac{1}{n} ; 5+\frac{1}{n}\right]$ où $n \in \mathbb{N}^*$
**2.** Donner un intervalle d'amplitude 0,1 contenant $\sqrt{2}$.
**3.** Donner un intervalle d'amplitude $10^{-2}$ contenant $\pi$.

# Exercices d'entraînement

## Intersection et réunion d'intervalles

Méthode 2 p. 75

**60** Soit I = [–6 ; 8] et J = ]2 ; 100[.
Dire si chacun des nombres suivants appartient à I, à J, à I ∩ J, à I ∪ J.

**a)** –10 **b)** –6 **c)** –0,5 **d)** 2
**e)** 8,1 **f)** 99,9 **g)** 1 000 **h)** 5

**61** Déterminer l'intersection et la réunion des intervalles suivants.

**a)** [20 ; 25[ et [14 ; 21[ **b)** ]–∞ ; 7,5] et [10 ; 22]
**c)** ]–1 ; +∞[ et ]–∞ ; 1[ **d)** ]0 ; 1] et [0,5 ; 0,7]

**62** Simplifier, lorsque c'est possible, l'écriture des ensembles suivants.

**a)** [–1 ; 3,5] ∩ [1,7 ; 7] **b)** ]–∞ ; – π] ∪ [–3π ; π[
**c)** ]–7,1 ; 2] ∩ [2 ; +∞[ **d)** [–5 ; 0] ∪ [3 ; +∞[

**63** Utiliser les intervalles (on pourra utiliser le symbole de réunion) pour décrire, si possible, les ensembles de nombres $x$ tels que :

**a)** $x < 1$ et $x \geqslant -3$ **b)** $x \leqslant -2$ ou $x > 1$
**c)** $x \leqslant 3{,}5$ ou $x < -1$ **d)** $x \geqslant \pi$ et $x \leqslant 3$

**64** On considère le programme en langage **Python** suivant. Python

```
x=7.6
if x<=5 and x>-1:
    y=222
else:
    y=-2
```

**1.** Que vaut $y$ à la fin de son exécution ?

**2.** Donner l'ensemble des valeurs de $x$ pour lesquelles $y$ vaut 222 à la fin de l'exécution.

**3.** Écrire un programme en langage **Python** qui, après exécution, permette qu'une variable $y$ soit égale à 5 si $x \in ]6 ; 8{,}1[$ et 0 sinon.

**65** On considère le programme en langage **Python** suivant. Python

```
x=float(input("Saisir une valeur de x :"))
if x<=-1 or x>=3:
    print("Gagné !")
else:
    print("Perdu…")
```

**1.** Donner l'ensemble des valeurs de $x$ pour lesquelles le programme affiche `Gagné !`.

**2.** Modifier le programme précédent pour qu'il affiche `Gagné !` si le nombre appartient à ]–∞ ; 4[ ∪ ]5 ; +∞[ et `Perdu...` sinon.

**3.** Modifier le programme précédent pour qu'il affiche `Gagné !` si le nombre appartient à [0 ; 4[ et `Perdu...` sinon.

## Manipulation des inégalités

Méthode 3 p. 77

**66** Soit $x$ un nombre réel tel que $x \leqslant 1\,000$.
Quelle inégalité peut-on en déduire pour :

**a)** $1{,}5x$ ? **b)** $\frac{x}{50}$ ? **c)** $-\frac{1}{10}x$ ? **d)** $x - 30$ ?

**67** Soit $x$ un nombre réel tel que $2 \leqslant x \leqslant 4$.
Donner un encadrement des expressions suivantes.

**a)** $x - 10$ **b)** $1{,}5x$ **c)** $x + 15$ **d)** $-4x$

**68** **1.** Marco affirme qu'il a une somme $S$ entre 100 et 160 euros sur un compte en banque.
Ses parents ajoutent 30 euros sur ce compte.
Que peut-il affirmer maintenant ?
**2.** Marco dépense 80 euros pour acheter un vélo d'occasion.
Que peut-il dire de la somme restant sur son compte ?

**69** Dans un exercice, Lou a obtenu un résultat à un calcul S qu'elle a encadré : $4{,}6 < S < 4{,}7$.
Elle a oublié de multiplier ce résultat par (–2).
Quel est l'encadrement de son nouveau résultat ?

**70** Soit $a$ un nombre réel tel que $-3 \leqslant a \leqslant 1{,}5$.
**1.** Donner un encadrement de $2a$, puis en déduire un encadrement de $2a - 8$.
**2.** À l'aide de deux étapes comme dans la question **1.**, déterminer un encadrement de :

**a)** $3a + 9$ **b)** $-4a + 1$ **c)** $\frac{a+3}{2}$

**71** On sait que $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$. Sans calculatrice, donner un encadrement des nombres suivants.

**a)** $2\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{2} - 0{,}5$ **c)** $\sqrt{2} + 3$ **d)** $5 - 2\sqrt{2}$

**72** Soit $m \in ]-\infty ; 4]$. Donner une inégalité vérifiée par :

**a)** $3m$ **b)** $m - 1$ **c)** $3m - 2$

**73** Soit $x \in [1 ; 2[$. À quel intervalle appartient :

**a)** $2x$ ? **b)** $-0{,}5x$ ? **c)** $3x - 1$ ? **d)** $5 - 2x$ ?

**74** Soit $x$ un nombre réel tel que $0 \leqslant x \leqslant 12$.
À quel intervalle appartient le résultat de chaque expression suivante ?

**a)** $\frac{2x+8}{5}$ **b)** $4x$ **c)** $\frac{8-x}{2}$ **d)** $10 - 0{,}2x$

**75** **1.** Donner une valeur approchée de 5,764 à $10^{-2}$ près.
**2.** **a)** Donner les valeurs arrondies des nombres suivants à $10^{-2}$ près : 10,536 ; 10,5352 ; 10,124 ; 10,5447 ; 10,54499.
**b)** $m$ est un nombre dont une valeur arrondie à $10^{-2}$ près est 10,54. Donner un encadrement de $m$ à l'aide de deux nombres ayant trois chiffres après la virgule.
**c)** En déduire un encadrement de 1 000 $m$.

**76** **1.** Calculer la valeur exacte du périmètre $p$ d'un cercle de rayon 10 m.

**2.** Donner un encadrement de $p$ en utilisant l'encadrement :

**a)** $3{,}1 < \pi < 3{,}2$

**b)** $3{,}141\,5 < \pi < 3{,}141\,6$

**3.** Quel encadrement de $\pi$ faut-il prendre pour obtenir $p$ avec une précision de 1 cm ?

**77** En 2022, le revenu imposable $R$ de Mme Lucas appartient à l'intervalle [25 710 ; 73 516] (en euros). Le montant de l'impôt sur le revenu est donné par la formule $I = 0{,}3R - 5\,994{,}14$.
Donner un encadrement du montant de l'impôt de Mme Lucas.

**78** Physique

Théo roule à une vitesse comprise entre 15 et 17 km/h sur son vélo. Quelle distance peut-il avoir parcourue en 3 h 30 min ?

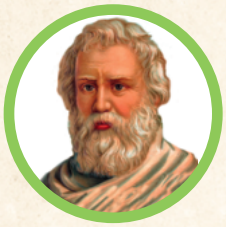
**79** Physique

Un conducteur ohmique de résistance $R = 40\ \Omega$ est traversé par un courant électrique d'intensité $I = 90$ mA mesurée à 1 % près.
Que peut-on dire de la tension $U$ en volts aux bornes du conducteur ohmique sachant que $U = RI$ (où $U$ est en volts, $R$ en ohms et $I$ en ampères) ?

**80** Histoire des maths

Archimède est un grand scientifique du IIIe siècle av. J.-C. Il était par exemple physicien, astronome, mathématicien, ingénieur. Grâce à une méthode qui lui est attribuée, il a pu encadrer la valeur de $\pi$ entre deux fractions :

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$



Archimède (287-212 av. J.-C.)

**1.** En utilisant cet encadrement, encadrer entre deux fractions le périmètre d'un cercle de diamètre 10 mètres.

**2.** En effectuant les divisions à la main, donner une valeur approchée à $10^{-2}$ de $\frac{2\,230}{71}$ et de $\frac{220}{7}$.

**3.** En déduire un encadrement du périmètre de la question **1.** au dixième.

**4.** Pour aller plus loin Préparer un exposé expliquant la méthode d'Archimède permettant de parvenir à cet encadrement.

## Opérations sur les inégalités

**81** Soit $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $a < 7$ et $b < 8$.
Que peut-on en déduire pour :
**a)** $a + b$ ? **b)** $2a$ ? **c)** $2a + b$ ?

Coup de pouce Utiliser la propriété : si $a$, $b$, $c$ et $d$ sont quatre nombres réels tels que $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$.

**82** Soit $x$ et $y$ deux nombres réels tels que $5 \leqslant x \leqslant 6$ et $2 \leqslant y \leqslant 3$.
**1.** Donner un encadrement de $3x$.
**2.** Donner un encadrement de $4y$.
**3.** En déduire un encadrement de $3x + 4y$.

**83** Soit $x$ et $y$ deux nombres réels tels que $1{,}4 \leqslant x \leqslant 3{,}2$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$.
Que peut-on en déduire pour :
**a)** $x + y$ ? **b)** $x + 3y$ ? **c)** $x - y$ ? **d)** $2x - 3y$ ?

**84** La largeur $\ell$ et la longueur $L$ d'un rectangle sont telles que $2{,}4 \leqslant \ell \leqslant 2{,}5$ et $5{,}54 \leqslant L \leqslant 5{,}56$.
**1.** Donner un encadrement du périmètre $p$ de ce rectangle.
**2.** Donner un encadrement de $p$ entre deux nombres décimaux ayant une décimale.

**85** Tom sait que le bénéfice $x$ (en euros), de sa dernière vente de chocolats est compris dans l'intervalle [190 ; 200]. De plus, il sait que le bénéfice $y$ de sa dernière vente de jus de pommes est tel que $56 \leqslant y \leqslant 60$. L'année prochaine, il prévoit de multiplier les bénéfices de sa vente de chocolats par 1,3 et les bénéfices de sa vente de jus de pommes par 1,2.

Déterminer un encadrement de son bénéfice total pour l'année prochaine.

**86** Démo

**1.** On considère deux nombres réels $a$ et $b$ tels que $a < b$.
**a)** Calculer $(b + c) - (a + c)$ et comparer le résultat à 0.
**b)** Recopier et compléter par $<$ ou $>$.
On a donc $a + c$ … $b + c$.

**2.** On considère deux nombres réels $a$ et $b$ tels que $a < b$ et un nombre réel $k > 0$.
**a)** En observant que $kb - ka = k(b - a)$, que peut-on dire du signe (positif ou négatif) de $kb - ka$ ?
**b)** Recopier et compléter par $<$ ou $>$.
On a donc $ka$ … $kb$.

**3.** D'une manière analogue à la question **2.**, montrer que si $a < b$ et $k < 0$ alors $ka > kb$.

# Exercices d'entraînement

## Résolution d'une inéquation

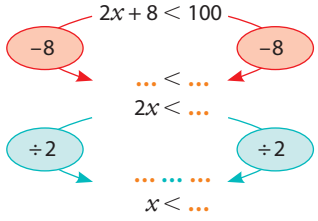
Méthode 4 p. 77

**87** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

**1. a)** $x+2 \geqslant 12$ **b)** $x-11 \leqslant 10$ **c)** $25+x>12$

**2. a)** $4x \leqslant 36$ **b)** $-2x \leqslant 24$ **c)** $6x<33$

**88** Recopier et compléter la résolution de l'inéquation $2x+8<100$.




**89** On considère l'inéquation $-4x-40>60$ d'inconnue réelle $x$.
En écrivant les opérations effectuées à chaque étape sur les deux membres, résoudre cette inéquation.

**Coup de pouce** On peut utiliser la méthode employée dans l'exercice précédent.

**90** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

**a)** $2x+2 \leqslant 10$ **b)** $4x+5<-25$

**c)** $-2x+6 \leqslant 0$ **d)** $-3x-7 \geqslant 101$

**e)** $5-x<8$ **f)** $5x-2>-1$

**91** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

**a)** $3x+2 \leqslant 4x-14$ **b)** $-2x-5>4x+31$

**c)** $9x+19 \leqslant -x+51$ **d)** $-3x+5<-x+17$

**92** Donner, sous forme d'intervalle, l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

**a)** $2(x+1)-7x>5-x$ **b)** $4x+5 \leqslant 3(x-1)+3$

**c)** $3(x+4)>0$ **d)** $\dfrac{x-5}{2} \leqslant 0$

**93** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

**a)** $4t-2<4(2t+8)$

**b)** $(x+4)^2>(x-3)^2$

**c)** $a^2+2a+1 \leqslant a^2+4$

**d)** $4t+6>2(t+3)$

**94** Donner, sous forme d'intervalle, l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

**a)** $\dfrac{5}{2}x+4>x+6$ **b)** $\dfrac{14}{3}x \leqslant 2x-\dfrac{1}{3}$

**c)** $\dfrac{7}{9}x+4 \geqslant \dfrac{1}{3}x-3$ **d)** $-\dfrac{1}{2}x-1<\dfrac{1}{5}x+\dfrac{1}{4}$

**95** On considère l'inéquation $3x+4>100$. Python

**1.** Montrer que 35 est solution de cette inéquation.

**2.** On considère ce programme en langage **Python**.

```
for i in range(0,51):
    if 3*i+4>100:
        print(i)
```

**a)** Que fait ce programme ?

**b)** Quels nombres affichera-t-il ?

**3.** Écrire un programme en langage **Python** qui affiche les nombres entiers de l'intervalle [0 ; 60] solutions de l'inéquation $55-2x>x-23$.

**96** **1.** Éléonore dit qu'elle a trouvé des nombres solutions de l'inéquation $4x+2>4(x+5)+1$.
Qu'en pensez-vous ?

**2.** Samy dit que tous les nombres réels sont solutions de l'inéquation $-3x+7 \geqslant 5-3x$. Qu'en pensez-vous ?

**3.** Donner, sous forme d'intervalle, l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

**a)** $3x+5 \leqslant 4+3x$ **b)** $5x-2>5(x-3)+1$.

## Comparaison de deux expressions

Méthode 5 p. 79

**97** On considère les expressions $A=45+5x$ et $B=1\,000-5x$ pour tout nombre réel $x$. Comment faut-il choisir $x$ pour que le résultat de A soit supérieur au résultat de B ?

**98** Comparer les expressions suivantes.

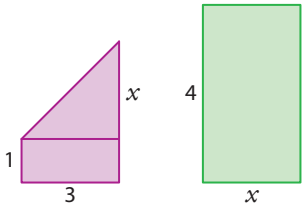
**a)** $5+2x$ et $x+9$ pour tout nombre réel $x$

**b)** $9+\dfrac{1}{2}x$ et 1 pour tout nombre réel $x$

**c)** $A=x^2-6x+150$ et $B=x^2+4x$ pour tout nombre réel $x$

**d)** $A=-2t+9$ et $B=-2t+3$ pour tout nombre réel $t$

**99** Comparer les aires de ces deux figures.




**100** On considère les deux programmes en langage **Python** suivants. Python

**Programme 1**

```
t=float(input("Saisir t :"))
y=4*t
x=y+2
print(x)
```

**Programme 2**

```
t=float(input("Saisir t :"))
r=t+6
x=0.5*r
print(x)
```

Comparer les résultats affichés selon les valeurs de $t$.

**101** **1.** Quel est le signe (positif ou négatif) de $x^2$ suivant les valeurs de $x$ ?
**2.** Comparer $2 + x + x^2$ et $1 + x$.

**102** **1.** A, B et C sont trois nombres strictement positifs tels que $A > B > C$. Comparer :
**a)** $\frac{A}{B}$ et 1 **b)** $\frac{C}{B}$ et 1.
**2. a)** Comparer $3\sqrt{2} + 4$ et 7 sachant que $\sqrt{2} > 1$.
**b)** $\frac{3\sqrt{2}+4}{7}$ est-il supérieur à 1 ?
**3.** $x$ est un nombre réel supérieur ou égal à 1.
Que peut-on dire de $\frac{2x+3}{2x+7}$ par rapport à 1 ?

## Inéquations et problèmes (avec modélisation)

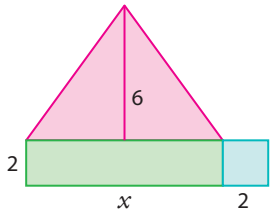
**103** Assia a acheté un sachet de graines de carottes valant 2,90 euros pour les semer dans son jardin. Elle compte revendre quelques kilogrammes de carottes à ses amis au prix de 1,50 euro le kilogramme.

Elle cherche à connaître le nombre de kilogrammes qu'elle doit vendre pour réaliser un bénéfice supérieur ou égal à 25 euros. En notant $x$ le nombre de kilogrammes de carottes à vendre et à l'aide d'une inéquation, déterminer la solution au problème.

**104** **Modéliser une situation**
Une ville propose pour ses habitants deux tarifs pour son réseau de transports en commun :
• tarif Abonn' : 10 euros mensuels pour un nombre de trajets illimités.
• tarif Unit' : une carte valant 2 euros puis 1,90 euro par trajet.
Pour combien de trajets annuels le tarif Unit' est-il plus intéressant ?

↪ Résolution de problèmes p. 80

**105** On considère la figure ci-dessous (les longueurs sont en cm).

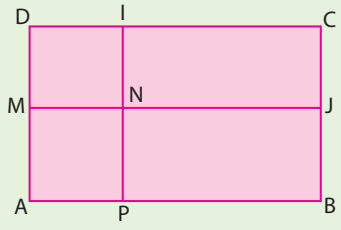



Déterminer, à l'aide d'une inéquation, les valeurs de $x$ pour lesquelles l'aire de cette figure est supérieure ou égale à 50 cm$^2$.

**106** **Esprit critique**
Au 1er janvier 2019, d'après les études de l'Insee, la région Nouvelle-Aquitaine comptait 6 010 289 habitants et progressait en moyenne sur les dernières années de 27 700 habitants par an. La région Occitanie comptait 5 933 185 habitants et progressait de 41 600 habitants par an en moyenne.
Pour les deux premières questions, on considère que ces modèles restent valables pour les années suivantes.
**1.** Déterminer l'année durant laquelle le nombre d'habitants de la région Occitanie dépassera 6 500 000.
**2.** Déterminer l'année durant laquelle le nombre d'habitants de la région Occitanie dépassera le nombre d'habitants de la région Nouvelle-Aquitaine.
**3.** Au 1er janvier 2022, l'Insee estimait à 6 053 500 habitants la population de l'Occitanie. Ces résultats coïncident-ils avec le modèle ?

**107** Rémi a gagné au loto, il a le choix entre deux lots :
• une somme de 100 000 euros, puis 1 400 euros par mois à vie ;
• une somme de 5 000 euros, puis 2 000 euros par mois à vie.
Comparer ces deux offres en fonction du nombre de mois passés.

**108** **Modéliser une situation**
ABCD est un rectangle tel que AB = 5 cm et AD = 3 cm. M est un point du segment [AD]. On place les points P sur [AB] et N tel que AMNP soit un carré. Le point I est l'intersection de (PN) et (CD) et J celle de (BC) et (MN).
À quelle distance du point A faut-il placer M pour que l'aire de AMNP soit supérieure ou égale à l'aire de CJNI ?




↪ Résolution de problèmes p. 80

**109** **Réaliser un schéma**
Problème ouvert

Lou et Harry ont délimité chacun leur jardin de forme rectangulaire. Le jardin de Lou mesure 6 mètres sur 5 et celui de Harry mesure 2 mètres sur 12,5. Ils envisagent chacun d'augmenter les côtés (longueur et largeur) de leur jardin d'une même mesure de $x$ mètres comprise entre 50 cm et 5 m.
Comparer les surfaces des jardins de Lou et Harry suivant les valeurs de $x$.

↪ Résolution de problèmes p. 298

# Exercices d'entraînement

## Calculs avec une valeur absolue

**110** Calculer.

**a)** $|-4|$ **b)** $|3{,}8|$ **c)** $\left|-\frac{100}{3}\right|$

**d)** $|5-6|$ **e)** $\left|\sqrt{17}-2\right|$ **f)** $\left|2-\sqrt{17}\right|$

**111** Sans calculatrice, simplifier.

**a)** $|4|+|-3|$ **b)** $|1{,}2|-|-1{,}2|$

**c)** $\dfrac{|5-8|-3}{2}$ **d)** $|24-10|+|7-5|$

**112** Oral Dire si chacune des égalités suivantes est vraie ou fausse en justifiant.

**a)** $|6-3|=|3-6|$

**b)** $|5-7|=|5|-|7|$

**c)** $|4\times(-3)|=|4|\times(-3)$

**113** **1. a)** Sur une droite graduée, placer les nombres 5 et 2,5.

**b)** Calculer la distance entre 5 et 2,5.

**2.** Reprendre la question **1.** avec 3 et $-\frac{1}{3}$.

**3.** Reprendre la question **1.** avec –1 et $-\frac{4}{5}$.

**114** À l'aide d'une valeur absolue, écrire la distance entre :

**a)** $\frac{125}{3}$ et 2 **b)** $\sqrt{2}$ et 5

**c)** –5 et $\frac{12}{5}$ **d)** $\pi$ et 4

## Intervalle et valeur absolue

Méthode 6 p. 79

**115** Oral De la même façon que $|x-3|$ représente la distance entre le nombre réel $x$ et 3, exprimer à l'oral en termes de distance :

**a)** $|x-100|$ **b)** $\left|x-\frac{1}{3}\right|$ **c)** $|x+5|$

**d)** $|1{,}35+x|$ **e)** $|-7-x|$ **f)** $|\pi-x|$

**116** Déterminer l'ensemble (sous forme d'intervalle) des réels $x$ vérifiant :

**a)** $|x-10|\leqslant 1$ **b)** $|x-2{,}5|\leqslant 0{,}2$ **c)** $\left|x-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{5}{2}$

**117** Déterminer l'ensemble (sous forme d'intervalle) des réels $x$ vérifiant :

**a)** $|x+5|\leqslant 3$ **b)** $|x+1|\leqslant 2$ **c)** $|x-3|<1$

**118** **1. a)** Sur une droite graduée, placer 2 et 6.

**b)** Déterminer le centre de [2 ; 6] puis en déduire le rayon de cet intervalle.

**c)** Traduire $|x-4|$ en termes de distance entre deux réels.

**d)** Recopier et compléter :

$x\in[2\,;6]\Leftrightarrow|x-4|\leqslant$ ...

**2.** De la même manière, compléter :

**a)** $x\in[1\,;25]\Leftrightarrow|x-13|\leqslant$ ...

**b)** $x\in[6\,;20]\Leftrightarrow|x-$ ...$|\leqslant$ ...

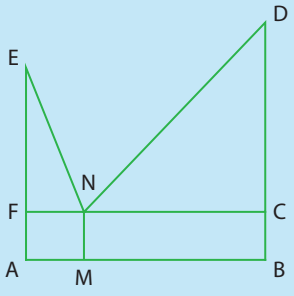
**c)** $x\in[1{,}2\,;3]\Leftrightarrow|x-$ ...$|\leqslant$ ...

**119** Écrire une inégalité vérifiée par $x$ et utilisant une valeur absolue dans les cas suivants.

**a)** $x\in[-4\,;5]$ **b)** $x\in[0\,;1{,}1]$ **c)** $x\in\left[\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right]$

## À chacun son rythme

**120** On considère la figure ci-contre dans laquelle ABCF est un rectangle, E ∈ [AF], D ∈ [BC], AB = 10, AF = 2, AE = 8, BD = 10. M est un point de [AB], N est le point de [CF] tel que AMNF est un rectangle.




**Énoncé A**

**1.** On pose $x$ = AM. À quel intervalle appartient $x$ ?

**2.** Déterminer l'aire de cette figure en fonction de $x$.

**3.** Montrer que, si $x\in[1\,;2]$, alors l'aire de la figure sera comprise entre 58 et 59.

**Énoncé B**

**1.** Exprimer l'aire de NEF et de DCN en fonction de AM.

**2.** On pose AM = $x$.

Pour quelle(s) valeur(s) de $x$ le triangle NEF a-t-il une aire supérieure ou égale à celle de DCN ?

**Énoncé C**

À quelle distance du point A faut-il placer le point M pour que l'aire de AMNE soit supérieure ou égale à l'aire de MBDN ?

## 121 Deux inéquations

**1.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et donner leurs ensembles de solutions sous forme d'intervalle.

**a)** $2x + 9 \geqslant 19 - 2x$ **b)** $-2(x - 15) > 3 + x$

**2.** On considère les intervalles I = [2,5 ; +∞[ et J = ]–∞ ; 9[.
Déterminer l'intersection de ces deux intervalles.

**3.** Soit $t \in I \cap J$.
Donner un encadrement de $3t - 2$.

## 122 Vrai ou faux ?

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant.

**a)** Tous les nombres de [9 ; 13] appartiennent à ]8 ; 13[.

**b)** [9 ; 10] ∪ [–6 ; 9,5[ = [–6 ; 10].

**c)** Si $x < 3$ alors $x - 3 > 0$.

**d)** Si $t \geqslant -2$ alors $-2t + 5 \leqslant 10$.

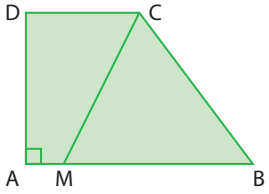
**e)** Si $x \geqslant 3$ et $y \geqslant 2$ alors $3x + 4y \geqslant 17$.

**f)** Le centre de l'intervalle [4 ; 6] est le nombre 5.

**g)** Les nombres $x$ vérifiant $|x - 7| \leqslant 3$ sont les nombres de l'intervalle [4 ; 11].

## 123 Un problème d'aire

Un pré est représenté par un trapèze rectangle ABCD tel que AB = 12, AD = 8 et DC = 5, en dam.




On souhaite partager ce pré par un segment [CM], où M est un point du segment [AB], en deux parcelles ADCM et CBM.

**1.** Soit $x$ = AM. À quel intervalle appartient $x$ ?

**2. a)** Exprimer en fonction de AM l'aire de ADCM.

**b)** Encadrer la valeur de l'aire de ADCM si $0 \leqslant AM \leqslant 3$.

**3.** Déterminer à l'aide d'une inéquation les valeurs de $x$ pour lesquelles l'aire de ADCM est supérieure à celle de CBM.

## 124 Comparaison de programmes Python

On considère ces deux programmes en langage **Python**.

**Programme 1**

```
x=float(input("Saisir un nombre x"))
y=3*(x**2)+2*x+3
print(y)
```

**Programme 2**

```
x=float(input("Saisir un nombre x"))
a=3*x+6
b=x-4
z=a*b
print(z)
```

**1.** Que vont afficher les deux programmes si on choisit $x = 2$ ?

**2.** On choisit une même valeur de $x$ au départ des deux programmes. Comment doit-on choisir la valeur de $x$ pour que le résultat du programme 1 soit supérieur ou égal au résultat du programme 2 ?

## 125 Comparaison de deux offres

Deux fournisseurs d'électricité donnent les tarifs suivants pour une puissance souscrite de 6 kVA sur leurs sites Internet.

| Fournisseur | Abonnement | Prix du kWh consommé |
|---|---|---|
| A | 11,90 euros par an | 0,55403 euro par kWh |
| B | 11,36 euros par mois | 0,174 euro par kWh |

**1.** Ernest consomme en moyenne 600 kWh par an.
Comparer les offres des deux fournisseurs pour lui.

**2.** On note $x$ la consommation annuelle en kWh d'électricité d'un client.

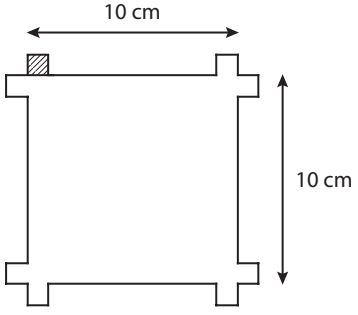
**a)** Déterminer en fonction de $x$ le prix annuel payé au fournisseur A.

**b)** Déterminer à l'aide d'une inéquation les valeurs de $x$ pour lesquelles le fournisseur A est plus intéressant que le fournisseur B.

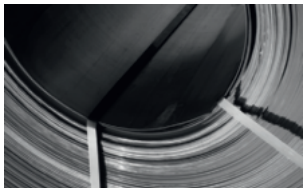
**c)** Comparer suivant les valeurs de $x$ les offres de ces deux fournisseurs.

## 126 Périmètre contraint Problème ouvert

Une pièce métallique doit avoir la forme ci-dessous.




Les petits carrés (comme celui qui est hachuré) situés dans les coins de la pièce sont identiques. Le ruban métallique permettant de construire cette pièce impose que son périmètre ne doit pas dépasser 1 mètre.
Est-il possible de donner n'importe quelle valeur à la longueur des côtés des petits carrés ? Sinon, quelle est la limite possible ?



# Exercices d'approfondissement

## 127 Vrai ou faux ?

Logique

Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Justifier.
**Propriété ①** : pour tous nombres réels $a$ et $b$ on a $|a+b| = |a| + |b|$.
**Propriété ②** : il existe des nombres réels $a$ et $b$ tels que $|a+b| = |a| + |b|$.
**Propriété ③** : pour tout nombre réel $a$, on a $|-a| = |a|$.

## 128 Somme d'inégalités

Démo

On se propose de démontrer que si $a$, $b$, $c$ et $d$ sont quatre nombres réels tels que :

$$a < b \text{ et } c < d \text{ alors } a + c < b + d.$$

Soit $a$, $b$, $c$ et $d$ quatre nombres réels tels que $a < b$ et $c < d$.
**1.** Comparer $a + c$ et $b + c$.
**2.** Comparer $b + c$ et $b + d$.
**3.** Que peut-on en déduire ?

## 129 Multiplications d'inégalités (1)

$a$, $b$, $c$ et $d$ sont quatre nombres réels positifs tels que $a < b$ et $c < d$.
**1.** Comparer $ac$ et $bc$.
**2.** Comparer $bc$ et $bd$.
**3.** Que peut-on en déduire ?
Énoncer la propriété démontrée.
**4.** Cette propriété est-elle vraie pour tous nombres réels $a$, $b$, $c$ et $d$ ?

## 130 Valeurs absolues

Démo

**1.** Démontrer que pour tout réel $a$ on a $\sqrt{a^2} = |a|$.
**2.** Démontrer que pour tous réels $a$ et $b$ la distance entre $a$ et $b$ est donnée par $|a - b|$.

## 131 Du repérage

Défi

Dans un repère (O ; I, J), colorier le domaine formé de l'ensemble des points de coordonnées $(x ; y)$ tels que : $|x - 3| \geqslant 1$ et $|y + 1| \leqslant 2$.

## 132 Multiplication d'inégalités (2)

SVT

À l'aide de la propriété démontrée dans l'exercice 129, répondre aux questions suivantes. Ces questions sont indépendantes.
**1.** La Terre a la forme d'une sphère, aplatie au niveau des pôles.

En supposant que le rayon de la Terre est compris entre 6 352 km et 6 385 km, et que $\pi$ est compris entre 3,14 et 3,15, donner un encadrement de la circonférence de la Terre.
**2.** Le service d'accueil d'une compagnie d'assurances estime qu'il reçoit chaque jour entre 35 et 50 clients.
Chacun d'entre eux restant entre 2 min et 10 min, que peut-on dire du temps que doit mobiliser le service d'accueil pour les clients ?
**3.** Dans le bilan d'une prise de sang, il est signalé que la glycémie (concentration de glucose dans le sang) doit normalement se situer entre 0,74 et 1,06 g/L. On a prélevé 50 mL de sang avec une précision de 1 mL chez une personne dont la glycémie est normale (située entre les deux valeurs de référence).
Donner un encadrement de la masse, en grammes, de glucose présente dans ce prélèvement.

## 133 Résolution par un programme

Python

On considère l'inéquation du 1er degré $ax + b < cx + d$ où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont quatre nombres réels ($a$ et $c$ ne sont pas tous les deux nuls).
**1.** Montrer que, si $a \neq c$, alors l'équation $ax + b = cx + d$ a pour solution $x = \dfrac{d - b}{a - c}$.
**2.** Écrire un programme en langage **Python** permettant d'afficher l'ensemble des solutions de cette inéquation après que l'utilisateur a saisi les valeurs de $a$, $b$, $c$ et $d$.

# Vers la 1re

## 134 Vers la Spécialité Maths

Les questions sont indépendantes.
**1.** Expliquer pourquoi si $x \geqslant 3$, alors $3x - 4$ est positif.
**2.** Expliquer pourquoi si $t > -6$, alors $t^2 + t + 7 > 0$.
**3.** En partant de $1 < 2$, expliquer pourquoi $2^n < 2^{n+1}$ pour $n$ entier naturel.
**4.** On considère l'inéquation $n^3 + n + 1 \geqslant 100$ où l'inconnue $n$ est un entier naturel.
Chercher avec la calculatrice la plus petite valeur de $n$ solution de l'inéquation.

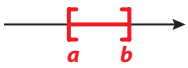
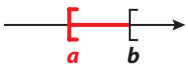
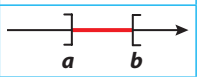
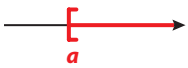
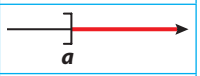
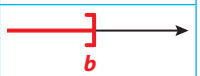
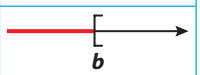
## 135 Vers STMG-STL-STI2D

La population d'une ville en 2021+ $n$ est modélisée par la formule $p(n) = 21\,000 + 510n$ pour tout entier naturel $n$. Par exemple, en 2023 (qui vaut 2021+2), la population est de $21\,000 + 510 \times 2 = 22\,020$ habitants.
**1.** Calculer la population en 2024 avec ce modèle.
**2.** En quelle année la population dépasse-t-elle 25 000 habitants avec ce modèle ?

Objectif

## 1 Utiliser les intervalles

### Intervalle

| Ensemble de réels $x$ tels que | Notation | Représentation |
|---|---|---|
| $a \leqslant x \leqslant b$ | $x \in [a\,;\,b]$ |  |
| $a < x \leqslant b$ | $x \in ]a\,;\,b]$ | |
| $a \leqslant x < b$ | $x \in [a\,;\,b[$ |  |
| $a < x < b$ | $x \in ]a\,;\,b[$ |  |
| $x \geqslant a$ (ou $a \leqslant x$) | $x \in [a\,;+\infty[$ |  |
| $x > a$ (ou $a < x$) | $x \in ]a\,;+\infty[$ |  |
| $x \leqslant b$ (ou $b \geqslant x$) | $x \in ]-\infty\,;\,b]$ |  |
| $x < b$ (ou $b > x$) | $x \in ]-\infty\,;\,b[$ |  |

### Intersection des intervalles I et J

I ∩ J : ensemble des nombres qui appartiennent à la fois à I **et** à J.

### Réunion (ou union) des intervalles I et J

I ∪ J : ensemble des nombres qui appartiennent à I **ou** à J.

Objectif

## 2 Manipuler les inégalités

### Inégalité et somme

$a$, $b$, $c$ et $d$ sont quatre nombres réels.

- Si $a < b$ alors :
$$a + c < b + c.$$
- Si $a < b$ et $c < d$ alors :
$$a + c < b + d.$$

### Inégalité et produit

$a$, $b$ et $k$ sont trois nombres réels.

- Si $a < b$ et $k > 0$ alors :
$$ka < kb \text{ et } \frac{a}{k} < \frac{b}{k}.$$
- Si $a < b$ et $k < 0$ alors :
$$ka > kb \text{ et } \frac{a}{k} > \frac{b}{k}.$$

Objectif

## 3 Utiliser les inéquations

### Résoudre une inéquation

Résoudre une inéquation revient à déterminer toutes les valeurs de l'inconnue $x$ pour laquelle l'inégalité est vérifiée. Pour cela, on applique en général des techniques de résolutions des équations en utilisant les règles de manipulation des inégalités.

### Comparer

On peut comparer des quantités en résolvant des inéquations.

### Modéliser

On peut résoudre certains problèmes mathématiques en posant une inconnue $x$ puis en écrivant une inéquation d'inconnue $x$ : résoudre l'inéquation donnera la solution au problème.

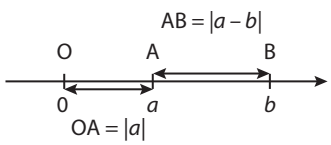
Objectif

## 4 Calculer et interpréter des valeurs absolues

### Valeur absolue d'un nombre

On a $|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geqslant 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$

### Valeur absolue et distance




### Valeur absolue et intervalle

- On considère un intervalle $[a\,;\,b]$.

Le nombre $c$ est le centre de cet intervalle et le nombre $r$ est le rayon de cet intervalle.

- Dans ces conditions, on a :
$x \in [a\,;\,b] \Leftrightarrow x \in [c - r\,;\,c + r] \Leftrightarrow |x - c| \leqslant r$

# Préparer le contrôle — Je me teste

**QCM INTERACTIF**
Tester ses connaissances
www.lienmini.fr/8270-10

## QCM — Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Objectif 1

### Utiliser des intervalles

| | | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|---|
| 136 | Le nombre 4,7 appartient à : | $[3 ; 4,7[$ | $[2 ; 10,1]$ | $[-5 ; 4,72[$ | $[0 ; 4,69]$ |
| 137 | $x < 3$ est équivalent à : | $x \in ]-\infty ; 3]$ | $x \in ]-\infty ; 3[$ | $x \in ]3 ; +\infty[$ | $x \in [3 ; +\infty[$ |
| 138 | $[6 ; 10[ \cup [7 ; 15[$ est égal à : | $\varnothing$ | $[7 ; 10[$ | $]7 ; 10[$ | $[6 ; 15[$ |
| 139 | $[6 ; 10[ \cap [7 ; 15[$ est égal à : | $\varnothing$ | $[7 ; 10[$ | $]7 ; 10[$ | $[6 ; 15[$ |

Objectif 2

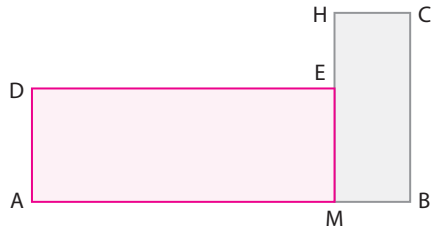
### Manipuler les inégalités

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 140 | Si $x > 5$ alors : | $-3x < -15$ | $-2x > -10$ | $4x > 40$ | $-5x > 0$ |
| 141 | Si $4 \leqslant x \leqslant 10$ alors : | $12 \leqslant 3x \leqslant 30$ | $12 \geqslant 3x \geqslant 30$ | $2 \leqslant x - 2 \leqslant 8$ | $2 \geqslant x - 2 \geqslant 8$ |
| 142 | Si $-2 \leqslant x \leqslant 2$ alors : | $9 \leqslant 5 - 2x \leqslant 1$ | $1 \leqslant 5 - 2x \leqslant 9$ | $0 \leqslant 3x + 6 \leqslant 12$ | $3 \leqslant 3x + 6 \leqslant 6$ |

Objectif 3

### Utiliser les inéquations

**Pour les questions 143 et 144 on considère la figure ci-contre. On considère un segment [AB] de longueur 10 cm, un point M sur ce segment et les deux rectangles AMED et MBCH tels que AD = 3 cm et BC = 5 cm. On note AM = $x$.**




| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 143 | Parmi les inéquations proposées, laquelle permet de chercher les valeurs de $x$ telles que le périmètre de AMED est inférieur ou égal à 10 ? | $6 - 2x \leqslant 10$ | $6 + 2x \leqslant 10$ | $3x \leqslant 10$ | $6 - 2x \geqslant 10$ |
| 144 | Parmi les inéquations proposées, laquelle permet de chercher les valeurs de $x$ telles que l'aire de MBCH est supérieure à 14 ? | $50 - 5x > 0$ | $50 - 5x > 14$ | $50 - 5x < 14$ | une autre inéquation |
| 145 | Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $3x - 8 < 25$ a pour ensemble de solutions : | $[0 ; 11]$ | $]-\infty ; 11]$ | $[11 ; +\infty[$ | $]-\infty ; 11[$ |
| 146 | Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $-2x + 10 \leqslant 12x + 150$ a pour ensemble de solutions : | $[-10 ; +\infty[$ | $]-\infty ; -10]$ | $]-10 ; +\infty[$ | $]-\infty ; 14[$ |

Objectif 4

### Calculer et interpréter des valeurs absolues

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 147 | $\lvert -4,12 \rvert$ est égale à : | 4 | 4,12 | −4,12 | 4,12 ou −4,12 |
| 148 | $\lvert x - 6 \rvert$ donne la distance entre : | $x$ et −6 | $x$ et 6 | 6 et $x$ | 0 et 6 |
| 149 | $\lvert x - 5 \rvert \leqslant 2$ est équivalent à : | $x \in [2 ; 5]$ | $x \in [-5 ; 5]$ | $x \in [3 ; 7]$ | $x \in [-2 ; 2]$ |

↪ Corrigés p. 390

## Parcours différenciés

| | Objectif 1 | Objectif 2 | Objectif 3 | Objectif 4 |
|---|---|---|---|---|
| Parcours A | 1 3 51 150 151 152 | 5 156 157 | 7 103 161 | 110 166 |
| Parcours B | 57 61 153 154 | 70 158 159 | 93 100 162 163 164 | 110 167 168 |
| Parcours C | 57 61 155 | 70 160 | 93 100 165 | 110 117 169 |

## Exercices

### Objectif 1 Utiliser des intervalles

**150** **1.** Représenter sur une droite graduée l'intervalle $[-1 ; 3{,}5]$.
**2.** Donner quatre nombres appartenant à cet intervalle et quatre nombres n'appartenant pas à cet intervalle.

**151** Écrire l'inégalité ou l'encadrement vérifié par les réels $x$ tels que : **a)** $x \in [-3 ; 16]$ **b)** $x \in [-8 ; +\infty[$

**152** Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des réels $x$ tels que : **a)** $5 < x \leqslant 12$ **b)** $4 \geqslant x$

**153** Donner l'intersection et la réunion des intervalles $[5 ; 10]$ et $[8 ; 12]$.

**154** Vrai ou faux ?
Si $10{,}52 \leqslant x \leqslant 15{,}38$ alors $x \in [10{,}54 ; 15{,}4]$.

**155** Donner l'intersection et la réunion des intervalles $[-3 ; 5[$ et $]-3 ; 8]$.

### Objectif 2 Manipuler des inégalités

**156** $x$ et $y$ sont des nombres réels tels que $x \leqslant 10$ et $y \leqslant 5$. Donner une inégalité vérifiée par $5x$, par $x - 12$ et par $x + y$.

**157** On sait que $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$.
Donner un encadrement de $\sqrt{5} - 1$, puis de $5\sqrt{5}$.

**158** $x$ est un nombre réel tel que $x \leqslant -2$.
À quel intervalle appartient $-4x$ ?

**159** $x$ et $y$ sont des nombres réels tels que $5 \leqslant x \leqslant 7$ et $-2 \leqslant y \leqslant 5$. Donner un encadrement de $2x + 1$, de $10 - 3x$ et de $x + 2y$.

**160** On sait que $x$ est un nombre réel tel que $-\frac{3}{4} \leqslant x < \frac{5}{3}$. Peut-on affirmer que $-1 < -3x + 5 < 8$ ?

### Objectif 3 Utiliser les inéquations

**161** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.
**a)** $4x + 7 > -3x + 63$ **b)** $-10x + 5 > 0$

**162** Comparer les expressions $A = -3x + 9$ et $B = 2x - 5$ suivant les valeurs de $x$.

**163** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations.
**a)** $\frac{1}{2}x + 5 \geqslant x - 5$ **b)** $2x(x + 5) - 7 \geqslant 2x^2 + 7x + 3$

**164** Un loueur de matériel propose deux tarifs pour la location d'une machine :
• tarif A : un forfait de 10 euros puis 5,50 euros par heure d'utilisation ;
• tarif B : aucun forfait et 7,10 euros par heure.
Pour quelle durée de location le tarif A est-il plus intéressant ?

**165** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :
$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{5} \leqslant \frac{1}{4}x + \frac{8}{7}.$$

### Objectif 4 Calculer et interpréter des valeurs absolues

**166** Calculer : **a)** $|-5| + |2| - 5$ **b)** $3 + |6 - 9|$

**167** Sachant que $2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$, écrire sans la notation de valeur absolue :
**a)** $\left|\sqrt{7} - 12\right|$ **b)** $\left|\sqrt{7} + 3\right|$ **c)** $\left|2 - \sqrt{7}\right|$

**168** $x$ est un nombre réel tel que $|x - 20| \leqslant 12$.
À quel intervalle appartient $x$ ?

**169** $x$ est un nombre réel tel que $\left|x + \frac{1}{5}\right| \leqslant \frac{1}{2}$.
À quel intervalle appartient $x$ ?

↪ Corrigés p. 390

# Travaux pratiques

Python | 45 min | Chercher | Modéliser

## 1 Algorithme de recherche de solutions et optimisation

Les gérants d'un magasin situé en bord de mer désirent acheter des planches à voiles pour les proposer à la location. Ils souhaitent acheter deux types de planches :
– des planches pour débutants, valant 1 100 euros chacune ;
– des planches pour utilisateurs confirmés, valant 2 350 euros chacune.
Ils disposent d'un budget maximal de 35 000 euros.

### A ▸ Un cas particulier avec une inéquation du 1er degré

Les gérants décident d'acheter 7 planches pour les utilisateurs confirmés.

**1.** Déterminer à l'aide d'une inéquation le nombre de planches pour débutants qu'ils peuvent acheter au maximum.

**2.** Recopier et compléter le programme suivant dans un éditeur **Python** pour qu'il réponde au problème.

```
for x in range(0,30):
    if 1100*x+7*2350<=...:
        print("Il est possible d'acheter",x, "planches débutants.")
```

**3.** Les résultats affichés confirment-ils les résultats de la question **1.** ?

### B ▸ Avec deux inconnues

On note $x$ le nombre de planches pour débutants et $y$ le nombre de planches pour utilisateurs confirmés.

**1.** Expliquer pourquoi $x$ ne peut pas dépasser 32 et pourquoi $y$ ne peut pas dépasser 15.

**2.** Est-il possible d'acheter 20 planches pour débutants et 3 planches pour utilisateurs confirmés ?

**3.** Expliquer pourquoi $1\,100x + 2\,350y \leqslant 35\,000$.

**4.** Recopier et compléter le programme suivant dans un éditeur **Python** pour qu'il affiche tous les couples de solutions $(x\,;y)$ de l'inéquation.

```
for x in range(0,33):
    for y in range(0,16):
        if 1100*x+...*y<=...:
            print(x, "planches déb. et", y, "planches conf.")
```

**5.** Vérifier que la situation de la question **2.** fait partie des solutions.

**6.** Les gérants souhaitent louer les planches pour débutants 13 euros par heure et les planches pour utilisateurs confirmés 32 euros par heure. On suppose que toutes les planches sont louées.

**a)** Exprimer en fonction de $x$ et $y$ la recette en euros par heure des locations.

**b)** Modifier le programme de la façon suivante.

```
for x in range(0,33):
    for y in range(0,16):
        if 1100*x+2350*y<=35000:
            recette=13*x+32*y
            print(x, "planches déb. et", y, "planches conf., recette : ", recette)
```

**c)** Les gérants peuvent-ils acheter 10 planches pour débutants et 10 planches pour utilisateurs confirmés ? Si oui, quelle est alors la recette ?

**d)** Chercher dans l'affichage la recette maximale des locations par heure et retrouver pour quelles valeurs de $x$ et $y$ elle est obtenue.

**CONSOLE PYTHON**
Algorithme de recherche de solutions et optimisation
www.lienmini.fr/8270-p2

**7.** Pour aller plus loin Observer le programme (à télécharger). Pourquoi affiche-t-il la recette maximale ?

**8.** Pour aller plus loin Pour des raisons de stockage, les gérants ne peuvent pas acheter plus de 15 planches. Chercher la recette maximale des locations par heure avec cette nouvelle contrainte.

Tableur 45 min Chercher Modéliser

# 2 Comparaison de fréquentations

Un musée avait proposé l'an dernier une exposition temporaire sur les océans. Le premier jour, elle avait compté 250 visiteurs, puis, devant le succès de cette exposition, il y avait eu chaque jour 30 visiteurs de plus que la veille.
Cette année, le musée a lancé une exposition temporaire sur les baleines. Le premier jour elle a compté 1 000 visiteurs mais, les jours suivants, on constate une baisse quotidienne de 10 personnes. On souhaite analyser les fréquentations de ces deux expositions temporaires.

## A ▸ Analyse avec le tableur

Le gérant du musée a établi la feuille de calcul ci-dessous à partir des constats effectués.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | Jour n° | nombre de visiteurs expo sur les océans | nombre de visiteurs expo sur les baleines |
| 2 | 1 | 250 | 1 000 |
| 3 | 2 | 280 | 990 |
| 4 | 3 | 310 | 980 |
| 5 | 4 | 340 | 970 |
| 6 | 5 | 370 | 960 |
| 7 | 6 | | |
| 8 | 7 | | |
| 9 | 8 | | |
| 10 | 9 | | |

**1.** Reproduire et compléter la feuille de tableur ci-dessus en utilisant l'adresse des cellules, des formules et la recopie vers le bas du tableur.

**Coup de pouce** Dans la cellule B3, on pourra saisir une formule de la forme : « =B2+… ».

**2.** En observant ce qui se passe pour le jour 102, expliquer pourquoi les modèles proposés pour une situation peuvent avoir leurs limites.

**3.** En considérant que ces modèles sont valables sur deux mois, donner à l'aide du tableur le numéro du jour lors duquel le nombre de visiteurs de l'exposition sur les baleines sera pour la première fois inférieur à celui de l'exposition sur les océans.

## B ▸ Avec une inéquation

On remarque que le 1er, soit au bout de 0 jour, il y a 250 visiteurs. Au bout de 1 jour, il y a 280 visiteurs.

**1.** Expliquer pourquoi au bout de $n$ jours le nombre de visiteurs de l'exposition sur les océans est donné par la formule : $250 + 30n$.

**2.** Retrouver à l'aide d'une inéquation au bout de combien de jours le nombre de visiteurs de l'exposition sur les baleines sera inférieur à celui de l'exposition sur les océans.

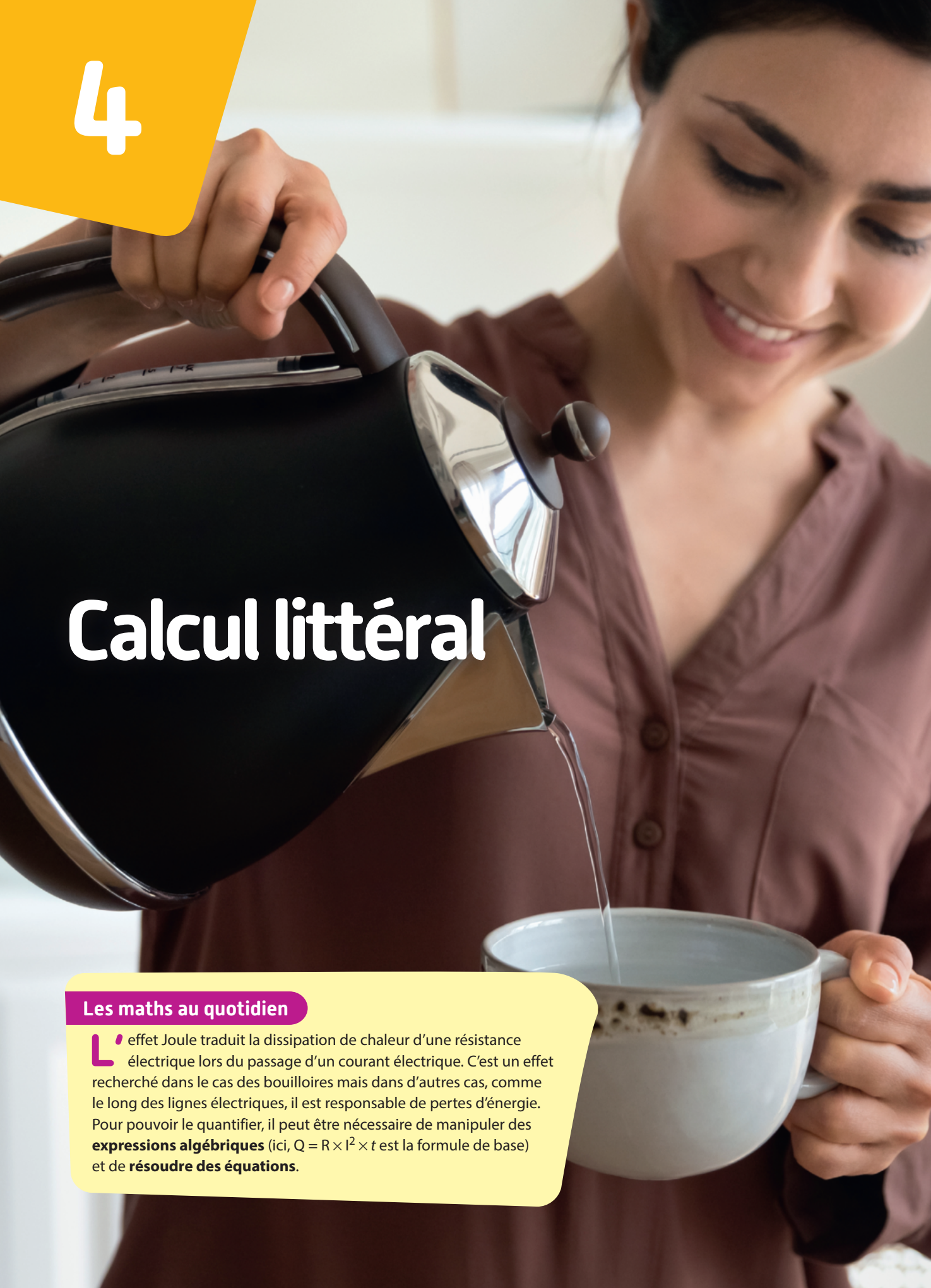
**3.** **Pour aller plus loin** **a)** Déterminer, à l'aide du tableur, le numéro du jour où le cumul des visiteurs de l'exposition sur les baleines devient inférieur au cumul des visiteurs de l'exposition sur les océans.
**b)** Le billet pour l'exposition temporaire sur les océans coûtait 5 euros et celui de l'exposition sur les baleines 3,90 euros. Déterminer, à l'aide du tableur, le numéro du jour où la recette totale de l'exposition sur les baleines devient inférieure à la recette totale de l'exposition sur les océans.

**Coups de pouce**

- N'hésitez pas à créer des colonnes supplémentaires sur la feuille de calcul pour y calculer des cumuls, des sommes par exemple.
- Le tableur possède une fonction SOMME.

4

# Calcul littéral



## Les maths au quotidien

L'effet Joule traduit la dissipation de chaleur d'une résistance électrique lors du passage d'un courant électrique. C'est un effet recherché dans le cas des bouilloires mais dans d'autres cas, comme le long des lignes électriques, il est responsable de pertes d'énergie. Pour pouvoir le quantifier, il peut être nécessaire de manipuler des **expressions algébriques** (ici, $Q = R \times I^2 \times t$ est la formule de base) et de **résoudre des équations**.

# Pour prendre un bon départ

EXERCICES Sésamath
Réviser ses acquis
www.lienmini.fr/8270-s8

## 1 Reconnaître des carrés parfaits

Vu au collège

Dans la liste suivante, indiquer quels nombres sont des carrés parfaits.

121 30 49 36 40 54 56

## 2 Identifier un double produit $2 \times a \times b$

Vu au collège

Décomposer chacun des nombres de l'exercice précédent qui ne sont pas des carrés parfaits sous la forme d'un produit de trois nombres : 2 et deux autres nombres distincts.

## 3 Vérifier qu'un nombre est solution d'une équation

Vu au collège

Pour chacune des équations suivantes, indiquer si –3 est une solution.

**a)** $2x + 1 = -4$ **b)** $x^2 + 1 = 10$ **c)** $(x + 3)(x - 4) = 0$

## 4 Résoudre des équations

Vu au collège

Résoudre les équations suivantes :

**a)** $3x - 7 = 4$

**b)** $5x = 0$

**c)** $2x - 1 = 5 - 8x$

**d)** $\frac{3}{7}x = 4$

**e)** $x^2 = 4$

**f)** $x^2 = -64$

**g)** $\frac{1}{x} = -\frac{1}{3}$

**h)** $\frac{1}{x} = 3$

## 5 Calculer avec des fractions

Vu au collège

Sans calculatrice, exprimer sous la forme d'une seule fraction irréductible les calculs suivants :

**a)** $\frac{2}{7} + \frac{3}{4}$

**b)** $\frac{5}{4} - \frac{2}{9}$

**c)** $\frac{5}{7} + \frac{2}{7} \times \frac{21}{5}$

**d)** $2 - \frac{3}{4}$

## 6 Calculer des antécédents

Vu au collège

On considère une fonction $f$ définie par $f(x) = 3x - 1$.

Déterminer les éventuels antécédents par la fonction $f$ de :

**a)** 0

**b)** –2

**c)** $\frac{5}{7}$

CORRIGÉS www.lienmini.fr/8270-11

# Activités

25 min

## 1 Découvrir les identités remarquables

### A ▸ Expérimenter

**1. a)** Choisir deux nombres entre 1 et 12.

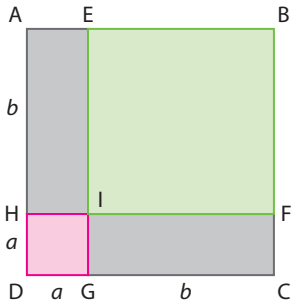
**b)** Recopier et compléter le tableau suivant.

| | Nombre | Carré de ce nombre |
|---|---|---|
| Choix 1 | | |
| Choix 2 | | |
| Somme des deux | | |

**2.** Conjecturer le lien entre le carré de la somme de deux nombres et la somme des carrés de deux nombres.

### B ▸ S'aider d'un schéma

On considère la figure ci-contre où ABCD, EBFI, HIGD sont des carrés et AEIH et IFCG sont des rectangles.




**1.** Exprimer l'aire de chacun des rectangles et des carrés cités précédemment en fonction de $a$ et $b$.

**2.** Comparer $(a + b)^2$ et $a^2 + b^2$. Que peut-on en déduire ?

### C ▸ Prouver

**1.** Nommer $a$ et $b$ les deux nombres réels et développer l'expression $(a + b)^2$.

**2.** **Pour aller plus loin** Conjecturer puis prouver le lien entre le carré de la différence de deux nombres et la différence de leurs deux carrés.

↪ Cours 1 p. 100

Problème ouvert

20 min

## 2 Résoudre algébriquement un problème avec une équation

Le professeur donne des programmes de calcul à étudier à ses élèves puis leur demande de tester des nombres mais Jamal et Lucile décident de se rajouter des défis !
Voici les programmes de calculs donnés aux deux élèves.

**Programme de Jamal**
- Choisir un nombre.
- Calculer son double.
- Soustraire 5.

**Programme de Lucile**
- Choisir un nombre.
- Calculer son triple.
- Additionner 1.

**1.** Ils veulent choisir le même nombre et obtenir le même résultat. Quel(s) nombre(s) peuvent-ils choisir ?

**2.** Ils veulent choisir le même nombre et que le produit de leurs résultats soit nul. Quel(s) nombre(s) peuvent-ils choisir ?

**3.** **Pour aller plus loin** Ils veulent choisir le même nombre et que les résultats de leurs programmes aient le même carré. Existe-t-il d'autres possibilités que celles trouvées à la question **1.** ?

↪ Cours 2 p. 102

Tableur 25 min

## 3 Bien débuter un calcul littéral fractionnaire

### A ▸ Explorer les possibles

**1.** À l'aide d'un tableur, calculer les expressions suivantes pour tous les nombres entiers entre –10 et 10.

**a)** $A = \dfrac{x-1}{x+4}$ **b)** $B = \dfrac{2x-1}{3x-7}$ **c)** $C = \dfrac{3x+4}{x+4}$ **d)** $D = \dfrac{x+5}{2x-6}$

**2. a)** Au vu des résultats trouvés, conjecturer les conditions nécessaires à un calcul en écriture fractionnaire.

**b)** Les expliciter en détail, dans le cas des expressions A et B.

### B ▸ Appliquer des règles de calculs connues

**1.** La somme de A et C est la somme de deux écritures fractionnaires de même dénominateur. Effectuer cette somme.

**2.** La différence de A et B est la différence de deux écritures fractionnaires de dénominateurs différents.

**a)** Proposer un dénominateur commun.

**b)** Déterminer deux écritures fractionnaires égales à A et B ayant ce dénominateur commun.

**c)** Effectuer la différence de ces deux écritures fractionnaires.

**d)** Développer et réduire le numérateur obtenu.

**3.** Pour aller plus loin Écrire B + D puis A – C + D sous la forme d'une seule écriture fractionnaire dont le numérateur sera ordonné et réduit.

↪ Cours 3 p. 102

25 min

## 4 Résoudre une équation quotient

### A ▸ Équation quotient nul

**1.** Recopier et compléter le tableau à l'aide de la calculatrice pour tous les nombres entiers entre –10 et 5.

| $x$ | –10 | –9 | … | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x+14$ | | | | | |
| $x-3$ | | | | | |

**2.** Quelles sont les conditions nécessaires à l'utilisation de l'expression $\dfrac{2x+14}{x-3}$ ?

**3.** Pour quelle(s) valeur(s) de $x$ proposée(s) dans le tableau a-t-on $\dfrac{2x+14}{x-3} = 0$ ?

**4.** Recopier et compléter la phrase : « Les valeurs qui annulent un quotient sont les valeurs qui … ».

### B ▸ Équation quotient non nul

**1.** Montrer que $\dfrac{6x+2}{x-3} - 4 = \dfrac{2x+14}{x-3}$.

**2.** En déduire les solutions de $\dfrac{6x+2}{x-3} = 4$.

**3.** Justifier que les équations $6x+2 = 4(x-3)$ et $\dfrac{6x+2}{x-3} = 4$ sont équivalentes pour $x \neq 3$.

**4.** Pour aller plus loin Résoudre les équations suivantes :

**a)** $\dfrac{3x+9}{4x-1} = 0$ **b)** $\dfrac{4x-5}{2x-3} = 7$ **c)** $\dfrac{8x+12}{3x+4} = 2x$ **d)** $\dfrac{2x+5}{x^2-4} = -1$

↪ Cours 4 p. 104

# 1 Distributivité et identités remarquables

## Propriétés Distributivité

- **Pour tous nombres réels $a$, $b$ et $k$ on a : $k\times(a+b)=k\times a+k\times b$.**
- **Pour tous nombres réels $a$, $b$, $c$ et $d$ on a : $(a+b)\times(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$.**

**Remarque** Cette dernière règle s'appelle **la règle de la double distributivité.**

### Exemples

- $3\times(3x+5)=3\times 3x+3\times 5=9x+15$
- $2x(x-4)=2x\times x+2x\times(-4)=2x^2-8x$
- $(3x-4)(5x-1)=(3x+(-4))\times(5x+(-1))$
$=3x\times 5x+3x\times(-1)+(-4)\times 5x+(-4)\times(-1)$
$=15x^2-3x-20x+4=15x^2-23x+4$
- $2x+14=2\times x+2\times 7=2(x+7)$
- $x^3+x^2=x^2\times x+x^2\times 1=x^2(x+1)$
- $4x^2-6xy=2x\times 2x+2x\times(-3y)=2x(2x-3y)$

**Remarque** Ces formules s'adaptent directement avec la **règle des signes** dans le cas où on considère des différences et où des nombres négatifs interviennent.

### Exemples

Ainsi, on peut écrire directement :

- $(3x-4)(5x-1)=3x\times 5x-3x\times 1-4\times 5x-4\times(-1)=15x^2-23x+4$
- $4x^2-6xy=2x\times 2x-2x\times 3y=2x(2x-3y)$

## Propriétés Identités remarquables

**Pour tous nombres réels $a$ et $b$, on a :**

- **$(a+b)^2=a^2+2\times a\times b+b^2$**
- **$(a-b)^2=a^2-2\times a\times b+b^2$**
- **$(a+b)\times(a-b)=a^2-b^2$**

**Remarques**

Ces cinq règles lient une expression **développée** et une expression **factorisée**.

Elles permettent donc de passer d'une forme à l'autre suivant le besoin.

Passer de la forme factorisée à la forme développée s'appelle un **développement**.

Passer de la forme développée à la forme factorisée s'appelle une **factorisation**.

### Démonstrations

Pour tous nombres réels $a$ et $b$, on a :

- $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba+b^2=a^2+ab-ab+b^2=a^2-b^2$

### Exemples

- $(x-4)^2=x^2-2\times x\times 4+4^2=x^2-8x+16$
- $(2x+3)^2=(2x)^2+2\times 2x\times 3+3^2=4x^2+12x+9$
- $(4x+5)(4x-5)=(4x)^2-5^2=16x^2-25$
- $x^2+6x+9=x^2+2\times x\times 3+3^2=(x+3)^2$
- $25x^2-30x+9=(5x)^2-2\times 5x\times 3+3^2=(5x-3)^2$
- $64x^2-49=(8x)^2-7^2=(8x+7)(8x-7)$

# Exercices résolus

## Méthode 1 Développer une expression

### Énoncé

**Développer, réduire et ordonner les expressions : • A = $(2x - 5)(4 - x)$ • B = $(-2x + 3)^2$ • C = $(3t + 2)(3t - 2)$**

### Solution

• A = $(2x)(-5)(4 - x)$ 1

$A = 8x - 2x^2 - 20 + 5x$ 2

$A = -2x^2 + 13x - 20$

• B = $(-2x + 3)^2$ 3

$B = (-2x)^2 + 2 \times (-2x) \times 3 + 3^2$

$B = 4x^2 - 12x + 9$

• C = $(3t + 2)(3t - 2)$ 4 $= (3t)^2 - 2^2 = 9t^2 - 4$

### Conseils & Méthodes

1. On utilise la règle de double distributivité avec la règle des signes pour $a = 2x$, $b = -5$, $c = 4$ et $d = -x$.
2. On réduit en ordonnant dans l'ordre décroissant des puissances de $x$.
3. On reconnaît $(a + b)^2$ de la première identité remarquable. On l'applique pour $a = -2x$ et $b = 3$.
4. On reconnaît $(a + b)(a - b)$ de la troisième identité remarquable. On l'applique pour $a = 3t$ et $b = 2$.

### À vous de jouer !

**1** Développer, réduire et ordonner ces expressions.

**a)** $(2x + 7)(x + 5)$ **b)** $(2x - 3)^2$

**c)** $(x - 2)^2$ **d)** $(x - 5)(1 - x)$

**2** Développer, réduire et ordonner ces expressions.

**a)** $4x(3x + 1)$ **b)** $(x + 9)(x - 9)$

**c)** $(5t - 3)^2$ **d)** $2(x - 3)^2$

↪ Exercices 50 à 65 p. 109

## Méthode 2 Factoriser une expression

VIDÉO ALL MATHS PARNAK
Comprendre une méthode
www.lienmini.fr/8270-12

### Énoncé

**Factoriser : • A = $x(x - 1) + (x - 1)(5 - 3x)$ • B = $16x^2 - 49$ • C = $x^2 + 12x + 36$**

### Solution

• A = $x \times (x - 1) + (x - 1) \times (5 - 3x)$ 1

$A = x(x - 1) + (x - 1)(5 - 3x)$ 2

$A = (x - 1)(x + (5 - 3x))$ 3

$A = (x - 1)(-2x + 5)$ 4

• B = $16x^2 - 49$ 5

$B = (4x)^2 - 7^2$ 6

$B = (4x + 7)(4x - 7)$ 7

• C = $x^2 + 12x + 36$ 8

$C = x^2 + 2 \times 6 \times x + 6^2$ 9

$C = (x + 6)^2$ 10

### Conseils & Méthodes

1. On reconnaît une somme constituée de deux produits.
2. On cherche un facteur commun aux deux produits.
3. On factorise afin d'obtenir une seule multiplication.
4. On simplifie le deuxième terme de la multiplication.
5. On reconnaît une différence de deux termes avec un carré, donc potentiellement $a^2 - b^2$.
6. On identifie $a = 4x$ et $b = 7$.
   On fait apparaître explicitement la différence de deux carrés.
7. On applique $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
8. On reconnaît une somme de trois termes.
9. On cherche à identifier $a$ et $b$ pour faire éventuellement apparaître la forme développée d'une identité remarquable.
10. On applique la formule $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ pour $a = x$ et $b = 6$.

### À vous de jouer !

**3** Factoriser les expressions suivantes.

**a)** $(x + 2)(x - 4) + (x + 2)(4 - 5x)$

**b)** $t^2 + 10t + 25$ **c)** $49 - 4x^2$

**4** Factoriser les expressions suivantes.

**a)** $x^2 - 16x + 64$ **b)** $a^2 + 22a + 121$

**c)** $7x^2 - 21x$

↪ Exercices 66 à 80 p. 110

## 2 Résolution d'équation produit nul

**Propriété** **Règle du produit nul**

**Un produit de facteurs est égal à 0 si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est égal à 0.**

**Exemple**

On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(3x-1)(x+8)=0$.

$(3x-1)(x+8)=0$ si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.

Ce qui équivaut à $3x-1=0$ ou $x+8=0 \Leftrightarrow 3x=1$ ou $x=-8 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ ou $x=-8$.

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{-8\,;\,\frac{1}{3}\right\}$.

**Remarques**

- La propriété donnant les solutions de l'équation $x^2=k$, si $k>0$, provient de cette propriété couplée à une identité remarquable. En effet :

Si $k>0$ alors $k=\left(\sqrt{k}\right)^2$.

$x^2=k \Leftrightarrow x^2-k=0 \Leftrightarrow x^2-\left(\sqrt{k}\right)^2=0$.

Par factorisation, en utilisant l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, on obtient :

$x^2=k \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{k}\right)\left(x-\sqrt{k}\right)=0$

La règle du produit nul permet de finir :

$x^2=k \Leftrightarrow x+\sqrt{k}=0$ ou $x-\sqrt{k}=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{k}$ ou $x=\sqrt{k}$.

Donc si $k>0$, l'équation $x^2=k$ a deux solutions : $x=\sqrt{k}$ et $x=-\sqrt{k}$.

- On rappelle par ailleurs que, quand $k<0$, $x^2=k$ n'admet pas de solution et que $x^2=0$ admet 0 comme unique solution.

**Exemples**

- $x^2=81 \Leftrightarrow x=\sqrt{81}$ ou $x=-\sqrt{81} \Leftrightarrow x=9$ ou $x=-9$. Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{-9\,;\,9\}$.
- $(2x+4)^2=9 \Leftrightarrow 2x+4=\sqrt{9}$ ou $2x+4=-\sqrt{9} \Leftrightarrow 2x+4=3$ ou $2x+4=-3$

$\Leftrightarrow 2x=-1$ ou $2x=-7 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ ou $x=-\frac{7}{2}$. Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{7}{2}\right\}$.

## 3 Calcul littéral en écriture fractionnaire

**Remarque**

La division par 0 n'existant pas, une expression littérale fractionnaire ne peut pas être calculée en prenant pour $x$ une valeur qui annulerait le dénominateur.

**Définition** **Valeurs interdites**

**Les valeurs annulant le dénominateur d'une écriture fractionnaire sont appelées valeurs interdites.**

**Exemple**

On donne $A=2+\frac{x+3}{x-2}$.

- $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

2 est une valeur interdite pour A.

- On peut maintenant simplifier l'écriture de A.

Pour $x\neq 2$, on a : $A=\frac{2}{1}+\frac{x+3}{x-2}=\frac{2(x-2)}{1\times(x-2)}+\frac{x+3}{x-2}=\frac{2(x-2)+(x+3)}{x-2}=\frac{2x-4+x+3}{x-2}=\frac{3x-1}{x-2}$.

# Exercices résolus

## Méthode 3 Résoudre une équation produit nul

### Énoncé

**Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : a) $(2-5x)(x+4)=0$ b) $5x^2-20x=0$ c) $(2x+1)^2-(3x-7)^2=0$**

### Solution

**a)** $(2-5x)(x+4)=0$ (1) $\Leftrightarrow 2-5x=0$ ou $x+4=0$

$\Leftrightarrow 5x=2$ ou $x=-4 \Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$ ou $x=-4$. Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{-4\,;\frac{2}{5}\right\}$.

**b)** $5x^2-20x=0$ (2) $\Leftrightarrow 5x\times x-4\times 5x=0$ (3)

$\Leftrightarrow 5x(x-4)=0$ (1) $\Leftrightarrow 5x=0$ ou $x-4=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=4$. Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{0\,;4\}$.

**c)** $(2x+1)^2-(3x-7)^2=0$ (2)

$\Leftrightarrow ((2x+1)+(3x-7))((2x+1)-(3x-7))=0$ (3)

$\Leftrightarrow (5x-6)(-x+8)=0$ (1) $\Leftrightarrow 5x-6=0$ ou $-x+8=0$

$\Leftrightarrow 5x=6$ ou $x=8 \Leftrightarrow x=\frac{6}{5}$ ou $x=8$. Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\frac{6}{5}\,;8\right\}$.

### Conseils & Méthodes

(1) On reconnaît une équation produit nul.

(2) On ne reconnaît pas une équation produit nul et l'équation n'est pas de degré 1.

(3) On cherche un facteur commun ou une identité remarquable pour factoriser.

### À vous de jouer !

**5** Résoudre dans $\mathbb{R}$ $(4x-9)(5-15x)=0$.

**6** Résoudre dans $\mathbb{R}$ $4x^2-12x+9=0$.

↪ Exercices 81 à 90 p. 110

## Méthode 4 Mettre au même dénominateur une expression fractionnaire

### Énoncé

**Écrire sous la forme d'une seule écriture fractionnaire, la plus simple possible, l'expression** $A=\frac{6x}{2x+5}-\frac{2x+7}{x-1}$.

### Solution

$A=\frac{6x}{2x+5}-\frac{2x+7}{x-1}$

• $2x+5=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$ et $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Les valeurs interdites pour A sont $-\frac{5}{2}$ et 1. (1)

• Pour $x\neq -\frac{5}{2}$ et $x\neq 1$,

$A=\frac{6x}{2x+5}-\frac{2x+7}{x-1}=\frac{6x(x-1)}{(2x+5)(x-1)}-\frac{(2x+7)(2x+5)}{(x-1)(2x+5)}$ (2)

Soit : $A=\frac{6x(x-1)-(2x+7)(2x+5)}{(x-1)(2x+5)}$ (3) $=\frac{6x^2-6x-4x^2-24x-35}{(x-1)(2x+5)}$ (4)

$A=\frac{2x^2-30x-35}{(x-1)(2x+5)}$

### Conseils & Méthodes

(1) On détermine la (ou les) valeur(s) qui annule(nt) le dénominateur pour trouver la (ou les) valeur(s) interdite(s).

(2) On effectue la réduction au même dénominateur, usuellement le produit des dénominateurs.

(3) On regroupe les deux écritures fractionnaires.

(4) On réduit l'écriture du numérateur, en développant si nécessaire.

### À vous de jouer !

**7** Écrire l'expression suivante sous la forme d'une seule écriture fractionnaire la plus simple possible :

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3x+6}$

**8** Écrire l'expression suivante sous la forme d'une seule écriture fractionnaire la plus simple possible :

$\frac{1}{x+1}-\frac{3}{2x+5}$

↪ Exercices 91 à 98 p. 111

# 4 Résolution d'équation quotient

**Propriété** **Équation quotient nul**

**Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est égal à 0 et son dénominateur est non nul.**

**Exemple**

On cherche à résoudre : $\frac{3x+5}{7x-8}=0$.

L'expression $\frac{3x+5}{7x-8}=0$ contient un dénominateur donc, avant toute chose, on détermine la (ou les) éventuelle(s) valeur(s) qui annule(nt) le dénominateur : $7x-8=0 \Leftrightarrow x=\frac{8}{7}$.

$\frac{8}{7}$ est une valeur interdite pour cette équation.

On applique la propriété pour $x \neq \frac{8}{7}$ : $\frac{3x+5}{7x-8}=0 \Leftrightarrow 3x+5=0$.

$3x+5=0 \Leftrightarrow 3x=-5 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}$.

Comme $-\frac{5}{3}$ n'est pas une valeur interdite, c'est la solution de l'équation.

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

**Remarque**

Pour des équations plus complexes, après avoir déterminé les valeurs interdites, on peut trouver une équation équivalente de la forme équation quotient nul, par une mise au même dénominateur ou en utilisant l'égalité des produits en croix.

En effet, lorsque deux écritures fractionnaires sont égales, leurs numérateurs et leurs dénominateurs sont proportionnels, on peut donc écrire :

$$\text{pour B et D non nuls, } \frac{A}{B}=\frac{C}{D} \Leftrightarrow A \times D = B \times C$$

**Exemple**

On cherche à résoudre : $\frac{2x-7}{4x+5}=\frac{3x+5}{6x-2}$.

• $4x+5=0 \Leftrightarrow 4x=-5 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}$ et $6x-2=0 \Leftrightarrow 6x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Cette équation a deux valeurs interdites : $-\frac{5}{4}$ et $\frac{1}{3}$.

• Pour $x \neq -\frac{5}{4}$ et $x \neq \frac{1}{3}$ : $\frac{2x-7}{4x+5}=\frac{3x+5}{6x-2} \Leftrightarrow (2x-7)(6x-2)=(4x+5)(3x+5)$

$\Leftrightarrow 12x^2-46x+14=12x^2+35x+25 \Leftrightarrow -46x+14=35x+25 \Leftrightarrow 81x=-11 \Leftrightarrow x=-\frac{11}{81}$

Cette valeur n'est pas une des deux valeurs interdites. Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{-\frac{11}{81}\right\}$.

**Remarque**

La propriété donnant les solutions de l'équation $\frac{1}{x}=k$, si $k \neq 0$, provient de cette règle de l'équation quotient nul couplée avec une réduction au même dénominateur.

En effet, si $k \neq 0$ et si $x \neq 0$ : $\frac{1}{x}=k \Leftrightarrow \frac{1}{x}-k=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}-\frac{kx}{x}=0 \Leftrightarrow \frac{1-kx}{x}=0 \Leftrightarrow 1-kx=0$.

$1-kx=0 \Leftrightarrow kx=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{k}$ car $k \neq 0$.

**Exemple**

L'équation $\frac{1}{x}=7$ a pour solution $\frac{1}{7}$.

# Exercices résolus

## Méthode 5 Résoudre une équation quotient

### Énoncé

**Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :**

**a)** $\dfrac{4x-5}{2x+4}=0$ **b)** $\dfrac{3x-7}{5x+3}-4=0$ **c)** $\dfrac{x-4}{3x+4}=\dfrac{2x-7}{6x-1}$

### Solution

**a)** L'expression $\dfrac{4x-5}{2x+4}=0$ comporte un dénominateur.

$2x+4=0 \Leftrightarrow 2x=-4 \Leftrightarrow x=-2$

Il y a une valeur interdite : $-2$. (1)

Pour $x \neq -2$ : $\dfrac{4x-5}{2x+4}=0 \Leftrightarrow 4x-5=0$ (2)

$4x-5=0 \Leftrightarrow 4x=5 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{4}$

Comme $\dfrac{5}{4}$ n'est pas la valeur interdite, (3) l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{5}{4}\right\}$.

**b)** L'expression $\dfrac{3x-7}{5x+3}-4=0$ comporte un dénominateur.

$5x+3=0 \Leftrightarrow 5x=-3 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5}$

$-\dfrac{3}{5}$ est la valeur interdite de cette équation. (1)

Pour $x \neq -\dfrac{3}{5}$ : $\dfrac{3x-7}{5x+3}-4=0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-7}{5x+3}-\dfrac{4(5x+3)}{5x+3}=0$ (4)

$\Leftrightarrow \dfrac{3x-7-20x-12}{5x+3}=0 \Leftrightarrow \dfrac{-17x-19}{5x+3}=0 \Leftrightarrow -17x-19=0$ (2)

$-17x-19=0 \Leftrightarrow -17x=19 \Leftrightarrow x=-\dfrac{19}{17}$

Comme $-\dfrac{19}{17}$ n'est pas la valeur interdite, (3) l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{19}{17}\right\}$.

**Remarque** On aurait aussi pu écrire : $\dfrac{3x-7}{5x+3}-4=0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-7}{5x+3}=4$ et utiliser l'égalité des produits en croix comme dans la question suivante.

**c)** L'expression $\dfrac{x-4}{3x+4}=\dfrac{2x-7}{6x-1}$ comporte deux dénominateurs.

$3x+4=0 \Leftrightarrow 3x=-4 \Leftrightarrow x=-\dfrac{4}{3}$ et $6x-1=0 \Leftrightarrow 6x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{6}$.

$-\dfrac{4}{3}$ et $\dfrac{1}{6}$ sont les deux valeurs interdites de cette équation. (1)

Pour $x \neq -\dfrac{4}{3}$ et $x \neq \dfrac{1}{6}$ : $\dfrac{x-4}{3x+4}=\dfrac{2x-7}{6x-1} \Leftrightarrow (x-4)(6x-1)=(3x+4)(2x-7)$. (5)

$(x-4)(6x-1)=(3x+4)(2x-7) \Leftrightarrow 6x^2-x-24x+4=6x^2-21x+8x-28$

$\Leftrightarrow 6x^2-25x+4=6x^2-13x-28 \Leftrightarrow -25x+13x=-28-4 \Leftrightarrow -12x=-32 \Leftrightarrow x=\dfrac{8}{3}$

Comme $\dfrac{8}{3}$ n'est pas une valeur interdite, (3) l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{8}{3}\right\}$.

### Conseils & Méthodes

1. On recherche la (ou les) valeur(s) interdite(s).
2. On applique la propriété du quotient nul.
3. On compare la (ou les) solution(s) trouvée(s) aux (à la) valeur(s) interdite(s).
4. On met au même dénominateur.
5. On utilise l'égalité des produits en croix en indiquant la (ou les) valeur(s) interdite(s).

### À vous de jouer !

**9** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

**a)** $\dfrac{4x-5}{6x+7}=0$ **b)** $\dfrac{x-2}{x+3}-5=0$

**10** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

**a)** $\dfrac{2x+9}{5-4x}=8$ **b)** $\dfrac{2x+9}{x+5}=\dfrac{6x-1}{3x-4}$

↪ Exercices 99 à 103 p. 112

# Exercices résolution de problèmes

## J'apprends à émettre une conjecture

**Réflexe 1**
Commencer par s'appuyer sur des exemples.
En géométrie, on fait généralement des schémas codés ; en algèbre ou analyse, on prend des valeurs particulières.

**Réflexe 2**
Reconnaître une configuration connue. En géométrie, cela peut être un polygone particulier, un alignement, un milieu, etc. ; en algèbre ou analyse, cela peut être des multiples, des carrés, etc.

### Énoncé

**Sans calculatrice, conjecturer la différence de deux carrés impairs consécutifs et en déduire un résultat possible de $2023^2 - 2021^2$.**

### Solution

**Étape 1** Les nombres impairs sont 1, 3, 5, 7, 9 11, …
Je teste la différence des deux carrés. **Réflexe 1**

$3^2 - 1^2 = 8$

$5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

$7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$

**Étape 2** Les résultats obtenus sont des multiples de 8. **Réflexe 2** Je remarque qu'ils se suivent.

$3^2 - 1^2 = 8 = 8 \times 1$

$5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 8 \times 2$

$7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24 = 8 \times 3$

Je cherche un lien entre les données et les nombres apparus en cours de calcul.

$\frac{1}{2} = 0{,}5$ et l'entier est 1.

$\frac{3}{2} = 1{,}5$ et l'entier est 2.

$\frac{5}{2} = 2{,}5$ et l'entier est 3.

*Réponse rédigée*

La conjecture pourrait être : « La différence de deux carrés impairs consécutifs est un multiple de 8 ».
Plus précisément, on conjecture que c'est le produit de 8 par l'entier supérieur à la moitié du plus petit nombre impair.
Ainsi, on conjecture que :
$2\,023^2 - 2\,021^2 = 8 \times 1\,011 = 8\,088$

**Remarque** Deux nombres impairs consécutifs s'écrivent $A = 2p + 1$ et $B = 2p + 3$ avec $p$ un entier.

$B^2 - A^2 = (2p + 3)^2 - (2p + 1)^2$

$B^2 - A^2 = (2p + 3 - 2p - 1)(2p + 3 + 2p + 1)$

$B^2 - A^2 = 2(4p + 4) = 8(p + 1)$

Or $A = 2p + 1$ donc $p = \frac{A - 1}{2}$ et $p + 1 = \frac{A}{2} + \frac{1}{2}$.

A étant impair, $\frac{A}{2} + \frac{1}{2}$ est entier et on a bien démontré la conjecture.

## Je m'entraîne à émettre une conjecture

### 11 Avec l'aide d'un tableur

La feuille de calcul ci-dessous donne une table de valeurs pour les fonctions $f(x) = \frac{x}{x+1}$ et $g(x) = 3 - \frac{4+3x}{x+1}$ pour $x \neq -1$.
Conjecturer la valeur de l'écart $f(x) - g(x)$ pour tout nombre $x \neq -1$ et le prouver.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | x | x/(x+1) | 3-(4+3x)/(x+1) |
| 2 | 0 | 0 | -1 |
| 3 | 1 | 0,5 | -0,5 |
| 4 | 2 | 0,66666667 | -0,333333333 |
| 5 | 3 | 0,75 | -0,25 |
| 6 | 4 | 0,8 | -0,2 |
| 7 | 5 | 0,83333333 | -0,166666667 |
| 8 | 6 | 0,85714586 | -0,142857143 |
| 9 | 7 | 0,875 | -0,125 |
| 10 | 8 | 0,88888889 | -0,111111111 |

### 12 Sommes de nombres impairs

Conjecturer la valeur de la somme des $n$ premiers entiers impairs.

### 13 Suite de carrés

**1.** Effectuer chacun des calculs ci-dessous.

**a)** $48^2 - 47^2 - 46^2 + 45^2$

**b)** $82^2 - 81^2 - 80^2 + 79^2$

**c)** $166^2 - 165^2 - 164^2 + 163^2$

**2.** Émettre une conjecture.

**3.** Prouver cette conjecture.

**CARTES FLASH**
Acquérir des automatismes
www.lienmini.fr/8270-6

# Exercices automatismes

## Rituel 1

### Effectuer mentalement des calculs simples avec des décimaux

**14** Calculer 5,4 + 8,1.

**15** Calculer 7,2 – 2,6.

### Utiliser un ordre de grandeur pour vérifier un résultat

**16** Parmi les trois nombres ci-dessous, lequel est une valeur arrondie au centième de $\sqrt{89}$ ?

• 9,43 • 8,56 • 10,24

**17** Parmi les trois nombres ci-dessous, lequel est le carré de 2,45 ?

• 3,4305 • 6,25 • 6,0025

### Effectuer une application numérique d'une formule mathématique

**18** On donne $A = x^2 + 3x - 1$.
Calculer A pour :
**a)** $x = 0$.
**b)** $x = -1$.
**c)** $x = 2$.

## Rituel 2

### Effectuer mentalement des calculs simples avec des décimaux

**19** Calculer $10 \times 0{,}1$.

**20** Calculer $10\,000 \times 0{,}002\,58$.

### Passer d'une écriture à une autre

**21** Donner la valeur décimale des fractions suivantes si elle existe, sinon donner une valeur arrondie au centième.

• $A = \frac{3}{4}$ • $B = \frac{1}{3}$ • $C = \frac{4}{5}$

### Effectuer une application numérique d'une formule mathématique

**22** On donne $B = \frac{2x+4}{3x-1}$.
Calculer B pour :
**a)** $x = -2$. **b)** $x = 2$.

**23** On donne $C = (3x - 9)(2x + 8)$.
Calculer C pour :
**a)** $x = 1$.
**b)** $x = 3$.
**c)** $x = -2$.

## Rituel 3

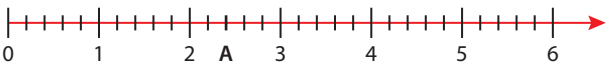
### Effectuer mentalement des calculs simples avec des fractions

**24** Calculer et donner le résultat sous forme irréductible : $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$.

**25** Calculer et donner le résultat sous forme irréductible : $\frac{6}{5} - \frac{2}{3}$.

### Repérer un nombre rationnel sur une droite graduée

**26** Déterminer l'abscisse du point A sur la droite graduée ci-dessous.




### Résoudre une équation du 1er degré

**27** Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $2x + 4 = 0$.

**28** Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $2x + 7 = -4x + 2$.

## Rituel 4

### Effectuer des calculs simples avec des pourcentages

**29** 70 % des élèves d'une classe, de 30 élèves ont suivi la finale de la Coupe du monde de football de 2022. Combien cela représente-t-il d'élèves ?

**30** 14 élèves, soit 40 % d'une autre classe, ont regardé tous les matchs de la Coupe du monde de football 2022. Combien y a-t-il d'élèves dans cette autre classe ?

### Passer d'une écriture à une autre

**31** Écrire les nombres décimaux suivants sous forme de fraction irréductible.

• A = 0,5 • B = 1,6 • C = 0,25

### Résoudre une équation du 1er degré

**32** Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $5x + 6 = -4$.

**33** Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $3x - 2 = 5 - 6x$.

↪ Travaillez les méthodes des automatismes p. 8

# Exercices d'entraînement

## Je consolide mes acquis

### 34 Réduire une expression… ou pas

Réduire, si possible, les expressions suivantes.

**a)** $2x + 4x$ **b)** $2x^2 + 3x$ **c)** $2x + 3y$

**d)** $4x + \frac{2}{5}x$ **e)** $2x^2 \times 3x$ **f)** $9x - 4x$

**g)** $3x - 11x$ **h)** $-5y - 2y$ **i)** $3 + 5x$

### 35 Réduire une expression

Réduire les expressions suivantes.

**a)** $5x^2 + 9x + 12x - 4$

**b)** $9x^2 + 14x - 6x + 8$

**c)** $x^2 - 2x - 13x + 3$

**d)** $4x^2 - 9x + 8x - 4$

**e)** $4x^2 + 12x + 9 - 16x^2 + 56x - 49$

**f)** $4x^2 \times 5x^3 - 3$

### 36 Supprimer des parenthèses

Supprimer les parenthèses et réduire les expressions suivantes.

- $A = 2x + (3x + 5)$
- $B = (4x + 4) - (6x + 1)$
- $C = (5y - 2) + (3x - 5)$
- $D = (x + 1) - (9x - 2)$
- $E = (7x - 3) + (-4x + 5)$
- $F = (6x + 1) - (-5x + 7)$
- $G = (8x - 5) - (-12x - 4)$

### 37 Résoudre $ax + b = 0$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

**a)** $x - 4 = 0$ **b)** $5x + 4 = 0$

**c)** $2x - 3 = 0$ **d)** $7 - 3x = 0$

**e)** $-4x - 6 = 0$ **f)** $2x - 7x + 10 = 0$

### 38 Résoudre $x^2 = k$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

**a)** $x^2 = 64$ **b)** $x^2 = -9$ **c)** $x^2 = 12$

**d)** $2x^2 = 98$ **e)** $3x^2 + 30 = 0$ **f)** $9x^2 - 2 = 2$

### 39 Reconnaître $x^2 = k$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

**a)** $(2x + 3)^2 = 5$

**b)** $(-7x + 4)^2 = -2$

**c)** $2(4 - 11x)^2 + 3 = 17$

**d)** $-5(3x + 2)^2 + 12 = 3$

### 40 Résoudre $\frac{1}{x} = k$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

**a)** $\frac{1}{x} = 2$ **b)** $\frac{1}{x} = -3$ **c)** $\frac{1}{x} = 9$

**d)** $\frac{1}{x} = 0$ **e)** $\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$ **f)** $\frac{1}{x} = -\frac{4}{3}$

### 41 Reconnaître $\frac{1}{x} = k$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

**a)** $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = 4$ **b)** $\frac{1}{2x + 7} = 5$

**c)** $\frac{3}{5x - 7} = 2$ **d)** $\frac{8}{3x + 4} = -6$

**e)** $\frac{-4}{4x - 4} + 2 = 6$ **f)** $\frac{5}{7x + 1} - 4 = -2$

### 42 Résoudre $ax + b = cx + d$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

**a)** $2x - 3 = 5$

**b)** $7 - 3x = 4$

**c)** $4x - 6 = 8x$

**d)** $5x + 7 = 3x + 4$

**e)** $x - 4 = 8x + 2$

### 43 Reconnaître $ax + b = cx + d$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

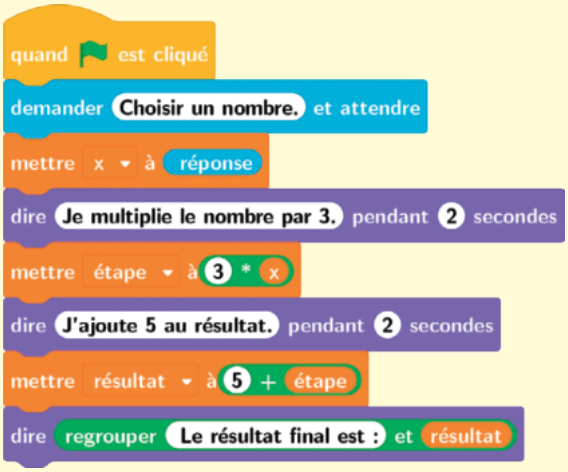
**a)** $2(5x - 9) = 4$

**b)** $3(4x - 7) = 6(3x + 2)$

**c)** $4x^2 - 8x + 5 = 4x^2 - 36x + 81$

**d)** $(4x - 3)(5x + 7) = (-2x + 3)(-10x + 9)$

### 44 Utiliser un programme de calcul




**a)** Catherine fait fonctionner ce programme Scratch en choisissant le nombre 4.
Vérifier que l'affichage final est :
« Le résultat final est : 17 ».

**b)** Quel est l'affichage final si le nombre choisi est 0 ? 2 ? –2 ?

**c)** Catherine fait fonctionner le programme et l'affichage final est : « Le résultat final est : 2 ».
Quel nombre Catherine a-t-elle choisi au départ ?

## Questions de cours

**45** Réciter les identités remarquables.

**46** Recopier et compléter la phrase :
« Un produit de facteurs est nul si… ».

**47** Qu'est-ce qu'une valeur interdite ?
Pourquoi est-elle interdite ?

**48** Recopier et compléter la phrase :
« Un quotient est nul si … ».

**49** Réciter la propriété des produits en croix pour une expression littérale.

## Développement d'expressions

Méthode 1 p. 101

**50** Oral Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

**a)** $2(x+5)$ **b)** $3(2x-4)$
**c)** $-4(5x+1)$ **d)** $-2(3x-7)$

**51** Oral Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

**a)** $3x(x+4)$
**b)** $-2x(4-3x)$
**c)** $-5x(x+2)$
**d)** $3x^2(1-2x^2)$
**e)** $5(2x+3)(-7x-4)$
**f)** $-2(3x-1)(6x-1)$

**52** Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

**a)** $(2+x)(1+3x)$
**b)** $(x^2+1)(x-2)$
**c)** $(-3x-4)(2x+5)$
**d)** $(a^2-2b)(3a^2-b)$

**53** Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

**a)** $5(2x+3)(9x+4)$
**b)** $2(3x+1)(6x-1)$
**c)** $3(5x-2)(7x-3)$
**d)** $3(4x-5)(2x-7)$
**e)** $-2(3x+5)(8x-9)$
**f)** $-7(2x-3)(4x-9)$

**54** Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

**a)** $(x+4)(x+3)-5x$
**b)** $x(2-3x)+6x^2+3x$
**c)** $(7-t)(1+3t)+3(2t+5)$
**d)** $3x^2(x+4)-x^3+3x^2-2x$

**55** Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

**a)** $(5-x)(1+2x)+(2x+3)(4x+8)$
**b)** $(6+2x)(3x-5)-(4x+5)(x+9)$
**c)** $(x-4)(4x-3)+6(x-5)(-7x-8)$
**d)** $(7x-2)(2x+6)-4(3x-7)(2x-5)$

**56** Développer les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables.

**a)** $(x+11)^2$ **b)** $(2x-5)^2$
**c)** $(7-x)^2$ **d)** $(4a+9)^2$

**57** Développer les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables.

**a)** $(x+5)(x-5)$ **b)** $(4x+1)(4x-1)$
**c)** $(2y-3)(2y+3)$ **d)** $(6b+7)(6b-7)$

**58** Développer les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables.

**a)** $(4x-9)^2$ **b)** $(6x+8)(6x-8)$
**c)** $(x-7)(x+7)$ **d)** $(5x+7)^2$

**59** En utilisant les identités remarquables, développer les expressions suivantes.

**a)** $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$ **b)** $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2$
**c)** $\left(x-\sqrt{7}\right)^2$ **d)** $\left(3x+\sqrt{15}\right)^2$

**60** En utilisant les identités remarquables, développer les expressions suivantes.

**a)** $\left(x+\frac{3}{5}\right)\left(x-\frac{3}{5}\right)$
**b)** $\left(\frac{5}{4}x+\frac{2}{7}\right)\left(\frac{5}{4}x-\frac{2}{7}\right)$
**c)** $\left(3x+\sqrt{5}\right)\left(3x-\sqrt{5}\right)$
**d)** $\left(2x+\sqrt{8}\right)\left(2x-\sqrt{8}\right)$

**61** En utilisant les identités remarquables, développer les expressions suivantes.

**a)** $\left(2x+\sqrt{5}\right)\left(2x-\sqrt{5}\right)$
**b)** $\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$
**c)** $\left(3x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$
**d)** $\left(5x-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(5x+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

**62** Développer, en utilisant si besoin les identités remarquables, pour mettre les expressions suivantes sous la forme $a+b\sqrt{2}$ où $a$ et $b$ sont des nombres réels.

**a)** $\left(1+\sqrt{2}\right)^2$ **b)** $\left(3-\sqrt{2}\right)^2$
**c)** $\left(4+2\sqrt{2}\right)^2$ **d)** $\left(4-\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right)$
**e)** $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)$ **f)** $\left(5-4\sqrt{2}\right)\left(6-2\sqrt{2}\right)$

**63** Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.
**a)** $(x+5)^2 - 21 + 2x$
**b)** $4(2x-3)^2$
**c)** $3(t-2)^2 + 1$
**d)** $-2(x+4)^2 + 4x + 7$

**64** Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.
**a)** $(x+4)^2 + (x+5)(x-7)$
**b)** $(3x-5)^2 - (2x+7)(4x+9)$
**c)** $(x-5)(x+5) - (x-5)(3x+4)$
**d)** $(5x-7)(2x-3) - (6x-1)^2$

**65** Montrer que les trois expressions suivantes sont égales pour tout réel $t$. Démo
- $A = (2t-4)^2 + 12$
- $B = 4(t-2)^2 + 12$
- $C = 4(t-3)(t-1) + 16$

## Factorisation d'expressions

Méthode 2 p. 101

**66** Factoriser les expressions suivantes.
**a)** $3x - 27$ **b)** $8x - 12$
**c)** $10x^2 - 15x + 20$ **d)** $4x - 6y$

**67** Factoriser les expressions suivantes.
**a)** $2a - 7a$ **b)** $5x^2 - 7x$
**c)** $2x^3 - 5x^2 + 8x$ **d)** $3a^2 - 24a$
**e)** $6x^3 + 9x^2$ **f)** $4\sqrt{x} + x\sqrt{x}$

**68** Recopier les expressions, souligner le facteur commun puis factoriser les expressions suivantes.
**a)** $(2x-3)(22x-3) + (2x-3)(-24x+5)$
**b)** $(15x+7)(5-x) + (12x+3)(15x+7)$
**c)** $(7x-24)(11x+8) + (7x-24)(12x+4)$

**69** Recopier les expressions, souligner le facteur commun puis factoriser les expressions suivantes.
**a)** $(3x-11)(3x-4) - (5x+4)(3x-11)$
**b)** $(14t+5)(-5t+2) - (8t-15)(14t+5)$
**c)** $(15x-2)(3x-7) - (15x-2)(-2x-1)$

**70** Oral Compléter les égalités suivantes.
**a)** $(x+\ldots)^2 = x^2 + 26x + \ldots$
**b)** $(x+\ldots)(x-\ldots) = x^2 - 49$
**c)** $\ldots + 18x + 81 = (x+\ldots)^2$

**71** Factoriser en utilisant une identité remarquable.
**a)** $x^2 + 6x + 9$ **b)** $x^2 - 18x + 81$
**c)** $9y^2 + 12y + 4$ **d)** $4x^2 - 20x + 25$

**72** Factoriser en utilisant une identité remarquable.
**a)** $x^2 - 144$ **b)** $81 - a^2$
**c)** $9x^2 - 25$ **d)** $121 - 49t^2$

**73** Factoriser en utilisant une identité remarquable.
**a)** $x^2 - 49$ **b)** $x^2 + 12x + 36$
**c)** $9x^2 - 66x + 121$ **d)** $25 - 64x^2$

**74** Factoriser en utilisant une identité remarquable.
**a)** $x^2 + 196 - 28x$
**b)** $110x + 121x^2 + 25$
**c)** $100 - 49y^2$
**d)** $\frac{9}{x^2} - \frac{4}{25}$
**e)** $144 - 168x + 49x^2$
**f)** $100 + 81b^2 + 180b$

**75** Factoriser en utilisant une identité remarquable.
**a)** $(2x+1)^2 - (3x)^2$
**b)** $16t^2 - 24t + 9$
**c)** $-26x + 169x^2 + 1$
**d)** $(x+3)^2 - 4$

**76** Choisir la bonne méthode pour factoriser les expressions suivantes.
**a)** $(6x-4)(5x+2) - (3x+2)(5x+2)$
**b)** $64t^2 - 9$
**c)** $9x^2 + 25 + 30x$
**d)** $(5x-7)(2x-3) - (x-8)(2x-3)$

**77** En mettant en évidence une différence de deux carrés, factoriser les expressions suivantes.
**a)** $(x-4)^2 - 36$ **b)** $y^2 - 5$
**c)** $25 - (2-x)^2$ **d)** $(x+3)^2 - (2x+4)^2$

**78** Factoriser les expressions suivantes.
**a)** $2x^2 + 12x + 18$
**b)** $500 - 80x^2$
**c)** $75x^2 - 210x + 147$
**d)** $28x^2 + 567 - 252x$

**79** Factoriser les expressions suivantes.
**a)** $(4x-6)(7x+8) + (4x-6)(3x+16)$
**b)** $(3x-7)(5x+13) - (3x-7)(3x+11)$
**c)** $(5x+1)(9+4x) - (5x+1)(10x-3)$
**d)** $(2x-3)^2 - (4x-6)(6x+1)$

**80** **1.** Factoriser $(x+1)^2 - (x-1)^2$.
**2.** Calculer $10\,001^2 - 9\,999^2$ sans calculatrice.

## Résolution d'équation produit nul

Méthode 3 p. 103

**81** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
**a)** $(x+3)(x-5) = 0$
**b)** $(3x+2)(5x-4) = 0$
**c)** $-x(4-5x) = 0$
**d)** $5x(x-3) = 0$
**e)** $(-3x+15)(9x+3) = 0$

**82** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
**a)** $6x^2 - 5x = 0$
**b)** $4x^2 + 8x + 4 = 0$
**c)** $(3x + 1)(x + 5) + (x + 5)(5 - 3x) = 0$
**d)** $(x - 5)(3x - 7) - (9x - 4)(x - 5) = 0$

**83** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
**a)** $(2x + 1)(3x + 10) = (2x + 1)(5x - 8)$
**b)** $(4x - 5)(9x + 7) = (8x - 3)(4x - 5)$
**c)** $(5x - 2)(3x + 4) = (2 - 5x)(2x + 7)$
**d)** $(7x - 4)(5x + 1) = (4 - 7x)(3x - 2)$

**84** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
**a)** $(x - 1)^2 = 0$
**b)** $(6x - 7)^2 = 0$
**c)** $(8f + 5)^2 = 0$
**d)** $(12x - 7)^2 = 0$

**85** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
**a)** $x^2 + 6x + 9 = 0$
**b)** $36x^2 - 12x + 22 = 21$
**c)** $5(2x + 1)^2 = 20$
**d)** $(3x + 4)^2 = (5x - 6)^2$
**e)** $(x - 2)^2 - 100 = 0$

**86** Écrire un programme en langage Python qui demande un nombre réel $k$ et qui affiche, suivant la valeur de $k$, les solutions de l'équation $x^2 = k$ si elles existent et un message sinon. Python

**87** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
**a)** $25x^2 + 10x + 1 = 4$
**b)** $9x^2 - 12x + 4 = -1$
**c)** $16x^2 + 72x + 80 = 0$
**d)** $4x^2 - 28x + 47 = 0$

**88** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
**a)** $(-3x - 8)^2 = -1$
**b)** $(11x - 3)^2 = 11$
**c)** $3(5x - 7)^2 - 4 = 8$
**d)** $-4(3x - 5)^2 + 7 = -5$

**89** On donne $A = (x + 1)^2 - (x + 1)(2x + 3)$.
**1.** Donner la forme développée de A.
**2.** Donner la forme factorisée de A.
**3.** Choisir la forme la plus adaptée pour résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
**a)** $A = 0$.
**b)** $A = -2$.

**90** On donne $B = (3x - 1)^2 - 4x(3x - 1)$.
**1.** Développer et réduire B.
**2.** Calculer B pour $x = 0$ et $x = \sqrt{2}$.
**3.** Factoriser B.
**4.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
**a)** $B = 0$.
**b)** $B = 1$.

## Simplification d'expressions fractionnaires

Méthode 4 p. 103

**91** Déterminer les valeurs interdites dans les expressions suivantes.
**a)** $\dfrac{1}{2x - 1}$
**b)** $\dfrac{4(7x - 5)}{(2x - 5)(6x + 4)}$
**c)** $\dfrac{3}{x^2 - 4}$
**d)** $\dfrac{5x + 6}{x^2 + 1} + \dfrac{8x - 9}{x}$

**92** Pour $x \neq 0$, simplifier les expressions suivantes.
**a)** $\dfrac{3x + 45}{3}$
**b)** $\dfrac{2x^2}{9} \times \dfrac{3}{10x}$
**c)** $\dfrac{6x^2 + 4x - 8}{2}$
**d)** $\dfrac{5x}{10x^2}$

**93** Après avoir déterminé les valeurs interdites, simplifier, si c'est possible, les expressions fractionnaires suivantes.
**a)** $\dfrac{2x}{x - 1} + 4$
**b)** $\dfrac{x}{2x - 3} + 5$
**c)** $3 - \dfrac{4}{x^2 + 2}$
**d)** $\dfrac{3x - 2}{x - 2} - \dfrac{2}{3}$

**94** Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une écriture fractionnaire la plus simple possible.
**a)** $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x}$
**b)** $\dfrac{5x}{x + 5} + 3x + 2$
**c)** $\dfrac{x(x + 2)}{x^2 + 1} - 9$
**d)** $\dfrac{3}{x - 4} + \dfrac{2}{x}$

**95** Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une écriture fractionnaire la plus simple possible.
**a)** $\dfrac{3(x + 2)}{x + 2}$
**b)** $\dfrac{4x(x + 5)}{(x + 5)(3 - x)}$
**c)** $\dfrac{9x + 6}{3}$
**d)** $\dfrac{4t^2 + 5t}{t}$

**96** Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule écriture fractionnaire, de la manière la plus simple possible.
**a)** $\dfrac{1}{x - 3} - \dfrac{2}{x}$
**b)** $\dfrac{2}{x - 2} - \dfrac{4}{x + 1}$
**c)** $\dfrac{3x + 3}{3x - 1} + \dfrac{2x}{2x + 1}$

**97** Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule écriture fractionnaire, de la manière la plus simple possible.
**a)** $\dfrac{3}{2x + 1} + \dfrac{5}{3x - 2}$
**b)** $\dfrac{4}{6x + 2} - \dfrac{3}{5x + 7}$
**c)** $\dfrac{8}{3x - 5} - \dfrac{7}{2x - 1}$

**98** Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule écriture fractionnaire, de la manière la plus simple possible.

**a)** $\dfrac{2x+5}{2x}+\dfrac{2x+5}{5}$

**b)** $\dfrac{4x+5}{2x+3}-\dfrac{3x+7}{3x-4}$

**c)** $\dfrac{5x-2}{3x+4}-\dfrac{3x+4}{5x-2}$

## Résolution d'équation quotient

Méthode 5 p. 105

**99** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

**a)** $\dfrac{x-3}{x+4}=0$ **b)** $\dfrac{2x-5}{x+4}=0$

**c)** $\dfrac{21-3x}{x-7}=0$ **d)** $\dfrac{1-3x}{5x+2}=0$

**100** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

**a)** $\dfrac{3x-1}{x+8}=1$

**b)** $\dfrac{3}{6x+9}=4$

**c)** $\dfrac{3x}{x-5}=-2$

**d)** $\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{1}{3}$

**e)** $\dfrac{2}{3x+4}+\dfrac{9}{7x-1}=0$

**f)** $\dfrac{3}{2x+5}-\dfrac{7}{8x-2}=0$

**101** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

**a)** $\dfrac{x}{3x-3}+5=0$ **b)** $\dfrac{8+x}{x-4}-2=0$

**c)** $\dfrac{5}{2x-4}=-3$ **d)** $\dfrac{3-x}{x+1}=1$

**102** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

**a)** $\dfrac{(3x-2)(5-x)}{x+9}=0$

**b)** $\dfrac{x^2-36}{4-x}=0$

**c)** $\dfrac{x-1}{(6x+5)(4x-3)}=0$

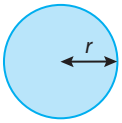
**d)** $\dfrac{2x+5}{x-7}=\dfrac{4x-8}{2x+3}$

**e)** $\dfrac{2x+5}{x+4}=\dfrac{4x+5}{3x+3}$

**103** Écrire un programme en langage Python qui demande un nombre réel $k$ et qui affiche, suivant la valeur de $k$, les solutions de l'équation $\dfrac{1}{x}=k$ si elles existent et un message sinon. Python

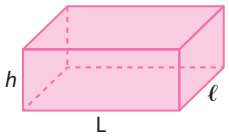
## Relation entre les variables

**104** L'aire $\mathcal{A}$ d'un disque de rayon $r$ est donnée par $\pi r^2$.




1. Exprimer $r$ en fonction de $\mathcal{A}$.
2. Quel est le rayon d'un disque ayant une aire de 25 cm$^2$ ? On donnera le résultat sous forme exacte en fonction de $\pi$ puis une valeur approchée au mm près.

**105** On considère un parallélépipède rectangle de longueur L, de largeur $\ell$, et de hauteur $h$.
Son volume est noté $\mathcal{V}$ et son aire est notée $\mathcal{A}$.

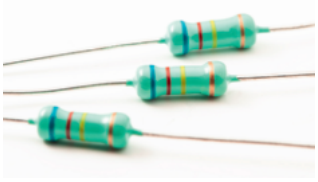



1. Exprimer $h$ en fonction de $\ell$, L et $\mathcal{V}$.
2. Exprimer $h$ en fonction de $\ell$, L et $\mathcal{A}$.

**106** La vitesse $v$ en mètres par seconde est donnée par : $v=\dfrac{d}{t}$ où $d$ est la distance parcourue en mètres et $t$ est la durée du trajet en secondes. Physique

1. Exprimer $t$ en fonction de $v$ et $d$.
2. Caroline fait une promenade à vélo. Combien de temps, en minutes, mettra-t-elle à parcourir une distance de 15 km à une vitesse de 7 mètres par seconde ? On arrondira le résultat à la minute près.

**107** En électricité, la loi d'Ohm est une relation qui lie la tension U (en volts) aux bornes d'un conducteur ohmique traversé par un courant d'intensité I (en ampères) et sa résistance R (en ohms). Elle est donnée par U = RI. Physique



1. Exprimer I en fonction de U et R.
2. Quelle la résistance d'un conducteur ohmique si on mesure une intensité I = 0,16 A et une tension U = 4 V ?

**108** Physique

En électricité, la loi d'Ohm permet aussi de déterminer la puissance d'un conducteur ohmique (en watts) traversé par un courant d'intensité I (en ampères) et sa résistance R (en ohms) par la formule $P = RI^2$.

**1.** Que se passe-t-il si on double l'intensité aux bornes du conducteur ?

**2.** Lorsque la puissance consommée augmente, la quantité de chaleur dégagée par le conducteur s'accroît.

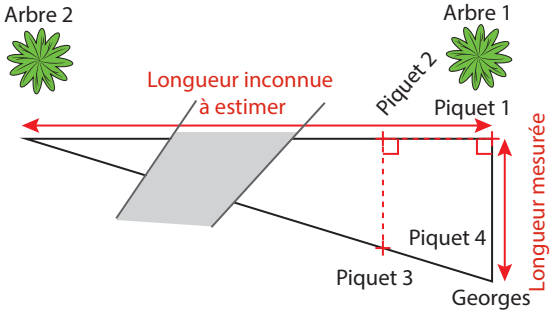
Les fabricants indiquent donc, sur chaque conducteur, une puissance maximale à ne pas dépasser pour ne pas endommager le conducteur.

Calculer l'intensité maximale à laquelle on peut soumettre un conducteur de résistance de 100 Ω de puissance maximale admissible de 2 watts.

**109** Python

Georges est un funambule. Il se promène dans la montagne à la recherche de deux arbres séparés par un ravin pour tendre un câble. Il souhaite, à chaque site qu'il découvre, estimer la longueur du câble à utiliser.

Il construit une équerre en bois pliable de 1 m de côté avec 3 piquets à planter à chaque extrémité et se positionne comme sur le schéma ci-dessous perpendiculairement à la droite formée par les deux arbres.




Sur le site envisagé, il a mesuré une distance de 1,2 m entre lui et l'arbre 1.

**1.** On appelle $x$ la distance à mesurer entre l'arbre 1 et l'arbre 2.

**a)** Exprimer en fonction de $x$ la longueur entre l'arbre 2 et le piquet 2.

**b)** Établir l'équation quotient à résoudre pour calculer $x$.

**c)** Comment peut-on interpréter les valeurs interdites de cette équation quotient ?

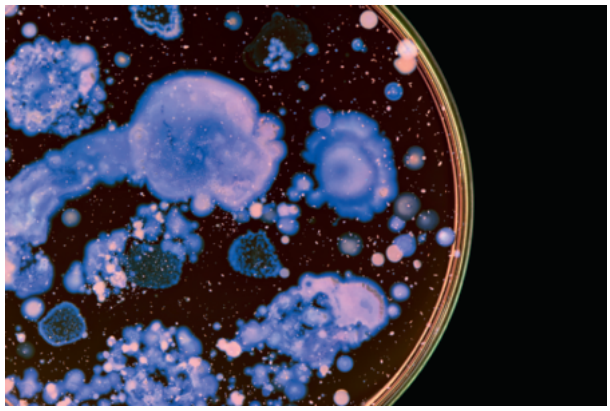
**d)** Calculer la distance entre les arbres 1 et 2.

**2.** Pour plus de simplicité, Georges souhaite programmer une application sur son smartphone qui, en fonction de la longueur mesurée, calcule la distance entre les deux arbres. Programmer en langage **Python** un programme qui répond au souhait de Georges.

## Résolution de problèmes

**110** SVT

Dans le cadre d'une étude, un laboratoire expose une culture de bactéries à des rayons ultraviolets (UV). Ces rayons ont un effet désinfectant et provoquent la diminution du nombre de bactéries.

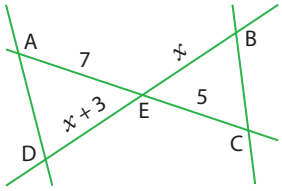


On suppose que le nombre (en millions) de bactéries présentes au bout du temps $t$ (exprimé en heures) écoulé depuis le début de l'exposition aux UV est donné par la fonction $f$ définie sur [0 ; 12] par : $f(t) = \dfrac{10}{t+1}$.

**1.** Déterminer le nombre de bactéries présentes au début de l'expérience.

**2.** Quel est le temps nécessaire pour que soient éliminé 90 % des bactéries présentes au début de l'expérience ?

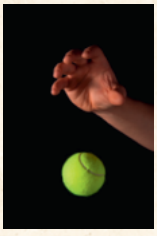
**111** Pour quelle(s) valeur(s) de $x$ les droites (AD) et (BC) sont-elles parallèles ?




**112** Esprit critique — Physique

Anita lâche la balle qu'elle tenait à la main. La formule de physique qui donne la hauteur de la balle en fonction du temps (en s) est :

$h(t) = -5t^2 + h_0$, où $h_0$ est la hauteur initiale de la balle.



On suppose que la balle était à 1 m du sol quand Anita l'a lâchée.

**1.** Quelle équation doit-on résoudre pour trouver le temps mis par la balle pour toucher le sol ?

**2.** Résoudre cette équation.

**3.** Interpréter les solutions de l'équation en fonction du problème posé.

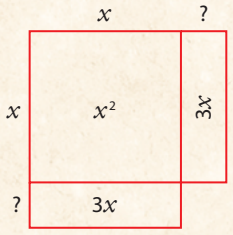
# Exercices d'entraînement

## 113 Histoire des maths

Al-Khwârizmi (~780 ; ~850)

Al-Khwârizmi était mathématicien et astronome. Il était résident à la Maison de la Sagesse à Bagdad au cours de la première moitié du IX$^{e}$ siècle. Il a étudié, entre autres, des problèmes de partage d'héritages et a mis au point des méthodes de résolution algébrique et géométrique d'équations. L'une de ces méthodes permet de résoudre une équation du second degré non factorisable par identité remarquable du type $x^2 + 6x = 40$.

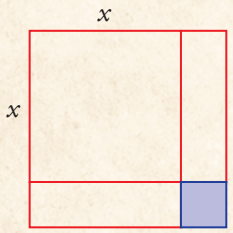
La méthode consiste à dessiner une figure composée d'un carré et de deux rectangles dont l'aire est $x^2 + 6x$.




**1.** Quelle est la dimension manquante des rectangles pour que la figure ait l'aire souhaitée ?

**2.** On complète la figure avec un petit carré afin d'obtenir un grand carré.

Combien vaut l'aire du petit carré ? Quelle est la mesure du côté du grand carré en fonction de $x$ ?




**3.** Montrer que $x^2 + 6x = 40 \Leftrightarrow (x + 3)^2 - 49 = 0$ et résoudre l'équation.

**4.** En utilisant la méthode d'Al-Khwârizmi, résoudre les équations suivantes :

**a)** $x^2 + 10x = 25$

**b)** $4x^2 + 12x = 16$

**c)** $x^2 + 16x = 21$

## 114 Esprit critique

Dans le cadre d'un dépistage de diabète, un laboratoire d'analyse étudie le taux de glycémie d'une patiente après un repas.

L'expérience montre que le taux de glycémie en fonction du temps (en heures) durant les trois heures après le repas suit la fonction $f$ définie par $f(t) = 0{,}14t^3 - 1{,}02t^2 + 1{,}6t + 1$.

**1.** Quel est le taux de glycémie de cette patiente au moment du repas ?

**2.** Développer $(0{,}7t - 1{,}6)(0{,}2t - 1)$.

**3.** Au bout de combien de temps après le repas le taux de glycémie sera-t-il revenu au taux de départ ?

## 115 Choisir le bon schéma

Arts plastiques

On veut construire une boîte en bois avec couvercle ayant une base carrée de côté $x$ et une hauteur égale à 2.

**1.** Montrer que la surface extérieure de la boîte est donnée en fonction de $x$ par la formule $S(x) = 2(x + 2)^2 - 8$.

**2.** Pour quelle(s) valeur(s) de $x$ la boîte a-t-elle une surface extérieure égale à 72 ?

↳ Résolution de problèmes p. 298 et 358

## 116 Problème ouvert

ABC est un triangle rectangle en C tel que $\widehat{CBA} = 60°$ et l'hypoténuse AB mesure 4 cm de plus que BC.

Déterminer les valeurs exactes des trois côtés de ABC.

## À chacun son rythme

**117** On donne la feuille de calcul ci-contre.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | $2(x^2+1)^2+3$ | $2(x^4+2x^2)$ | $2(x-1)^2-x(3x-2)$ | $(3x+2)^2$ | $(4x-7)^2$ |
| 2 | -2 | 53 | 48 | 9 | 16 | 225 |
| 3 | -1 | 11 | 6 | 4 | 1 | 121 |
| 4 | 0 | 5 | 0 | 1 | 4 | 49 |
| 5 | 1 | 11 | 6 | 0 | 25 | 9 |
| 6 | 2 | 53 | 48 | 1 | 64 | 1 |
| 7 | 3 | 203 | 198 | 4 | 121 | 25 |
| 8 | 4 | 581 | 576 | 9 | 196 | 81 |
| 9 | 5 | 1355 | 1350 | 16 | 289 | 169 |
| 10 | 6 | 2741 | 2736 | 25 | 400 | 289 |
| 11 | 7 | 5003 | 4998 | 36 | 529 | 441 |
| 12 | 8 | 8453 | 8448 | 49 | 676 | 625 |
| 13 | 9 | 13451 | 13446 | 64 | 841 | 841 |
| 14 | 10 | 20405 | 20400 | 81 | 1024 | 1089 |
| 15 | 11 | 29771 | 29766 | 100 | 1225 | 1369 |

### Énoncé A

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies par $f(x) = 2(x^2 + 1)^2 + 3$ et $g(x) = 2(x^4 + 2x^2)$ pour tout nombre réel $x$.

**1.** D'après la feuille de tableur, que peut-on dire de $f(x) - g(x)$ ?

**2.** Démontrer cette conjecture.

### Énoncé B

Soit $h$ une fonction définie par :
$h(x) = (2x - 1)^2 - x(3x - 2)$.

**1.** D'après la feuille de tableur, que peut-on dire de $h(x)$ ?

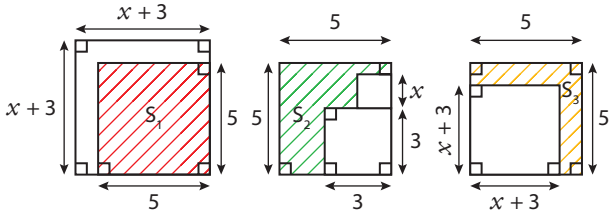
**2.** Démontrer cette conjecture.

### Énoncé C

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(3x + 2)^2 = (4x - 7)^2$.

## 118 Identités remarquables

**1.** Laquelle de ces surfaces hachurées a pour aire : $25 - (x+3)^2$ ?




On pose $E = 25 - (x+3)^2$.

**2.** Développer et réduire E.

**3.** Factoriser E.

**4. a)** Résoudre l'équation $E = 0$.

**b)** Expliquer, en utilisant la question **1.**, pourquoi l'une des solutions de l'équation était prévisible.

## 119 La meilleure forme

On considère l'expression $A(x) = (x+2)^2 - 9$ pour tout réel $x$ et la fonction A définie par l'expression $A(x)$ pour tout réel $x$.

**1.** Calculer la forme développée de $A(x)$.

**2.** Déterminer la forme factorisée de $A(x)$.

**3.** Utiliser la forme la plus adéquate pour répondre aux questions suivantes.

**a)** Calculer A(3) et $A\left(\sqrt{3}-2\right)$.

**b)** Résoudre $A(x) = 0$.

**c)** Déterminer les antécédents de –5 par A.

## 120 Identités remarquables

**1. a)** Développer et réduire l'expression :
$E = (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2$.

**b)** Application : Déterminer trois nombres entiers positifs consécutifs dont la somme des carrés est 4 802.

**2. a)** Factoriser l'expression : $G = 4x^2 - 100$.

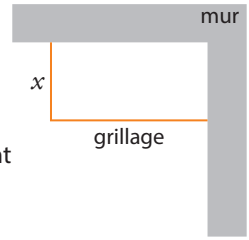
**b)** Application : Déterminer un nombre positif dont le carré du double est égal à 100.

## 121 Enclos

Victor souhaite poser un grillage au fond de son jardin afin de créer un enclos pour ses poules.

Il possède 12 mètres de grillage. On note $x$ la largeur de l'enclos.

Victor souhaite faire un enclos de 27 m².




**1.** Montrer que le problème revient à résoudre $-x^2 + 12x - 27 = 0$.

**2.** Développer $(x-3)(9-x)$.

**3.** Résoudre le problème de Victor.

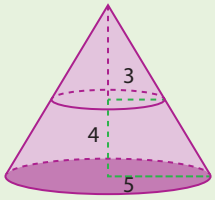
**4.** Finalement Victor préférerait obtenir un enclos de 32 m².

**a)** Vérifier que $-x^2 + 12x = 36 - (x-6)^2$

**b)** Établir une nouvelle équation à résoudre.

**c)** Résoudre cette équation et proposer des nouvelles dimensions pour le poulailler.

## 122 Rédiger une solution




On a découpé un cône parallèlement à sa base. Les dimensions du tronc de cône obtenu sont indiquées sur le schéma. Quelle était la hauteur du cône ?

↳ Résolution de problèmes p. 54 et 246

## 123 Je m'abonne… ou pas ?

L'entrée à la piscine municipale coûte 10 €.

La régie municipale propose une carte d'abonnement à 50 € l'année et l'entrée ne coûte alors plus que 5 €.

**1.** Quel sera le coût si Jack va à la piscine 15 fois dans l'année s'il s'abonne ? Quel sera le coût s'il ne s'abonne pas ?

**2.** On suppose que Jack s'abonne à la piscine et on appelle $x$ le nombre de fois où Jack ira à la piscine cette année.

**a)** Exprimer, en fonction de $x$, le coût total de l'année pour Jack.

**b)** Exprimer en fonction de $x$, le coût moyen d'une entrée à la piscine.

**Coup de pouce** Le coût moyen correspond au quotient du coût total par le nombre d'entrées.

**c)** Jack estime que l'abonnement sera profitable si le coût moyen de l'entrée à la piscine lui revient à 7 € au lieu de 10 €. Combien de fois devra-t-il aller à la piscine pour atteindre ce coût moyen ?

## 124 Une de chaque…

En utilisant les méthodes vues dans ce chapitre, résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

**a)** $\dfrac{4x-36}{6-x} = 0$

**b)** $x^2 = -10^5$

**c)** $(2x-5) - (3+11x) = 0$

**d)** $3x(x^2-81) = 0$

**e)** $(x+4)(2x-1) - (3x-5)(2x+8) = 0$

**f)** $\dfrac{1}{x} = -4$

**g)** $\dfrac{3}{x} + 4 = -\dfrac{1}{5}$

**h)** $\dfrac{-4x+3}{x+3} = 7$

**i)** $2x^3 = x^2$

# Exercices d'approfondissement

## 125 Solutions d'une équation produit

Python

On considère l'équation $(ax + b)(cx + d) = 0$ où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des nombres réels et $a$ et $c$ sont non nuls.
Écrire un algorithme en langage **Python** qui demande à un utilisateur les valeurs de $a$, $b$, $c$ et $d$ de l'équation et qui renvoie les solutions de cette équation.

## 126 Un degré de plus

$a$ et $b$ sont deux nombres réels.
Établir la forme développée de $(a + b)^3$.

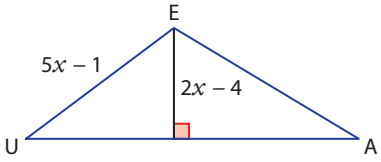
## 127 Un nombre de plus

$a$, $b$ et $c$ sont trois nombres réels.
Établir la forme développée de $(a + b + c)^2$.

## 128 Triangle particulier

**1.** Résoudre l'équation $\dfrac{2x-4}{5x-1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**2.** Que peut-on dire du triangle ci-dessous pour les valeurs de $x$ qui sont solution de l'équation ?




## 129 Probabilité de tirage

**1.** Une urne contient des boules jaunes et vertes indiscernables au toucher. Il y a 5 boules vertes.
Combien y a-t-il de boules jaunes sachant que la probabilité d'en tirer une au hasard est égale à 0,8 ?
**2.** Une urne contient des boules jaunes, vertes et rouges. Il y a deux fois plus de boules vertes que de boules jaunes et 5 boules rouges.
Combien y a-t-il de boules jaunes sachant que la probabilité d'en tirer une au hasard est égale à $\dfrac{5}{16}$ ?

## 130 Équation bicarrée

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 = 36$.
**1.** On pose $y = x^2$ dans l'équation. Transformer l'équation d'inconnue $x$ en une équation d'inconnue $y$.
**2.** Trouver les valeurs possibles de $y$.
**3.** En déduire les solutions de l'équation de départ.
**4.** En utilisant la même méthode, résoudre l'équation $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$.

## 131 Entiers impairs

On appelle $k$ un nombre entier naturel.
**1.** Écrire les 5 premiers entiers impairs sous la forme $2k + 1$ puis sous la forme d'une différence de deux carrés.
**2.** Conjecturer puis prouver la formule liant $2k + 1$ et la différence de ces deux carrés.

## 132 Conjuguons

Simplifier les écritures fractionnaires suivantes afin que le dénominateur ne comporte plus de radical.

**a)** $\dfrac{2}{x+\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{5x}{x-\sqrt{5}}$

## 133 Émettre une conjecture

Défi

**1.** Démontrer que, pour tout nombre $k$, on a :
$\left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{k(k-1)}{2}\right)^2 = k^3$.

**2.** Pour $k = 1$ : $1^3 = \left(\dfrac{1(1+1)}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1(1-1)}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1\times 2}{2}\right)^2 - 0$

Effectuer le même calcul pour $k = 2$.
En déduire la valeur de $1^3 + 2^3$.
**3.** Conjecturer la valeur de $\mathcal{S} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + k^3$ sachant que $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.
**4.** Recopier et compléter la phrase : « La somme des cubes des $k$ premiers entiers est égale à … ».

↪ Résolution de problèmes p. 106

# Vers la 1re

## 134 Vers la Spécialité Maths

On donne la fonction $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
Donner une écriture simplifiée de l'expression $\dfrac{g(1+x) - g(1)}{x}$ dont le numérateur sera de la forme $ax + b$.

## 135 Vers STL – STI2D – STMG – ST2S

**1.** Vérifier que 3 annule l'expression $A(x) = 4x^3 - 27x - 27$.
**2.** Afin de déterminer les autres valeurs qui annulent $A(x)$, on cherche à factoriser $A(x)$ sous la forme $A(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c)$.
**a)** Développer $A(x)$ et identifier les valeurs de $a$, $b$ et $c$.
**b)** Déterminer toutes les valeurs qui annulent $A(x)$.

## 136 Vers la filière technologique

On donne la fonction $f(x) = x^2 + 3x + 1$.
Donner une écriture simplifiée de l'expression $\dfrac{f(1+x) - f(1)}{x}$ sous la forme $ax + b + \dfrac{c}{x}$.

## 137 Vers la Spécialité Maths

**1. a)** Recopier et compléter les pointillés avec un nombre réel : $x^2 + 4x - 12 = (x + 2)^2 - \ldots$.
**b)** Factoriser l'expression trouvée en **1. a)**.
**c)** En déduire les solutions de l'équation $x^2 + 4x - 12 = 0$.
**2.** De la même façon, résoudre :
**a)** $x^2 - 12x + 20 = 0$
**b)** $x^2 - 2x - 8 = 8$

**CARTES FLASH**
Mémoriser le cours
www.lienmini.fr/8270-2

Objectif
## 1 Transformer une expression littérale

### Factoriser avec un facteur commun visible

Pour tous nombres réels $k$, $a$ et $b$, on a :

$k \times a + k \times b = k \times (a + b)$

### Factoriser avec les identités remarquables

Pour tous nombres réels $a$ et $b$, on a :

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

### Développer

- Pour tous nombres réels $a$, $b$ et $k$ on a :

$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

- Pour tous nombres réels $a$, $b$, $c$ et $d$ on a :

$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

### Développer avec les identités remarquables

Pour tous nombres réels $a$ et $b$, on a :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

### Valeurs interdites

Les valeurs annulant le dénominateur d'une écriture fractionnaire sont appelées **valeurs interdites**.

Il est important de les déterminer avant de commencer tout calcul avec l'écriture fractionnaire.

### Simplifier une écriture fractionnaire

Après avoir déterminé les valeurs interdites :

- on peut ajouter deux écritures fractionnaires qui ont le même dénominateur.
- on peut changer le dénominateur d'une écriture fractionnaire en multipliant le numérateur et le dénominateur par la même expression.

**Remarque** Si elle ne l'est pas déjà, la valeur qui annule cette expression sera aussi une valeur interdite.

Objectif
## 2 Résoudre une équation produit nul

### Principe

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'**un de ses facteurs est nul**.

### Point de vigilance

Une factorisation peut être nécessaire pour écrire l'équation sous forme d'un produit.

### Équation produit particulière : $x^2 = k$

Soit un nombre réel $k$ :

- Si $k < 0$, l'équation $x^2 = k$ n'a aucune solution réelle.
- Si $k = 0$, l'équation $x^2 = k$ a une seule solution réelle $x = 0$.
- Si $k > 0$, l'équation $x^2 = k$ a deux solutions réelles : $x = \sqrt{k}$ et $x = -\sqrt{k}$.

Objectif
## 3 Résoudre une équation quotient

### Principe

Un quotient est nul si et seulement si **son numérateur est nul** et son **dénominateur est non nul**.

### Résolution d'équation quotient

Lorsque deux écritures fractionnaires sont égales, leurs numérateurs et leurs dénominateurs sont proportionnels, on peut donc écrire : pour B et D non nuls,

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \times D = B \times C$.

### Point de vigilance

Avant toute chose, il faut **déterminer les valeurs interdites**.

### Équation produit particulière : $\frac{1}{x} = k$

Soit un nombre réel $k$ :

- Si $k = 0$, $\frac{1}{x} = k$ n'a aucune solution réelle.
- Si $k \neq 0$, $\frac{1}{x} = k$ a une unique solution réelle : $x = \frac{1}{k}$.

# Préparer le contrôle — Je me teste

**QCM INTERACTIF**
Tester ses connaissances
www.lienmini.fr/8270-13

## QCM Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Objectif 1

### Transformer une expression littérale

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **138** Un facteur commun de $(2x+4)(3x-1)+2(x+2)(5x+7)$ est : | $2x+4$ | $3x-1$ | $x+2$ | $5x+7$ |
| **139** Factoriser l'expression $(11x+1)(5x-4)-(11x+1)(2x-7)$ : | $(11x+1)(3x+3)$ | $(11x+1)(3x+11)$ | $33x^2+36x+3$ | $33x^2+124x+11$ |
| **140** Compléter l'expression pour qu'elle se factorise : $4x^2-4x$ … : | $+1$ | $-1$ | $+4$ | $-4$ |
| **141** Factoriser l'expression $25x^2-30x+36$ : | $(5x+6)^2$ | $(5x+6)(5x-6)$ | $(5x-6)^2$ | Ne se factorise pas |
| **142** Développer $(2x-5)^2$ : | $2x^2+10x-25$ | $4x^2+20x-25$ | $2x^2-10x+25$ | $4x^2-20x+25$ |
| **143** Factoriser $(2x-1)^2-(3x-5)^2$ : | $-5x^2+31x-30$ | $(5x-6)(-x-6)$ | $-5x^2-31x+30$ | $(5x-6)(-x+4)$ |
| **144** Quelle est la forme réduite de l'expression $\frac{2x-1}{x+3}-\frac{4x-5}{2x+7}$ ? | $\frac{19x-22}{(x+3)(2x+7)}$ | $-\frac{19x+8}{(x+3)(2x+7)}$ | $\frac{5x+8}{x+3}$ | $\frac{5x+8}{(x+3)(2x+7)}$ |

Objectif 2

### Résoudre une équation produit nul

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **145** Quel est l'ensemble des solutions de $(3x-5)(4x+6)=0$ ? | $\mathcal{S}=\left\{\frac{5}{3};\frac{3}{2}\right\}$ | $\mathcal{S}=\left\{-\frac{5}{3};\frac{3}{2}\right\}$ | $\mathcal{S}=\left\{\frac{5}{3};-\frac{3}{2}\right\}$ | $\mathcal{S}=\left\{-\frac{5}{3};-\frac{3}{2}\right\}$ |
| **146** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $16x^2+25-40x=0$ : | $\mathcal{S}=\varnothing$ | $\mathcal{S}=\left\{\frac{5}{4};-\frac{5}{4}\right\}$ | $\mathcal{S}=\left\{\frac{4}{5};-\frac{4}{5}\right\}$ | $\mathcal{S}=\left\{\frac{5}{4}\right\}$ |
| **147** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2=4x$ : | $\mathcal{S}=\left\{\frac{4}{3}\right\}$ | $\mathcal{S}=\varnothing$ | $\mathcal{S}=\left\{\frac{4}{3};0\right\}$ | $\mathcal{S}=\{0\}$ |
| **148** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(9x-5)^2+4=20$ : | $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{9};\frac{1}{9}\right\}$ | $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{9};1\right\}$ | $\mathcal{S}=\left\{-\frac{8}{9};\frac{1}{9}\right\}$ | $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{9};\frac{9}{9}\right\}$ |

Objectif 3

### Résoudre une équation quotient

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **149** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{1}{2x-6}=2$. | $\mathcal{S}=\left\{\frac{13}{4}\right\}$ | $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{4}\right\}$ | $\mathcal{S}=\left\{3+\frac{1}{4}\right\}$ | Pas de solution |

**Pour les exercices 150 et 151, on donne l'équation : $\frac{6x-1}{2x+3}=\frac{3x-7}{x-4}$.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **150** Quelles sont les valeurs interdites ? | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{3}{2}$ | 4 | $\frac{7}{3}$ |
| **151** Quelles sont les solutions ? | $\frac{5}{4}$ | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ |

↪ Corrigés p. 390

# Préparer le contrôle — Je m'entraîne

## Parcours différenciés

| | Objectif 1 | Objectif 2 | Objectif 3 |
|---|---|---|---|
| Parcours A | 1 3 7 152 | 5 155 | 9 158 |
| Parcours B | 58 73 91 153 | 81 156 | 99 159 |
| Parcours C | 58 73 91 154 | 81 157 | 99 160 |

## Exercices

### Objectif 1 Transformer une expression littérale

**152** **1.** Développer les expressions suivantes :
**a)** $4(3x+1)$ **b)** $(2x+5)(4x+7)$
**c)** $(x+5)^2$ **d)** $(x-6)^2$
**e)** $(x+4)(x-4)$
**2.** Factoriser les expressions suivantes :
**a)** $21x+6$ **b)** $x(3x+4)+y^2(3x+4)$
**c)** $x^2+14x+49$ **d)** $x^2-8x+16$
**e)** $x^2-81$
**3.** Réduire sous la forme d'une écriture fractionnaire :
**a)** $2+\dfrac{3x+1}{x-4}$ **b)** $\dfrac{3}{2x-1}+\dfrac{4}{5x+7}$

**153** **1.** Développer les expressions suivantes :
**a)** $-2(5x+4)$ **b)** $(3x-10)(5x+1)$
**c)** $(2x+7)^2$ **d)** $(4x-9)^2$
**e)** $(5x+6)(5x-6)$
**2.** Factoriser les expressions suivantes :
**a)** $35x-28$ **b)** $24x^2-21$
**c)** $(x+4)(3x+11)-(x+4)(6x+7)$
**d)** $9x^2+30x+25$ **e)** $36x^2-108x+81$
**3.** Réduire sous la forme d'une écriture fractionnaire :
**a)** $4-\dfrac{5x+11}{3x-7}$ **b)** $\dfrac{x+1}{2x+9}-\dfrac{2x+3}{4x-1}$

**154** **1.** Développer les expressions suivantes :
**a)** $-6(2x-5)$ **b)** $(10x-7)(2x-7)$
**c)** $(2x+5)^2-(3x-1)(2x+5)$
**d)** $(4x-7)(5x+6)-(4x-7)^2$
**2.** Factoriser les expressions suivantes :
**a)** $-56x+32$
**b)** $9x^2+6x+1-(3x+1)(5x-4)$
**c)** $(5x-3)(14x-4)-(7x-2)^2$
**3.** Réduire sous la forme d'une écriture fractionnaire :
**a)** $3-\dfrac{4x-5}{6x+11}$ **b)** $\dfrac{6x-1}{2x-5}-\dfrac{3x-4}{x-9}$

### Objectif 2 Résoudre une équation produit nul

**155** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
**a)** $(2x-7)(8x-13)=0$
**b)** $(10x-23)^2=0$
**c)** $x^2+24x+144=0$

**156** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
**a)** $(3x+4)(5x-7)-(5x-7)(10x-11)=0$
**b)** $225x^2-169=0$
**c)** $(5x-10)^2=(8x+7)^2$

**157** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
**a)** $(6x+4)(8x-5)=(9x+6)(4x-1)$
**b)** $-3x^2+18x-27=0$
**c)** $x^2+4x+4=(x+2)(3x-7)$

### Objectif 3 Résoudre une équation quotient

**158** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
**a)** $\dfrac{2x-11}{5x+4}=0$ **b)** $\dfrac{4x}{6x-1}=-3$

**159** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
**a)** $\dfrac{(4x-3)(7x+6)}{4x-5}=0$ **b)** $\dfrac{4x-1}{6x+9}=\dfrac{2x+5}{3x-11}$

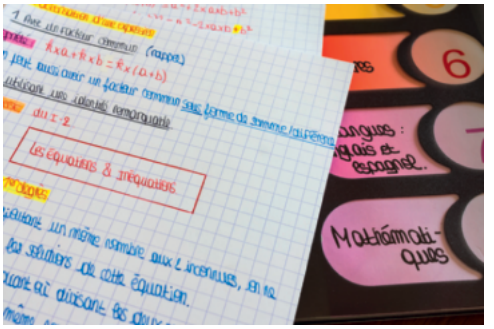
**160** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
**a)** $\dfrac{(3x+5)(2x-10)}{9x+15}=0$
**b)** $\dfrac{9x^2-42x+49}{9x^2-49}=0$

↪ Corrigés p. 390

# Travaux pratiques

Python — 50 min — Raisonner — Communiquer

## 1 Organisation de révisions



Harry veut préparer pour réviser les identités remarquables des cartes flash avec un énoncé et sa correction. Son idée est d'imprimer une page avec une trentaine de questions-réponses obtenues aléatoirement qu'il découperait et collerait sur des cartes vierges.
Il s'amuse donc à créer un programme en langage **Python**.

### A ▸ Obtenir une carte flash puis 30

**1.** Pour obtenir la première carte, Harry utilise :
• l'instruction `random.randint(a,b)` qui génère un nombre entier aléatoire entre `a` et `b` ;
• l'instruction `str(n)` qui transforme une variable de type nombre en chaîne de caractères ;
• l'instruction '`+`' qui permet de concaténer des chaînes de caractères.

**Coup de pouce** Concaténer signifie coller bout à bout.

```
1 import random
2 a=random.randint(2,5)
3 b=random.randint(2,5)
4 def Affichage():
5     expression_facto="("+str(a)+"x+"+str(b)+")^2"
6     expression_dev=
7     print("énoncé : Développer "+expression_facto)
8     print("correction : "+expression_dev)
9 Affichage()
```

**a)** Quelles sont les variables utilisées dans ce programme et leur type ?
**b)** Recopier le programme et compléter la ligne 6.

**2.** Modifier le programme pour qu'il affiche 30 énoncés et 30 corrections comme dans l'exemple ci-contre.

```
énoncé : Développer (2x+5)^2
correction : 4x^2+20x+25
énoncé : Développer (5x+4)^2
correction : 25x^2+40x+16
énoncé : Développer (3x+5)^2
correction : 9x^2+30x+25
```

### B ▸ Pile ou Face

Harry souhaiterait que le programme alterne de manière aléatoire des exercices de factorisation et de développement. Il imagine un « Pile ou Face » : avec Pile « je développe » et Face « je factorise ».
Introduire dans le programme une variable aléatoire « `pileouface` » et modifier le programme pour obtenir un résultat similaire à celui ci-contre.

**Coup de pouce** `pileouface=random.randint(0,1)`.

```
énoncé : Factoriser 9x^2+24x+16
correction : (3x+4)^2
énoncé : Développer (2x+4)^2
correction : 4x^2+16x+16
énoncé : Factoriser 4x^2+16x+16
correction : (2x+4)^2
énoncé : Factoriser 16x^2+32x+16
correction : (4x+4)^2
```

### C ▸ Pour aller plus loin Tout envisager

**1.** Le domaine de choix pour les valeurs de a et de b ne contient pas 1.
**a)** En quoi le choix du nombre 1 complexifie le programme ?
**b)** Modifier le programme pour que les choix `a=1` et `b=1` puissent être envisagés.

```
4 a=random.randint(2,5)
5 b=random.randint(2,5)
```

**2.** Harry voudrait que le programme propose aléatoirement les trois types d'identités remarquables comme dans l'exemple ci-contre.
Modifier le programme en conséquence.

```
énoncé : Développer (x-5)^2
correction : x^2-10x+25
énoncé : Factoriser 16x^2-4
correction : (4x+2)(4x-2)
énoncé : Factoriser 4x^2+8x+16
correction : (2x+2)^2
énoncé : Factoriser 9x^2+24x+16
correction : (3x+4)^2
```

Python 30 min Raisonner Expérimenter

## 2 Économie agricole

Un producteur de pommes de terre peut récolter à ce jour 1 200 kg et les vendre 50 centimes le kg.
S'il attend, sa récolte augmentera de 60 kg par jour mais le prix baissera de 1 centime par kg et par jour.

**1.** Quelle somme, en euros, touchera-t-il :
**a)** s'il vend sa récolte tout de suite? **b)** s'il attend un mois (30 jours)?

**2.** On suppose que ce producteur attend $n$ jours.
**a)** Calculer, en fonction de $n$, le nombre de kg de pommes de terre qu'il a à vendre et le prix de vente d'un kg.
**b)** Au bout de combien de jours sa récolte aura-t-elle perdu toute sa valeur ?
**c)** Montrer que le prix de vente total en euros, au bout de $n$ jours, est $P(n) = 0{,}6(-n^2 + 30n + 1\,000)$.
**d)** Au bout de combien de jour aura-t-il un prix de vente égal à 735 € ?

**3.** Pour aller plus loin Que fait le programme en langage **Python** ci-dessous ? Justifier.

```
A=600.0
P=617.4
n=1
while A<P:
    n=n+1
    A=P
    P=0.6*(-n*n+30*n+1000)
print("Au bout de "+str(n-1)+" jours, le prix de vente sera de "+str(A)+" euros")
```

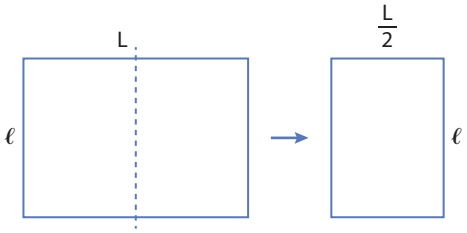
Calcul formel 40 min Raisonner Calculer

## 3 Format de rectangles

Le format d'un rectangle correspond au quotient de sa longueur par sa largeur.
Par exemple un téléviseur 16:9 signifie que le quotient de sa longueur par sa largeur est égal à $\frac{16}{9}$.

### A ▸ Format usuel du papier

L'un des formats le plus utilisé est celui du papier A4. Il fait partie d'une série de plusieurs tailles A0, A1, etc. On passe d'une taille de papier à l'autre en pliant une feuille en deux dans le sens de la longueur.
La nouvelle feuille est un rectangle de même format.




**1.** Exprimer $f_1$ le format de la grande feuille et $f_2$ le format de la demi-feuille en fonction de L et $\ell$.

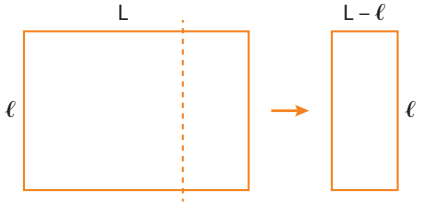
**2.** Trouver une relation qui lie $f_1$ et $f_2$.

**3.** Le format des feuilles est identique : $f_1 = f_2 = f$. Transformer la relation trouvée en **2.** en équation d'inconnue $f$.

**4.** Résoudre cette équation et en déduire la valeur du format cherché.

### B ▸ Pour aller plus loin Format d'or

Les rectangles d'or sont une série de rectangles de même format.
On passe d'un rectangle à un autre en découpant un carré.




**1.** Montrer que l'égalité $f_1 = f_2$ est équivalente à $L^2 - L\ell - \ell^2 = 0$.

**2.** Dans un logiciel de calcul formel, factoriser $L^2 - L\ell - \ell^2$ et utiliser le résultat pour transformer l'équation précédente en une équation produit nul d'inconnue $f$.

**3.** Résoudre cette équation et déterminer ce format commun qu'on appelle le nombre d'or.

5

# Géométrie non repérée

## Les maths au quotidien

Comment mesurer la force d'un vent ? Comment expliquer que l'on se tient debout sur Terre ? Pour répondre à ces questions, les ingénieurs modélisent les scénarios et représentent la force étudiée par un outil mathématique : les **vecteurs**, définis par une norme, une direction et un sens. Ils existent en **géométrie plane** et en **géométrie de l'espace**.

# Pour prendre un bon départ

EXERCICES Sésamath
Réviser ses acquis
www.lienmini.fr/8270-s10

## 1 Théorèmes de Pythagore, de Thalès et trigonométrie

Vu au collège

On considère un rectangle ABCD tel que AD = 4 cm et AB = 7 cm.

**1.** Calculer la longueur exacte de la diagonale [AC].

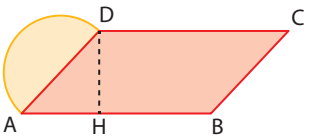
**2.** Soit E sur [AD] tel que ED = 1 cm.
La parallèle à (AC) passant par E coupe [CD] en I. Calculer DI.

**3.** Déterminer la mesure en degré de l'angle $\widehat{DAC}$. Arrondir au dixième.

## 2 Aires

Vu au collège

On considère un parallélogramme ABCD comme ci-contre tel que AB = 8 cm et BC = 4 cm. La hauteur DH est de 3 cm.



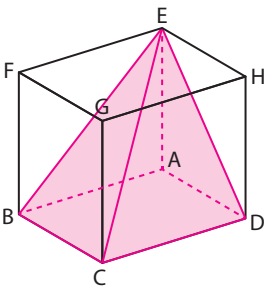

**1.** Déterminer l'aire du triangle ABD et l'aire du parallélogramme ABCD.

**2.** Calculer l'aire du demi-disque de diamètre [AD].

## 3 Volumes

Vu au collège

Dans un cube ABCDEFGH de côté 4 cm, on construit la pyramide à base carrée ABCD et de sommet E.




**1.** Calculer le volume du cube.

**2.** Calculer le volume de la pyramide EABCD.

## 4 Identifier un parallélogramme

Vu au collège

On considère un quadrilatère ABCD non croisé.
Parmi les six situations ci-dessous, quelles sont celles pour lesquelles on peut affirmer que ABCD est un parallélogramme ?

**a)** AB = CD

**b)** AB = CD et AD = BC.

**c)** AB = CD et (AB)//(CD).

**d)** [AC] et [BD] ont le même milieu.

**e)** La translation qui transforme A en B transforme D en C.

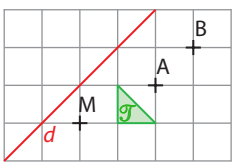
**f)** La translation qui transforme A en D transforme C en B.

## 5 Compléter une figure en faisant des constructions

Vu au collège

Reproduire puis compléter la figure ci-contre.

**1. a)** Construire $M_1$, le symétrique du point M par rapport à la droite *d*.




**b)** Construire $M_2$, l'image du point M par la translation qui transforme A en B.

**2.** De même, construire les images $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ du triangle $\mathcal{T}$ par ces mêmes transformations.

CORRIGÉS www.lienmini.fr/8270-14

# Activités

Géométrie dynamique — 20 min

## 1 Découvrir le projeté orthogonal

### A ▸ Conjecturer avec GeoGebra

**1. a)** Construire un triangle ABC (polygone sur GeoGebra).

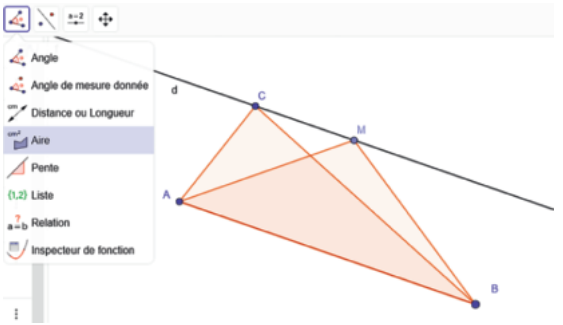
**b)** Tracer *d* la parallèle à [AB] passant par C.

**c)** Lire l'aire du triangle ABC.

**2. a)** Placer un point M sur *d*.

**b)** À l'aide de GeoGebra donner l'aire de ABM.

**c)** Déplacer le point M et comparer les aires des triangles ABC et ABM. Quelle conjecture peut-on émettre ?




### B ▸ Démonstration dans un cas particulier

**1.** Tracer un triangle ABC tel que AB = 5 cm et la droite *d* parallèle à (AB) passant par C. Placer un point M sur *d*.

**2. a)** Tracer la perpendiculaire à [AB] passant par C, elle coupe (AB) en C'.

Le point C' est le pied de la hauteur issue de C, il est appelé le **projeté orthogonal** de C sur (AB).

**b)** Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de CC'.

**3. a)** Tracer H le projeté orthogonal de M sur (AB). Quelle est la nature de CC'HM ? Justifier.

**b)** Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de MH. Conclure.

**4.** Pour aller plus loin Si le triangle ABC initial est rectangle en C et de dimensions 3 ; 4 et 5 cm, quelle est la longueur CC' ?

↪ Cours 1 p. 126

10 min

## 2 Découvrir les vecteurs

Le jeu de hockey sur glace est un jeu d'équipe dont l'objectif est de marquer des points en amenant le palet dans le but à l'aide d'une crosse. Un joueur vient de glisser, amenant son palet du bout de la crosse. Voici un schéma du mouvement, qui indique que le joueur, la crosse et le palet ont subi le même déplacement. On observe que la main du joueur s'est déplacée du point Q au point Q'.

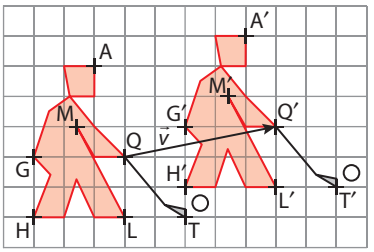
**1.** Quelle transformation reconnaît-on ?

**2. a)** En quel point cette transformation transforme-t-elle le point A ?

**b)** En quel point cette transformation transforme-t-elle le point H ?

Le vecteur $\overrightarrow{QQ'}$ indique le sens, la direction et la longueur du mouvement.

On dit qu'il s'agit de la **translation de vecteur** $\overrightarrow{QQ'}$ ou $\overrightarrow{AA'}$ ou $\overrightarrow{HH'}$ et que les vecteurs $\overrightarrow{QQ'}$, $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{HH'}$ sont **égaux.**




**3. a)** Décrire des caractéristiques communes de ces vecteurs.

**b)** Quelle est la nature des quadrilatères QQ'A'A et QQ'H'H ? Justifier.

**4. a)** Quelle semble être la nature du quadrilatère AA'H'H ?

**b)** Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{A'H'}$ sont-ils égaux ? Citer d'autres couples de vecteurs égaux.

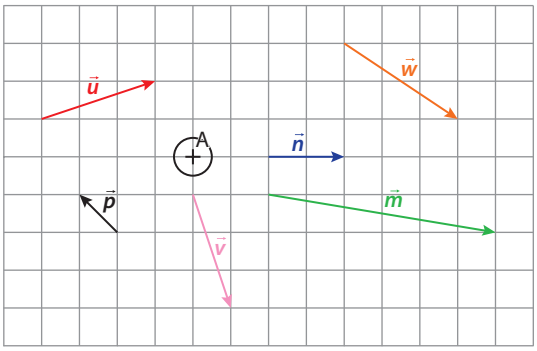
**5.** Pour aller plus loin Les points images de trois points alignés sont-ils aussi alignés ?

↪ Cours 2 p. 128

20 min

## 3 Enchaîner deux translations

On reprend le contexte du jeu de hockey de l'activité précédente. La patinoire est vue de dessus. Au cours du jeu, le palet va subir plusieurs déplacements représentés par les vecteurs dans la figure ci-contre.




**1. a)** Reproduire la figure.

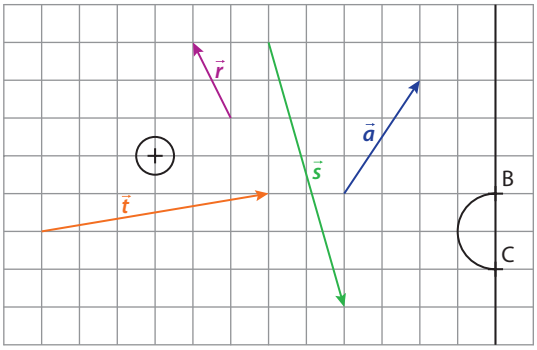
**b)** Construire l'image $A_1$ du palet A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

**c)** Enchaîner par la construction de $A_2$ image de $A_1$ par la translation de vecteur $\vec{w}$.

**d)** En admettant que l'enchaînement de ces deux translations est une translation, tracer le vecteur qui lui est associé.

**L'enchaînement de ces deux translations** correspond à la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{w}$.

**e)** À quel vecteur de la figure est égal le vecteur $\vec{u} + \vec{w}$ ?




**2. a)** Le jeu continue : construire $A_3$ l'image de $A_2$ par la translation de vecteur $\vec{p}$ puis $A_4$ l'image de $A_3$ par la translation de vecteur $\vec{v}$.

**b)** Construire un vecteur qui correspond au vecteur $\vec{p} + \vec{v}$.

**3.** Pour aller plus loin Le but est marqué si le palet rentre dans le demi-cercle de diamètre [BC] de la figure ci-contre.

En subissant successivement les translations de vecteurs $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$ et $\vec{a}$, le palet atteint-il le but ?

↪ Cours 3 p. 130

Géométrie dynamique 15 min

## 4 Multiplier un vecteur par un réel

**1.** À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

**a)** Créer un vecteur $\vec{u}$.

**Remarque** Le logiciel note le vecteur $\vec{u}$ sans la flèche mais il apparaît bien dans la catégorie vecteur.

**b)** Créer un curseur $k$ de −5 à 5 et d'incrément 0.2.

**2.** Dans la barre de saisie, taper k*u.

On obtient alors un nouveau vecteur nommé $\vec{v}$ par défaut.

Coup de pouce Utiliser ce bouton et choisir l'outil vecteur.

Coup de pouce Utiliser ce bouton et choisir l'outil curseur.

**3.** Comparer le sens, la direction et la norme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ lorsque :

**a)** $k = 1$ **b)** $k > 1$ **c)** $k < -1$ **d)** $0 < k < 1$ **e)** $-1 < k < 0$

**4.** Pour aller plus loin On considère deux vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{n}$. Le vecteur $3\vec{p} + 3\vec{n}$ est-il égal au vecteur $3(\vec{p} + \vec{n})$ ?

↪ Cours 4 p. 132

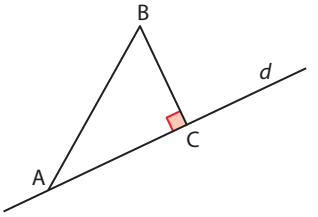
# 1 Géométrie sans repère

**Définition** **Projeté orthogonal**

**Le point H, intersection de la droite *d* et de la perpendiculaire à la droite *d* passant par le point M, est appelé projeté orthogonal de M sur *d*.**

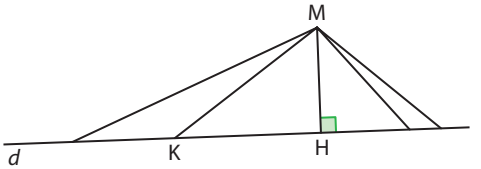
**Exemple**

On considère une droite *d*, un point A sur *d*, un point B n'appartenant pas à *d* et le point C, projeté orthogonal de B sur *d*.
Le triangle ABC est rectangle en C.




**Définition et propriété** **Plus courte distance d'un point à une droite**

- **La distance du point M à la droite *d* est la plus courte distance entre le point M et un point de la droite.**
- **La distance du point M à la droite *d* est la longueur MH où H est le projeté orthogonal de M sur *d*.**
- **Si M appartient à la droite *d* alors M et H sont confondus donc la distance de M à *d* est MM et est égale à 0.**




**Démonstration**

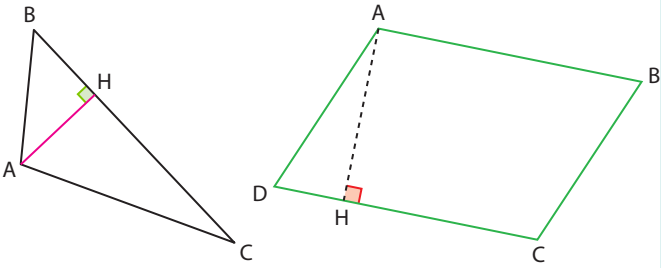
Soient une droite *d* et un point M non situé sur *d*.

On note H le projeté orthogonal de M sur *d*.

Soit K un point quelconque de la droite *d* distinct de H. Le triangle MHK est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore on a : $MK^2 = MH^2 + HK^2$, par conséquent, comme $HK \neq 0$, on a $MK^2 > MH^2$.
Comme MK et MH sont positifs on en déduit que quel que soit le point K de la droite *d*, $MK > MH$, ce qui montre que la plus courte distance est bien MH.

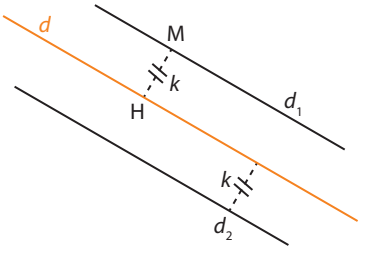
**Propriétés** **Hauteur dans un triangle et dans un parallélogramme**

- **Dans un triangle ABC de base [BC], la hauteur est la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur (BC) : c'est la plus courte distance du point A à la droite (BC).**
- **Dans un parallélogramme ABCD de base [CD], la hauteur est la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur (CD) : c'est la plus courte distance du point A à la droite (CD).**




**Propriété** **Ensemble des points à égale distance d'une droite**

**Soient une droite *d* et *k* un nombre réel. L'ensemble des points situés à une distance égale à *k* de la droite *d* est composé de deux droites $d_1$ et $d_2$ parallèles à *d* et symétriques l'une de l'autre par rapport à *d*.**




**Exemple**

↪ Méthode 1 p. 127

# Exercices résolus

Méthode 1

## Calculer la distance d'un point à une droite

**Énoncé**

**1. Tracer une droite *d* puis construire un point A situé à 3 cm de la droite *d*.**

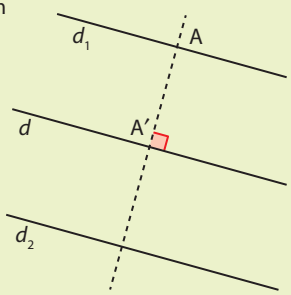
**2. Construire l'ensemble des points situés à 3 cm de la droite *d*.**

**Solution**

**1. Analyse** : la distance du point A à la droite *d* est 3 cm signifie que, si on place le projeté orthogonal A′ de A sur *d*, on a AA′ = 3 cm et (AA′) est perpendiculaire à *d*.

**Synthèse** : on trace la droite perpendiculaire à *d* passant par un point A′ de *d*. On place un point A sur cette droite tel que AA′ = 3 cm. 1

**2.** L'ensemble est constitué de la droite $d_1$ parallèle à *d* passant par A et de la droite $d_2$ symétrique de $d_1$ par rapport à *d*. 2




**Conseils & Méthodes**

1. La distance d'un point à une droite est la distance du point à son projeté orthogonal sur cette droite.
2. Utiliser la propriété du cours qui donne l'ensemble des points à égale distance d'une droite.

**À vous de jouer !**

**1** **1.** Soient un triangle ABC et un point D intérieur au triangle. Construire le projeté orthogonal du point D sur chacun des côtés du triangle.
**2.** Tracer l'ensemble des points situés à la même distance que D de la droite (AC).

**2** On considère une droite *d* et un point I n'appartenant pas à *d*.
Construire tous les points situés à la même distance que I de la droite *d*.

↪ Exercices 58 à 68 p. 137

Méthode 2

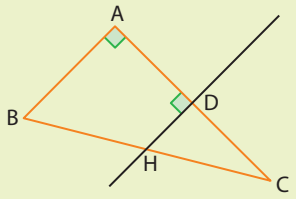
## Utiliser le projeté orthogonal

**Énoncé**

**ABC est un triangle rectangle en A. La médiatrice de [AC] coupe (AC) en D et (BC) en H.**

**1. Déterminer, en justifiant, un projeté orthogonal d'un point de la figure.**

**2. Déterminer la nature du quadrilatère ADHB.**




**Solution**

**1.** (DH) est la médiatrice de [AC] donc (DH) est perpendiculaire à (AC). Comme D est sur (AC), c'est le projeté orthogonal de H sur (AC). 1 2

**2.** Les droites (AB) et (DH) sont perpendiculaires à (AD) 3 donc parallèles 4, ainsi le quadrilatère ADHB est un trapèze. De plus l'angle $\widehat{DAB}$ est un angle droit. 3

Donc le quadrilatère ADHB est un trapèze rectangle.

**Conseils & Méthodes**

1. Chercher des droites perpendiculaires sur la figure.
2. La médiatrice d'un segment est perpendiculaire au segment et passe par le milieu du segment.
3. Le triangle ABC est rectangle en A.
4. Deux droites perpendiculaires à une même troisième droite sont parallèles entre elles.

**À vous de jouer !**

**3** On considère un rectangle ABCD avec AB = 6 et BC = 3. On note H le projeté orthogonal de B sur (AC).
**1.** Calculer l'aire du triangle ABC.
**2.** Déterminer la longueur de la diagonale AC.
**3.** En déduire la longueur BH.

**4** On considère un trapèze ABCD tel que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
On note A′ et D′ les projetés orthogonaux de A et D sur la droite (BC). Quelle est la nature de AA′D′D ?

↪ Exercices 69 à 74 p. 138

# 2 Translations et vecteurs associés

## Définitions Translation et vecteur

**Soient A, B, C et D quatre points.**
**• On rappelle que D est l'image de C par la translation qui transforme A en B si et seulement si ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati.**
**• La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.**
**• Si les points A et B sont confondus, on parle alors de vecteur nul, noté $\vec{0}$.**

## Définitions Caractéristiques d'un vecteur

**Lorsque A et B sont des points distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :**
**• sa direction : celle de la droite (AB) ou de toute droite parallèle à (AB).**
**• son sens : de A vers B.**
**• sa norme : la longueur du segment [AB], notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ qui correspond à la distance AB.**

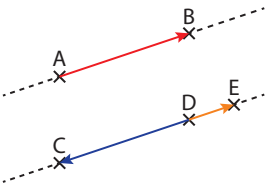
**Remarques**

- Le vecteur nul n'a ni direction, ni sens et sa norme est 0.
- On représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par une flèche d'origine A et d'extrémité B.

**Exemple**

Sur la figure ci-contre, les droites (AB) et (CD) sont parallèles avec AB = CD et E ∈ (CD).

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont la même direction car (AB)//(DC), la même norme car AB = DC mais pas le même sens (« vers la droite » pour $\overrightarrow{AB}$ et « vers la gauche » pour $\overrightarrow{DC}$).
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ ont la même direction car (AB)//(DE), pas la même norme car AB ≠ DE et le même sens « vers la droite ».

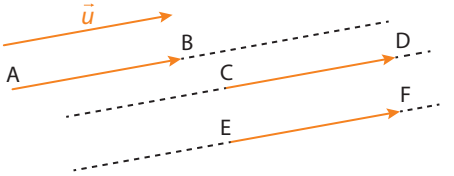



## Définitions Vecteurs égaux et représentants

**• Deux vecteurs ayant même direction, même sens et même norme sont égaux.**

**• Lorsque des vecteurs sont égaux on dit qu'ils sont des représentants d'un même vecteur, que l'on peut également noter avec une seule lettre minuscule $\vec{u}$ indépendamment des deux points origine et extrémité.**

**Remarque** Dans le schéma ci-contre, on a tracé des représentants d'origine A, C et E du vecteur $\vec{u}$.

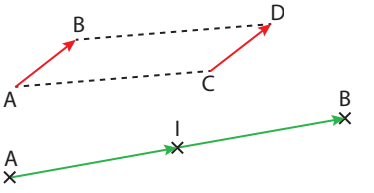



## Propriétés Caractérisation du parallélogramme et du milieu d'un segment

**• D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.**

**• Un quadrilatère ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati) si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.**

**• Le point I est le milieu d'un segment [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.**




**Démonstration**

ABDC est un parallélogramme si et seulement si les côtés opposés [AB] et [CD] sont parallèles et de même longueur, ce qui équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction et même norme ainsi que même sens puisqu'il s'agit de ABDC et non ABCD, autrement dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux.

# Exercices résolus

## Méthode 3 Déterminer les caractéristiques d'un vecteur

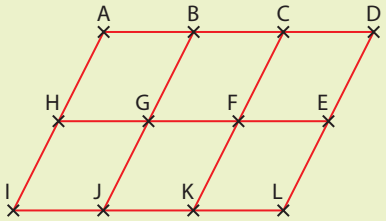
### Énoncé

**La figure ci-contre représente six parallélogrammes identiques.**

**1. Citer un vecteur qui a même direction que le vecteur $\overrightarrow{FG}$ mais pas le même sens et pas la même norme.**

**2. Citer le représentant d'origine I du vecteur $\overrightarrow{ED}$.**

**3. Citer un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{HF}$.**




### Solution

1. On peut citer le vecteur $\overrightarrow{BD}$. La figure est constituée de parallélogrammes, donc (BD) et (FG) sont parallèles. (1) $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{FG}$ ont donc la même direction mais pas le même sens : vers la droite pour $\overrightarrow{BD}$ et vers la gauche pour $\overrightarrow{FG}$. (2) Enfin $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{FG}$ n'ont pas la même norme car BD est double de FG. (3)

2. Il s'agit du vecteur $\overrightarrow{IH}$. Il est d'origine I, il a la même direction que $\overrightarrow{ED}$, car la droite (IA) est parallèle à (ED). (1) Il a le même sens (vers le haut (2)) et la même norme (longueur du côté du parallélogramme (3)).

3. On cherche un vecteur qui a même direction, même sens et même norme que le vecteur $\overrightarrow{HF}$. On peut citer le vecteur $\overrightarrow{AC}$. (1) (2) (3)

### Conseils & Méthodes

(1) Des vecteurs ont même direction si leurs « droites associées » sont parallèles.

(2) Deux vecteurs de même direction ont le même sens s'ils parcourent cette direction dans le même sens.

(3) Des vecteurs ont la même norme si leurs segments associés ont même longueur.

### À vous de jouer !

**5** On considère un rectangle ABCD de centre R tel que les triangles BRC et ARD sont équilatéraux.
1. Citer trois vecteurs qui ont la même norme.
2. Citer des vecteurs égaux.

**6** On considère les parallélogrammes CDEF et EFKL de la figure de la **méthode 3**. Citer deux vecteurs :
**a)** de même norme mais pas de même sens.
**b)** de même direction mais pas de même sens.

↪ Exercices 75 à 81 p. 139

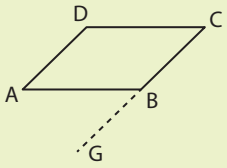
## Méthode 4 Démontrer avec des égalités de vecteurs

### Énoncé

**ABCD est un parallélogramme. G est le symétrique de C par rapport à B.**

**1. Citer, en justifiant, deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{BC}$.**

**2. En déduire un autre parallélogramme à l'aide des points de la figure.**




### Solution

1. Par la symétrie de centre B, B est le milieu de [GC] et on a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GB}$. (1)
On a aussi $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ car ABCD est un parallélogramme. (2)

2. On en déduit que $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AD}$ donc ADBG est un parallélogramme. (2)

### Conseils & Méthodes

(1) Le milieu d'un segment est caractérisé par une égalité vectorielle.

(2) Un parallélogramme est caractérisé par une égalité vectorielle.

### À vous de jouer !

**7** DEF est un triangle. G et H sont les images respectives de D et E par la translation de vecteur $\overrightarrow{FE}$.
1. Citer deux vecteurs égaux.
2. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère EHGD ?

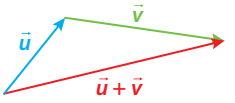
**8** ABCD est un rectangle de centre I.
K et J sont les symétriques de I et A par rapport à D.
1. Justifier pourquoi on a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{DK}$.
2. En déduire la nature de AIJK.

↪ Exercices 82 à 88 p. 140

# 3 Somme et différence de deux vecteurs

## Définition Vecteur somme

**La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u}+\vec{v}$, est le vecteur associé à la translation obtenue par l'enchaînement de la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$.**

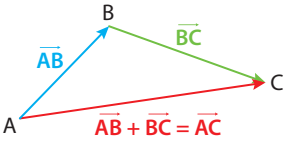



**Remarque**

Pour construire la somme $\vec{u}+\vec{v}$, on met des représentants des vecteurs bout à bout et on considère le vecteur allant de l'origine du premier à l'extrémité du second.

## Propriété Relation de Chasles

**Soient trois points A, B et C.**
**L'enchaînement de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.**
**On a alors : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.**




**Exemple**

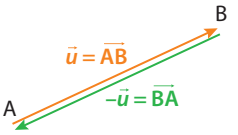
Pour tous points A, B, C et D on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ ou encore $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}$.

**Remarque**

L'égalité vectorielle ne veut pas dire que AB + BC = AC, car en effet, on a AB + BC ⩾ AC : c'est l'inégalité triangulaire.

## Définition Vecteur opposé

**Le vecteur opposé d'un vecteur $\vec{u}$ est le vecteur qui possède la même direction et la même norme que $\vec{u}$ mais un sens opposé.**
**Le vecteur opposé d'un vecteur $\vec{u}$ est noté $-\vec{u}$.**

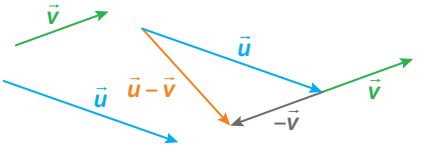



**Conséquence**

L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $-\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BA}$.

## Définition Différence de deux vecteurs

**Le vecteur $\vec{u}-\vec{v}$ est défini par $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$ ce qui signifie que soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.**




**Remarque**

Pour construire la différence $\vec{u}-\vec{v}$, on met des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{v}$ bout à bout et on considère le vecteur allant de l'origine du premier à l'extrémité du second.

## Propriétés Opérations sur les vecteurs

**Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ :**

- **$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$**
- **$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$, on peut donc aussi écrire ce vecteur $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.**
- **$\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$, la somme d'un vecteur et de son opposé est le vecteur nul.**
- **$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$**

**Remarque**

Ces propriétés algébriques sur les opérations sur les vecteurs et la relation de Chasles permettent de simplifier des sommes et des différences de vecteurs.

# Exercices résolus

Méthode 5

## Construire la somme ou la différence de deux vecteurs

**Énoncé**

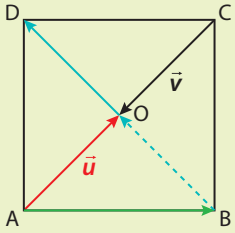
**On considère un carré ABCD de centre O.**

**Construire un représentant de chacun des vecteurs suivants :**

**a)** $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}$ **b)** $\vec{v} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BO}$

VIDÉO ALL MATHS PARNAK
Comprendre une méthode
www.lienmini.fr/8270-15

**Solution**




**a)** On met les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OD}$ bout à bout donc on trace le vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis le représentant du vecteur $\overrightarrow{OD}$ d'origine B c'est-à-dire $\overrightarrow{BO}$.

Un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}$ a pour origine A et extrémité O donc $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO}$, c'est la relation de Chasles. 1 2

**b)** On met les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $-\overrightarrow{BO}$ bout à bout donc on trace le vecteur $\overrightarrow{CD}$, puis le représentant du vecteur $-\overrightarrow{BO}$ d'origine D c'est-à-dire $\overrightarrow{DO}$.

Un représentant du vecteur $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BO}$ a pour origine C et extrémité O donc $\vec{v} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{CO}$. 1 2

**Conseils & Méthodes**

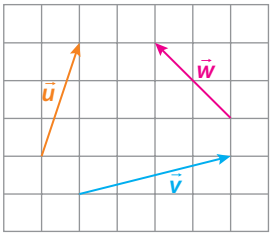
1 Lorsque l'origine du représentant n'est pas précisée dans l'énoncé, on peut partir de n'importe quel point.

2 On peut considérer d'autres représentants des vecteurs afin de les mettre bout à bout pour utiliser la relation de Chasles.

**À vous de jouer !**

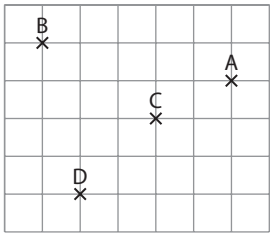
**9** Reproduire la figure et construire un représentant des vecteurs suivants :

**a)** $\vec{u} + \vec{v}$ **b)** $\vec{u} + \vec{w}$
**c)** $-\vec{w}$ **d)** $\vec{v} - \vec{u}$




**10** Reproduire la figure et construire un représentant des vecteurs suivants :

**a)** $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ **b)** $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
**c)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ **d)** $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CD}$




Exercices 89 à 92 p. 140

Méthode 6

## Utiliser la relation de Chasles et opérer sur les vecteurs

**Énoncé**

**Simplifier les écritures vectorielles suivantes :**

**a)** $\overrightarrow{RT} + \overrightarrow{TE}$ **b)** $\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{CR}$ **c)** $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{RC}$ **d)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{SB}$

**Solution**

**a)** $\overrightarrow{RT} + \overrightarrow{TE} = \overrightarrow{RE}$ 1

**b)** $\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RC}$ 2 $= \overrightarrow{AC}$ 1

**c)** $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{RC} = \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{CD}$ 3 $= \overrightarrow{RD}$ 1

**d)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{SB}$ 3 $= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BS}$ 1 2 $= \overrightarrow{CS}$ 1

**Conseils & Méthodes**

1 On reconnaît la situation de la relation de Chasles.
On peut alors réduire la somme.

2 On transforme la différence $\vec{u} - \vec{v}$ en somme $\vec{u} + (-\vec{v})$ en ajoutant l'opposé du vecteur.

3 $\vec{u} + \vec{v}$ est égal à $\vec{v} + \vec{u}$.

**À vous de jouer !**

**11** Simplifier les écritures vectorielles suivantes :

**a)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ **b)** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$ **c)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$

**12** Simplifier les écritures vectorielles suivantes :

**a)** $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MR}$ **b)** $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{TR}$ **c)** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

Exercices 93 à 99 p. 140

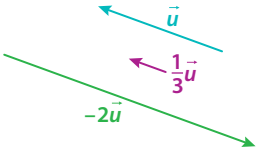
# 4 Produit d'un vecteur par un nombre réel et colinéarité

**Définition** **Produit d'un vecteur par un nombre réel**

**Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et $k$ un nombre réel non nul, alors le vecteur $k\vec{u}$ résultant de la multiplication de $\vec{u}$ par $k$ est défini par :**
- **sa direction : la même que celle de $\vec{u}$.**
- **son sens : celui de $\vec{u}$ si $k > 0$, l'opposé de celui de $\vec{u}$ si $k < 0$.**
- **sa norme : si $k > 0$ alors $\|k\vec{u}\| = k \times \|\vec{u}\|$ et si $k < 0$ alors $\|k\vec{u}\| = -k \times \|\vec{u}\|$.**

**Exemple**

À partir de $\vec{u}$, on représente les deux vecteurs $\frac{1}{3}\vec{u}$ et $-2\vec{u}$.




**Remarque** Si $k = 0$ ou si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$.

**Propriétés** **Distributivité entre vecteurs et réels**

**Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous nombres réels $k$ et $k'$ :**
- **$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$**
- **$(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$**
- **$k(k'\vec{u}) = kk'\vec{u}$**

**Exemples**
- $2(\vec{u} + \vec{w}) = 2\vec{u} + 2\vec{w}$
- $3\vec{v} - 5\vec{v} = (3 - 5)\vec{v} = -2\vec{v}$
- $\frac{1}{2} \times 4\vec{u} = \frac{4}{2}\vec{u} = 2\vec{u}$

**Définition** **Vecteurs colinéaires**

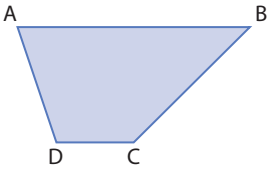
- **Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. S'il existe un réel $k$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. $k$ est alors appelé coefficient de colinéarité.**
- **Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs car $\vec{0} = 0\,\vec{u}$.**

**Remarque** On en déduit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires s'ils ont la même direction.

**Exemple**

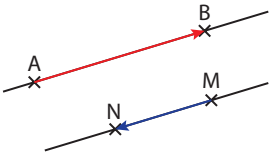
Le trapèze ABCD ci-contre est tel que AB = 3DC.

(AB)//(CD) donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même direction. Ils sont de sens opposés et on a AB = 3DC on en déduit que $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{CD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.




**Propriété** **Parallélisme de deux droites**

**Deux droites (AB) et (MN) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.**




**Démonstration**

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires si et seulement si les droites (MN) et (AB) ont la même direction, c'est-à-dire si les droites (MN) et (AB) sont parallèles.

**Propriété** **Alignement de trois points**

**Trois points distincts A,B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.**

**Démonstration**

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont parallèles, c'est-à-dire ici confondues puisqu'elles ont le point A en commun.

# Exercices résolus

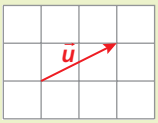
Méthode 7

## Multiplier un vecteur par un nombre réel

**Énoncé**

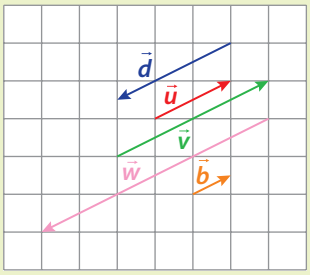
**On donne le vecteur $\vec{u}$ ci-contre.**
**Construire un représentant de chacun des vecteurs suivants :**

**a)** $\vec{v} = 2\vec{u}$ **b)** $\vec{w} = -3\vec{u}$ **c)** $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{u}$ **d)** $\vec{d} = \frac{-3}{2}\vec{u}$




**Solution**

On obtient les vecteurs ci-dessous. 1 2 3




**Conseils & Méthodes**

1. Tous les vecteurs obtenus en multipliant le vecteur $\vec{u}$ par un nombre réel ont même direction, on peut donc utiliser le quadrillage.
2. Le quadrillage permet d'obtenir facilement le double, le triple et la moitié de la norme de $\vec{u}$.
3. Attention au sens des vecteurs : si $k$ est positif le sens est le même que celui de $\vec{u}$ et si $k$ est négatif le sens est contraire à celui de $\vec{u}$.

### À vous de jouer !

**13** On considère la droite (AB) ci-dessous.

Construire un représentant de chacun des vecteurs :

**a)** $-\overrightarrow{AB}$ **b)** $2\overrightarrow{AB}$ **c)** $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ **d)** $\frac{-4}{3}\overrightarrow{AB}$

**14** Sur une droite (AB), placer les points C, D, E et F tels que :

**a)** $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{AD} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$

**c)** $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB}$ **d)** $\overrightarrow{AF} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$

↪ Exercices 100 à 107 p. 141

Méthode 8

## Appliquer la colinéarité

**Énoncé**

**Soit ABC un triangle. P et R sont les points tels que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.**

**1. Montrer que $\overrightarrow{AR} = 3\overrightarrow{AP}$.**

**2. Que peut-on en déduire pour les points A, R et P ?**

**Solution**

1. $3\overrightarrow{AP} = 3\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = 3 \times \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + 3 \times \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ 1 2

$3\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AR}$

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AR}$ sont colinéaires donc les points A, R et P sont alignés. 3

**Conseils & Méthodes**

1. Pour établir une égalité on peut partir de n'importe quel membre. Ici on commence avec le calcul de $3\overrightarrow{AP}$.
2. On utilise les propriétés de distributivité.
3. On utilise la propriété liant parallélisme de droites et alignement de points à la colinéarité de vecteurs.

### À vous de jouer !

**15** Soit ABC un triangle.

P et R sont les points tels que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BR} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

1. Montrer que $\overrightarrow{BR} = -2\overrightarrow{AP}$.
2. Que peut-on en déduire pour les droites (AP) et (BR) ?

**16** Soient trois points A, B et C distincts et non alignés. M et N sont les points tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AN}$.
2. Que peut-on en déduire pour les points A, M et N ?

↪ Exercices 108 à 114 p. 142

# Exercices résolution de problèmes

## J'apprends à analyser un problème pour le résoudre

**Réflexe 1**
Identifier la conclusion ou la question posée.

**Réflexe 2**
En déduire les étapes du raisonnement ainsi que les propriétés utiles et leurs hypothèses.

**Réflexe 3**
Reprendre le raisonnement dans l'ordre en suivant toutes les étapes.

### Énoncé

RST est un triangle. On considère les points M et N tels que $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{ST}$.

**Montrer que les points R, N et T sont alignés.**

### Solution commentée

**Étape 1** Il s'agit de montrer que les points R, N et T sont alignés. **Réflexe 1**

**Étape 2** Dans un contexte vectoriel, cela consiste à montrer que $\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{RN}$ sont colinéaires. **Réflexe 2**
Le raisonnement est :

1 : Faire un schéma.

2 : Partir d'un des deux vecteurs pour faire apparaître le second grâce à la relation de Chasles.

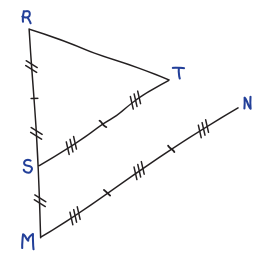
3 : Conclure.

**Étape 3** Je construis un schéma à main levée (↪ Résolution de problèmes p. 298) et je fais apparaître les caractéristiques de la figure.

$\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{RS}$ signifie que les points S, M et R sont alignés et $SM = \frac{1}{2}RS$.

$\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{ST}$ signifie que les droites (MN) et (ST) sont parallèles et $MN = \frac{3}{2}ST$.

*Brouillon*




**Étape 4** Il faut donc décomposer judicieusement soit $\overrightarrow{RT}$ soit $\overrightarrow{RN}$ en utilisant la relation de Chasles.

- L'énoncé donne des égalités sur $\overrightarrow{SM}$ et $\overrightarrow{MN}$, on doit probablement utiliser ces égalités c'est-à-dire faire apparaître ces deux vecteurs à l'aide de la relation de Chasles en partant soit de $\overrightarrow{RT}$, soit de $\overrightarrow{RN}$.
- Le seul « point commun » entre les vecteurs $\overrightarrow{SM}$ et $\overrightarrow{MN}$ d'une part et un des vecteurs $\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{RN}$ d'autre part est le point N : on va donc essayer d'exprimer $\overrightarrow{RN}$ en fonction de $\overrightarrow{SM}$ et $\overrightarrow{MN}$ à l'aide de la relation de Chasles.
- Comme $\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{SN}$, je cherche à obtenir une relation du type $\overrightarrow{RN} = \ldots + \overrightarrow{SN}$ qui est donc $\overrightarrow{RN} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SN}$.
- Plus simplement, je constate que $\overrightarrow{RN} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MN}$ : je n'ai plus qu'à remplacer à l'aide des égalités de l'énoncé en essayant de faire apparaître le vecteur $\overrightarrow{RT}$.

*Réponse rédigée*

$$\overrightarrow{RN} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{RS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{RS} + \frac{3}{2}\overrightarrow{ST}$$

$$\overrightarrow{RN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{RS} + \frac{3}{2}\overrightarrow{ST} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST}\right) = \frac{3}{2}\overrightarrow{RT}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{RN}$ sont colinéaires donc les points R, N et T sont alignés.

## Je m'entraîne à analyser un problème pour le résoudre

### 17 Vecteurs et colinéarité

On considère un triangle ABC. On définit deux points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC}$.

Démontrer que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

### 18 Milieux et colinéarité

Soit ABCD un trapèze tel que $\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{DC}$.
On note I le milieu de [AB], K le milieu de [DC].
Les diagonales [AC] et [DB] se coupent en M.
Démontrer que les points I, M et K sont alignés.

### 19 Droites concourantes et projeté

On considère deux points distincts A et B et trois droites distinctes $d_1$, $d_2$ et $d_3$ passant par le point A.
On considère $B_1$, $B_2$ et $B_3$ les projetés orthogonaux du point B respectivement sur les droites $d_1$, $d_2$ et $d_3$.

**1.** Que peut-on conjecturer sur les points A, B, $B_1$, $B_2$ et $B_3$ ?

**2.** Démontrer cette conjecture.

**CARTES FLASH**
Acquérir des automatismes
www.lienmini.fr/8270-6

# Exercices automatismes

## Rituel 1

### Calculer simplement avec des fractions et des décimaux

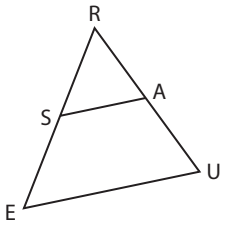
**20** Calculer astucieusement :

**a)** $0{,}25 \times 12 \times 4 \times 25 \times 4$ **b)** $99 \times 101$

**21** Calculer : $3 \times \frac{5}{4} + 1$.

### Appliquer le théorème de Thalès

**22** On donne SA = 5, EU = 9, RA = 4 et (AS)//(UE).
Calculer RU.

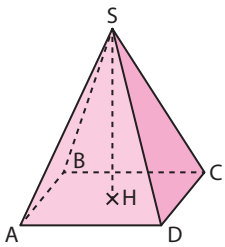



### Calculer des périmètres, des aires et des volumes

La pyramide ci-contre a pour base le carré ABCD de côté 3 cm et sa hauteur [SH] mesure 5 cm.

**23** Calculer la longueur AC.

**24** Calculer la longueur SA.




## Rituel 2

### Calculer simplement avec des fractions

**25** Calculer : $\frac{2}{3} \times 3 + \frac{1}{2}$.

**26** Calculer : $\frac{3}{4} + \frac{7}{2} \times \frac{3}{4}$.

### Appliquer le théorème de Pythagore

**27** Soit EFG un triangle rectangle en F.
On donne EF = 7 et EG = 9. Calculer $FG^2$.

### Convertir avec les échelles

**28** Un rectangle de dimensions 7 cm et 15 cm représente un terrain à l'échelle 1/1 000ième.
Quelles sont les dimensions réelles de ce terrain ?

## Rituel 3

### Calculer simplement avec des fractions et des décimaux

**29** Calculer : $\dfrac{\frac{2}{5}+1}{\frac{2}{5}+3}$.

**30** Calculer astucieusement : $0{,}3 \times 5 \times 2 \times 8 \div 0{,}5$.

### Calculer des angles

**31** Soit EFG un triangle rectangle en F. On donne EF = 7 et EG = 9. Calculer une valeur approchée de l'angle $\widehat{EGF}$.

### Préciser les unités sur un graphique

**32** Sur le dessin de son triangle, Marion a marqué les longueurs des côtés 14 ; 14 et 14 mais elle a oublié d'indiquer les unités de mesure des longueurs !
Retrouver les bonnes unités de mesure de sorte que le périmètre du triangle soit égal à 155,4 cm.

## Rituel 4

### Calculer simplement avec des décimaux et des fractions

**33** Calculer mentalement :

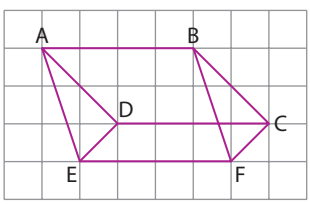
**a)** $3{,}5 - 3{,}5 \times 2 - 2 \times 7{,}5$

**b)** $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$

**34** Calculer : $\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \times 7$.

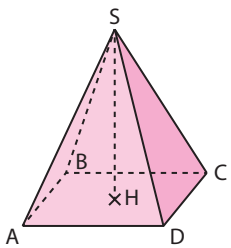
### Nommer des quadrilatères à partir d'un graphique

**35** Nommer les parallélogrammes tracés ci-dessous.




### Calculer des périmètres, des aires et des volumes

**36** La pyramide ci-contre est de base carrée de côté 3 cm et de hauteur SH = 5 cm.
Calculer le volume de cette pyramide.




↪ Travaillez les méthodes des automatismes p. 8

# Exercices d'entraînement

## Je consolide mes acquis

### 37 Théorème réciproque de Pythagore

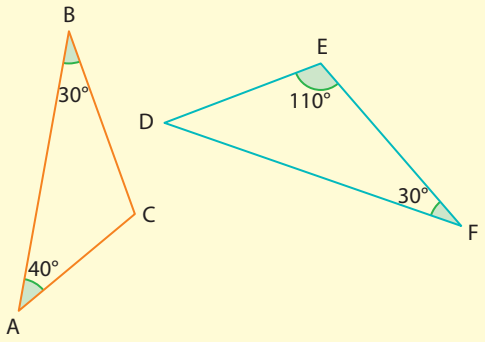
Dans un triangle ABC on a : BC = 10, AB = 6 et AC = 8.
Le triangle ABC est-il rectangle ?

### 38 Trigonométrie

Dans un triangle ABC rectangle en A, on a :
AB = 4, AC = 3 et BC = 5.
Déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$.

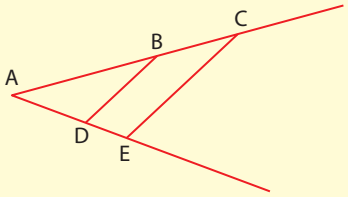
### 39 Triangles semblables

Les triangles ABC et DEF sont-ils semblables ?




### 40 Théorème réciproque de Thalès

On considère d'une part trois points A, B et C alignés dans cet ordre et tels que AB = 8 et AC = 12 ; d'autre part, trois points alignés dans cet ordre A, D et E tels que AD = 15 et AE = 20.
Les droites (BD) et (CE) sont-elles parallèles ?




### 41 Comprendre un script écrit en Scratch

On considère le script suivant.

À la fin de l'exécution du script, à quelle distance de son point de départ se trouve le lutin ?

## Calculer des longueurs, des aires, des volumes

**42** On considère un rectangle ABCD tel que AB = 5 et BC = 2. E est le point sur le segment [AB] tel que AE = 3.
**1. a)** Calculer la longueur BD.
**b)** Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{ABD}$ arrondie au degré.
**2.** La parallèle à (BD) passant par E coupe le segment [AD] en F. Calculer la longueur AF.

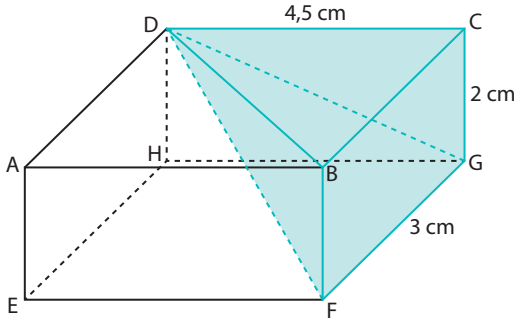
**43** Dans un triangle ABC rectangle en C, on donne : AB = 8 et AC = 4.
**1.** Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$.
**2.** En déduire la valeur de l'angle $\widehat{CAB}$.
**3.** Calculer la longueur BC par deux méthodes différentes.

**44** On considère la fonction en langage **Python** suivante : Python

```
def hyp(a,b):
    c=math.sqrt(a**2+b**2)
    return c
```

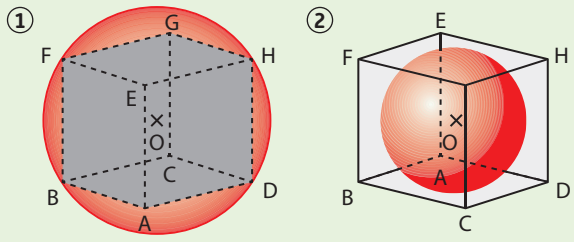
On rappelle que `math.sqrt(x)` renvoie $\sqrt{x}$ et on suppose le module `math` importé.
Que renvoie l'instruction hyp(6,8) ?

**45** On considère une pyramide DBCGF construite à partir d'un pavé droit ABCDEFGH tel que DC = 4,5 cm, GC = 2 cm et GF = 3 cm.
**1.** Quelle est la hauteur de la pyramide ?
**2.** Calculer le volume de cette pyramide.



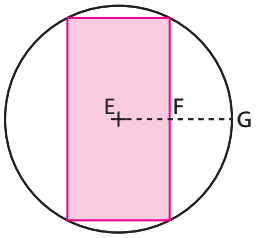

### 46 Décomposer un problème

Soit un cube d'arête 2 cm.
**1.** Calculer le volume de la sphère circonscrite au cube.
**2.** Calculer le volume de la sphère inscrite dans le cube.

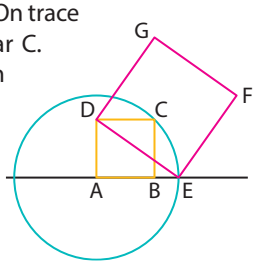



↪ Résolution de problèmes p. 31

**47** Un rectangle est inscrit dans un cercle de centre E.
G est sur le cercle, F est sur le côté du rectangle, E, F et G sont alignés. On donne EF = 5, FG = 8.
Calculer l'aire du rectangle.




**48** ABCD est un carré de côté 5. On trace le cercle de centre A passant par C.
Le point E est un point d'intersection du cercle avec la droite (AB).
On construit le carré DEFG.
**1.** Calculer la longueur AC.
**2.** En déduire la longueur AE.
**3.** Montrer que l'aire du carré DEFG est le triple de l'aire du carré ABCD.




## Questions de cours

**49** **1.** Quelle est la définition du projeté orthogonal d'un point M sur une droite *d* ?
**2.** Comment définit-on la distance d'un point à une droite ?

**50** **1.** Quelle est la définition de la hauteur dans un triangle ?
**2.** Dans un triangle ABC, la hauteur AH issue de A est-elle supérieure au côté AC ?

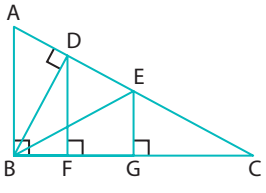
**51** **1.** Quelles sont les trois caractéristiques qui définissent un vecteur ?
**2.** L'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ définit-elle un parallélogramme ABCD non croisé, éventuellement aplati ?

**52** **1.** Par quelle condition vectorielle peut-on exprimer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles ?
**2.** Par quelle(s) condition(s) vectorielle(s) peut-on exprimer l'alignement de trois points A, B et C ?

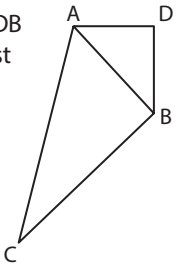
**53** Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
**1.** Quelle est la méthode de construction :
**a)** de la somme $\vec{u} + \vec{v}$ ?
**b)** de la différence $\vec{u} - \vec{v}$ ?
**2.** Comment désigne-t-on un vecteur qui a la même direction que le vecteur $\vec{u}$ ?

## Définition du projeté orthogonal

**54** Dans la figure ci-contre, déterminer les projetés :
**a)** du point A sur la droite (BD).
**b)** du point E sur la droite (BC).
**c)** du point F sur la droite (AB).




**55** Dans la figure ci-contre, le triangle ADB est rectangle en D et le triangle ABC est rectangle en B.
En justifiant, proposer deux phrases utilisant l'expression « projeté orthogonal ».




**56** Tracer trois droites $d_1$, $d_2$ et $d_3$ et placer un point G. Construire le projeté orthogonal de G sur chacune des droites.

**57** Tracer le parallélogramme IJKL et construire les projetés orthogonaux de I sur (KL) et de J sur (IL).

## Distance d'un point à une droite

Méthode 1 p. 127

**58** **1.** Tracer une droite *d* et placer un point R n'appartenant pas à *d*.
**2.** Construire R' le projeté orthogonal de R sur *d*.
**3.** Construire l'ensemble de tous les points situés à la même distance que R de la droite *d*.
**4.** Reprendre les questions **1.** et **2.** lorsque le point R appartient à la droite *d*.

**59** Tracer une droite *d*.
**1.** Construire l'ensemble des points situés à 2 cm de *d*.
**2.** Déterminer les points qui sont à moins de 4 cm de la droite *d*.

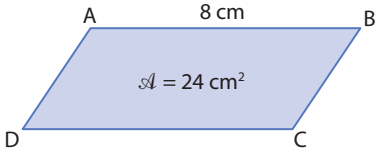
**60** On considère deux droites parallèles *d* et *d'*.
Construire l'ensemble des points à égale distance de *d* et de *d'*.

**61** On considère deux droites sécantes *d* et *d'*. Construire l'ensemble des points à égale distance de *d* et de *d'*.

**62** On considère un triangle IJK rectangle en J. On note L le milieu de [JK]. La médiatrice de [JK] et la hauteur issue de J se coupent en un point M.
**1.** Faire une figure.
**2.** Quel est le projeté orthogonal de M sur [JK] ?
**3.** Quel est le projeté orthogonal de L sur [IJ] ?
**4.** Les points M et L sont-ils à la même distance de la droite (IJ) ? Justifier.

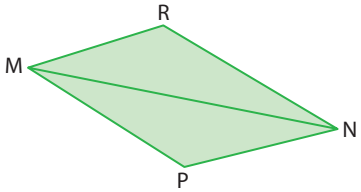
**63** On considère un triangle ABC isocèle en A.
**1.** Faire une figure.
**2.** Construire le projeté orthogonal de B sur (AC).
**3.** Construire le projeté orthogonal de C sur (AB).
**4.** Exprimer l'aire du triangle ABC de deux façons différentes pour en déduire que la distance de B à (AC) est égale à la distance de C à (AB).

**64** On considère un parallélogramme ABCD d'aire 24 cm² et tel que AB = 8 cm.



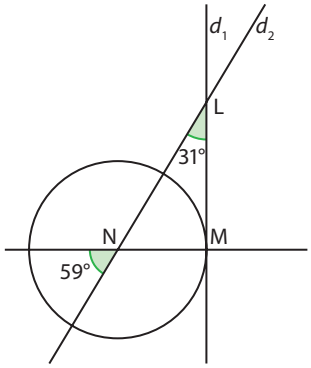

On appelle H le projeté orthogonal de D sur la droite (AB). Déterminer la distance du point D à la droite (AB).

**65** Oral Dans la figure ci-dessous, les triangles MNP et MNR ont la même aire.




Prouver que les points R et P sont à la même distance de la droite (MN).

**66** On considère un cercle de centre N et de rayon NM comme l'indique la figure ci-dessous.




1. Démontrer que le point M est le projeté orthogonal de N sur la droite $d_1$.
2. On donne de plus NM = 2 cm. Calculer la distance du point L à la droite (MN). Arrondir au dixième.

**67** On considère deux points A et B tels que AB = 3 cm.
1. Construire l'ensemble des points situés à égale distance des points A et B.
2. Construire l'ensemble des points situés à 4 cm du point A.
3. Les ensembles construits ci-dessus ont-ils des points en commun ?

**68** On considère deux droites $d$ et $d'$ perpendiculaires en R.
1. Construire une figure.
2. Construire l'ensemble des points situés à 3 cm de $d$.
3. Construire l'ensemble des points situés à 5 cm de $d'$.
4. **a)** Placer un point S à 3 cm de la droite $d$ et à 5 cm de la droite $d'$.
**b)** Combien de solutions existe-t-il ?
5. Calculer la longueur RS.

## Projeté orthogonal et configurations géométriques

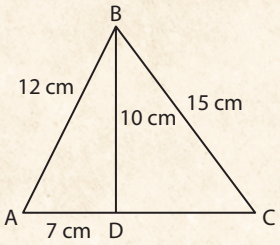
Méthode 2 p. 127

**69** Dans un triangle ABC isocèle en A, on construit les projetés orthogonaux H et K des points B et C respectivement sur les côtés [AC] et [AB].
1. Montrer que les triangles BCH et BCK sont égaux.
2. En déduire que AH = AK, puisque (HK) est parallèle à (BC).

**70** On considère le triangle ABC tel que AB = 10,5 ; AC = 17,5 et BC = 14 et on appelle H le projeté orthogonal du point B sur (AC).
1. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
2. Exprimer l'aire de ce triangle de deux façons.
3. En déduire la longueur BH.

**71** On considère un parallélogramme ABCD tel que B et D ont le même projeté orthogonal sur la diagonale [AC].
1. Réaliser une figure correspondante.
2. Justifier que (BD) et (AC) sont alors perpendiculaires.
3. Que peut-on en déduire de la nature de ABCD ?

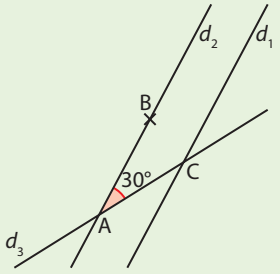
**72** Esprit critique On donne la figure ci-dessous dans laquelle les points A, D et C sont alignés.




Le point D est-il le projeté orthogonal de B sur (AC) ?

**73** Analyser un problème

Dans la figure ci-dessous, les droites $d_1$ et $d_2$ sont parallèles. Les points A et B sont sur $d_2$ et B est à 3 cm de la droite $d_1$. Les points A et C sont sur $d_3$. Utiliser les informations de la figure pour calculer la longueur AC.




↪ Résolution de problèmes p. 134

**74** Esprit critique On considère un cercle de diamètre [AB].
1. Faire une figure.
2. **a)** Sur ce cercle, placer un point C distinct de A et B.
**b)** Critiquer l'affirmation suivante : « Il existe toujours quatre points du cercle situés à la même distance que C de (AB) ».

## Déterminer les caractéristiques d'un vecteur

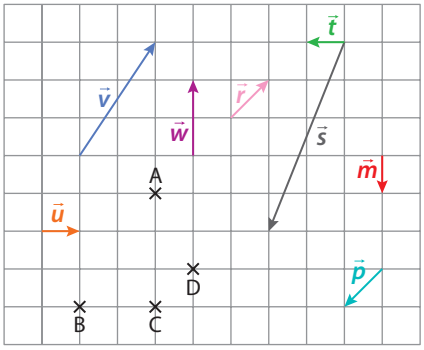
Méthode 3 p. 129

**75** À partir de la figure, citer un vecteur :

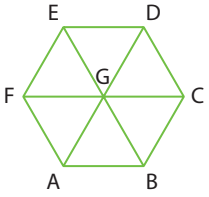
**a)** dont la norme est égale à $\|\overrightarrow{CD}\|$.

**b)** de même direction et de même sens que $\overrightarrow{AC}$.

**c)** de même direction que $\overrightarrow{BC}$ mais de sens contraire.




**76** On considère ci-dessous l'hexagone régulier ABCDEF de centre G.

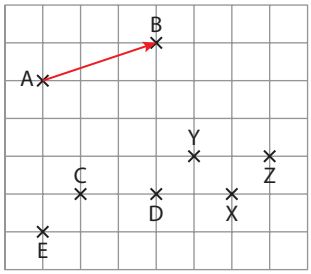



**1.** Citer un vecteur qui a même direction que le vecteur $\overrightarrow{FG}$ mais pas le même sens.

**2.** Citer le représentant d'origine G du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

**3.** Citer deux vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AF}$.

**77** On considère la figure ci-dessous.

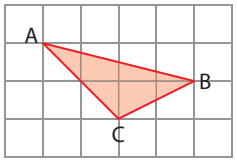



**1.** Donner les images des points C, D et E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

**2.** Citer trois vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

**3.** Citer les trois parallélogrammes définis par les trois égalités vectorielles de la question **2**.

**78** Reproduire la figure ci-contre.




**1.** Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$.

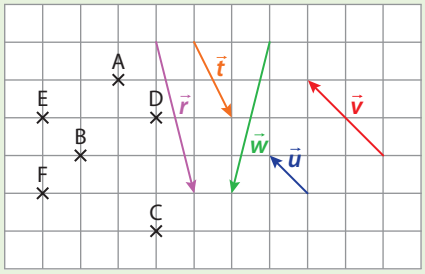
**2.** Construire le point F tel que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CA}$.

**3.** Construire le représentant d'origine C du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

**4.** Construire le représentant d'origine B du vecteur $\overrightarrow{CB}$.

**79** **Vérifier un résultat**

À partir de la figure dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.




**a)** $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$

**b)** $\|\overrightarrow{BC}\| = \|\vec{v}\|$

**c)** AD = BE

**d)** $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{DA}$

**e)** Les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\vec{u}$ ont la même direction.

**f)** Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est un représentant du vecteur $\vec{r}$.

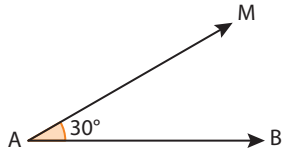
**g)** Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\vec{w}$ ont la même norme.

**h)** Le vecteur $\overrightarrow{CB}$ est le représentant d'origine C du vecteur $\vec{v}$.

**i)** Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction et même sens.

↪ Résolution de problèmes p. 188

**80** On considère deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ formant un angle de 30° comme l'indique la figure.




On appelle H le projeté orthogonal de M sur (AB).

On sait que AH = 3,5.

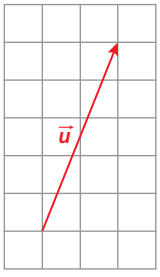
Déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

**81** **Développement durable**

Selon les projections du Groupe d'experts Intergouvernemental sur l'Évolution du Climat (GIEC), la vitesse du vent au-dessus de l'Europe occidentale, centrale et septentrionale devrait chuter jusqu'à 10 % au cours des mois d'été d'ici à 2 100, sur la base d'un réchauffement de 1,5 °C.

Dans la représentation ci-contre, la longueur d'un carreau correspond à une vitesse d'intensité 10 km/h.

En supposant que le vecteur représenté donne la vitesse du vent actuelle à un point A donné, quelle sera la norme de ce vecteur s'il diminue de 10 % ?



# Exercices d'entraînement

## Démonstration avec des égalités de vecteurs

Méthode 4 p. 129

**82** Soient A, B et C trois points.
**1.** Construire le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
**2.** Construire le point E tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$.
**3.** Que représente le point C pour le segment [ED] ? Justifier.

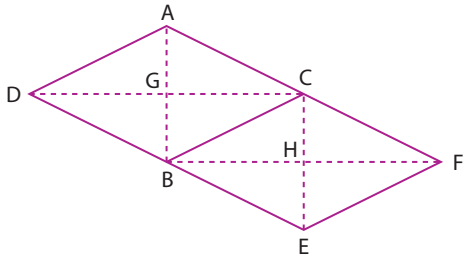
**83** MNPQ est un trapèze tel que QP = 2MN.
On note R le milieu de [QP].
**1.** Faire une figure.
**2.** En justifiant, citer trois vecteurs égaux.
**3.** Trouver deux parallélogrammes. Justifier.

**84** Soient ABCD et ABEF deux parallélogrammes.
**1.** Donner deux vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
**2.** En déduire la nature du quadrilatère EFDC.

**85** Soit ABC un triangle.
**1.** Construire le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.
**2.** R est un point du segment [BD], M et N sont les symétriques respectifs des points B et A par rapport à R.
Démontrer que le quadrilatère CDNM est un parallélogramme.

**86** ABC est un triangle. On nomme F l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et G l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.
**1.** Prouver que $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BF}$.
**2.** Qu'en déduit-on pour le point B ?

**87** ACBD et CBEF sont deux losanges tels que les points A, C et F sont alignés.



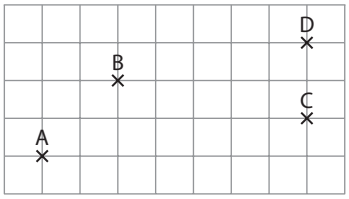

**1.** Reproduire la figure et la coder afin de trouver des vecteurs égaux.
**2.** Montrer que AFED et ACEB sont des parallélogrammes.
**3.** En déduire que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$ puis que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{GB}$.
**4.** Montrer que CHBG est un rectangle.

**88** Logique
**1.** Indiquer si les affirmations **a)**, **b)** et **c)** ci-dessous sont vraies ou fausses.
Lorsqu'elles sont fausses, dessiner un contre-exemple.
**a)** Si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
**b)** Si AB = CD alors ABCD est un parallélogramme.
**c)** Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ alors A, B et C sont alignés.
**2.** Écrire la réciproque de chacune des affirmations du **1.**, puis dire si elles sont vraies ou fausses.

## Somme et différence de deux vecteurs, vecteurs opposés

Méthode 5 p. 131

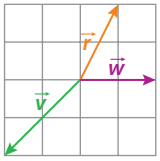
**89** Reproduire la figure et construire les représentants des vecteurs suivants :




**a)** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$
**b)** $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$
**c)** $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$
**d)** $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$

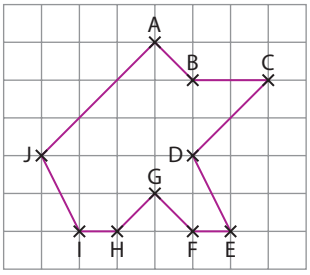
**90** On considère un quadrilatère ABCD.
Construire un représentant des vecteurs suivants :
**a)** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ **b)** $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD}$
**c)** $-\overrightarrow{AB}$ **d)** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD}$

**91** **1.** Reproduire la figure ci-contre.
**2.** Construire un représentant de chacun des vecteurs suivants :




**a)** $-\vec{r}$ **b)** $\vec{w} + \vec{r}$
**c)** $\vec{r} + \vec{v}$ **d)** $\vec{w} - \vec{r}$

**92** On considère la figure ci-dessous.




**1.** Citer un vecteur opposé à :
**a)** $\overrightarrow{FE}$ **b)** $\overrightarrow{IJ}$
**2.** Donner un vecteur égal à :
**a)** $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HI}$ **b)** $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{CB}$ **c)** $\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{EI}$
**d)** $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GH}$ **e)** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$ **f)** $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{GH}$

## Relation de Chasles, manipulation algébrique

Méthode 6 p. 131

**93** Simplifier les écritures vectorielles suivantes :
**a)** $\overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TR}$ **b)** $\overrightarrow{BV} - \overrightarrow{CV}$
**c)** $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{CF}$ **d)** $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{DB}$

**94** **1.** ABC est un triangle. Faire une figure.
**2.** Construire le représentant d'origine B du vecteur $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$.
**3.** Justifier pourquoi ce vecteur est égal à $\overrightarrow{AC}$.

**95** Soit I le milieu d'un segment [AB].
**1.** Compléter : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \ldots$.
**2.** Compléter : $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \ldots$.

**96** Soient I le milieu d'un segment [AB] et M un point quelconque du plan. Démo

**1.** Compléter : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{M\ldots} + \overrightarrow{\ldots A}$.

**2.** Compléter : $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{M\ldots} + \overrightarrow{\ldots B}$.

**3.** En déduire que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

**97** On considère un triangle ABC.
On nomme respectivement D, E et F les milieux de [AB], [AC], [BC].

**1.** Faire une figure.

**2. a)** Justifier l'égalité : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF}$.

**b)** En déduire que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{DF}$.

**3.** De la même manière démontrer que $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CD}$.

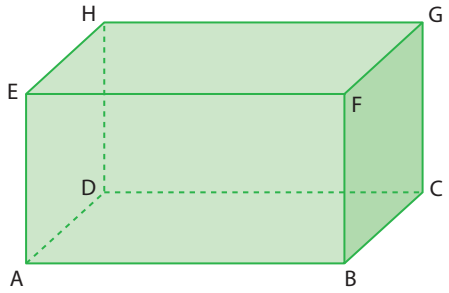
**98** ABCD est un rectangle de centre O. Faire une figure.

**1.** Construire le représentant d'origine B du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}$.

**2.** En utilisant un autre représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$, montrer que $\vec{u} = \overrightarrow{OC}$.

**3.** De la même manière, montrer que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO}$.

**99** ABCDEFGH est un pavé droit.




**1.** Justifier que $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$.

**2.** En déduire que $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HB}$ puis la nature de ABGH.

## Produit d'un vecteur par un nombre réel

Méthode 7 p. 133

**100** A et B sont deux points distincts.
Placer les points M, N, P et Q tels que :

**a)** $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$

**b)** $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

**c)** $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB}$

**d)** $\overrightarrow{AQ} = -2\overrightarrow{AB}$

**101** **1.** Tracer un vecteur $\vec{u}$ de votre choix.

**2.** Construire les vecteurs $3\vec{u}$, $-5\vec{u}$, $\frac{1}{4}\vec{u}$ et $-\frac{3}{2}\vec{u}$.

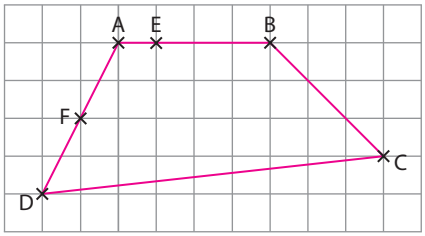
**102** **1.** Tracer un vecteur $\vec{u}$ de votre choix.

**2.** Construire les vecteurs suivants :

**a)** $2{,}5\vec{u}$ **b)** $-0{,}5\vec{u}$ **c)** $3{,}25\vec{u}$ **d)** $-1{,}75\vec{u}$.

**103** **1.** Reproduire la figure suivante et placer les points H, I et J tels que :

**a)** $\overrightarrow{AH} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ **c)** $\overrightarrow{DJ} = \frac{5}{9}\overrightarrow{DC}$




**2.** Recopier et compléter par la valeur correspondante :

**a)** $\overrightarrow{AE} = \ldots\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{DF} = \ldots\overrightarrow{DA}$ **c)** $\overrightarrow{CI} = \ldots\overrightarrow{BC}$

**d)** $\overrightarrow{EB} + \ldots\overrightarrow{EA} = \vec{0}$ **e)** $\overrightarrow{FA} + \ldots\overrightarrow{AD} = \vec{0}$

**104** Dans chacun des cas, déterminer la valeur du coefficient $k$ de colinéarité.

**a)** $\overrightarrow{UT} = k\overrightarrow{UR}$ **b)** $\overrightarrow{US} = k\overrightarrow{RV}$ **c)** $\overrightarrow{UX} = k\overrightarrow{UR}$

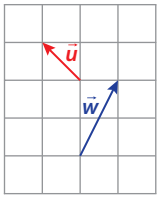
**d)** $\overrightarrow{UW} = k\overrightarrow{UR}$ **e)** $\overrightarrow{UT} = k\overrightarrow{UW}$ **f)** $\overrightarrow{RX} = k\overrightarrow{RV}$

**105** On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$.
Tracer des représentants de :

**a)** $3\vec{u} + \vec{w}$

**b)** $\vec{u} - 2\vec{w}$

**c)** $2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{w}$

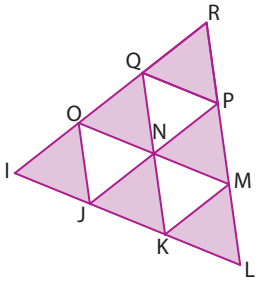



**106** On reprend la figure de l'exercice **103**.
Placer les points R, S, T et V tels que :

**a)** $\overrightarrow{AR} = 3\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AF}$ **b)** $\overrightarrow{CS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$

**c)** $2\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AT} = \vec{0}$ **d)** $3\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AV} = \vec{0}$

**107** La figure ci-dessous est constituée de neuf triangles équilatéraux.




En utilisant des points de la figure, déterminer :

**a)** un vecteur égal à $\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{JN}$.

**b)** un vecteur égal à $2\overrightarrow{IO} + 2\overrightarrow{QN}$.

**c)** un vecteur égal à $\frac{2}{3}\overrightarrow{IL} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OR}$.

**d)** un vecteur égal à $\frac{-1}{3}\overrightarrow{RL} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OR}$.

# Exercices d'entraînement

## Application de la colinéarité

Méthode 8 p. 133

**108** Soient trois points A, B et C distincts non alignés. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires dans les cas suivants ? Lorsque la réponse est oui, donner le coefficient de colinéarité.

**a)** $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = -6\overrightarrow{AB}$.

**b)** $\vec{u} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = 4\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AC}$.

**c)** $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = 9\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ .

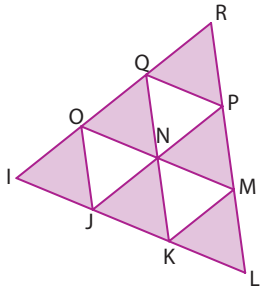
**d)** $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{AB} - 9\overrightarrow{AC}$.

**109** Soient trois points A, B et C distincts et non alignés. M et N sont les points tels que :

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AN}$.
2. Que peut-on en déduire pour les points A, M et N ?

**110** La figure ci-dessous est constituée de neuf triangles équilatéraux.




1. Dans chacun des cas, déterminer le réel $k$.

**a)** $\overrightarrow{QP} = k\overrightarrow{LI}$ **b)** $\overrightarrow{PJ} = k\overrightarrow{IR}$

**c)** $\overrightarrow{OJ} = k\overrightarrow{KQ}$ **d)** $\overrightarrow{MK} = k\overrightarrow{RI}$

2. **a)** Prouver que $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{OP}$.
**b)** Que peut-on en déduire pour les droites (IN) et (OP) ?

**111** Soit ABC un triangle. Placer les points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BC}$.

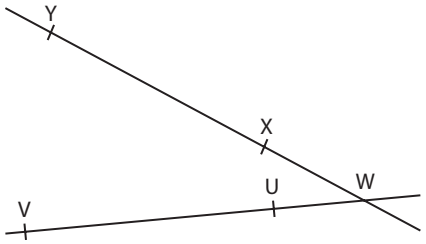
1. **a)** Justifier que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$.
**b)** En déduire que $\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{AC}$ .
2. Que peut-on conclure pour les droites (AC) et (DE) ?

**112** On considère un parallélogramme ABCD et le point E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD}$.

1. **a)** Justifier que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
**b)** Justifier que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DB}$.

Que peut-on en déduire pour le quadrilatère ECBD ?

**113** Les droites (UV) et (XY) se coupent en W.
Les points W, U, V d'une part et W, X, Y d'autre part sont alignés dans cet ordre.




1. On donne : WU = 1,2 ; WV = 4,5 WX = 1,5 et WY = 4,7.
Les vecteurs $\overrightarrow{XU}$ et $\overrightarrow{YV}$ sont-ils colinéaires ?
2. Même question lorsque WU = 1,5 ; WV = 4,5, WX = 1,2 et WY = 3,6.

### 114 Émettre une conjecture

Problème ouvert

Soit ABCD un trapèze tel que $\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{DC}$. On note I le milieu de [AB], K le milieu de [DC]. Les diagonales [AC] et [DB] se coupent en M.

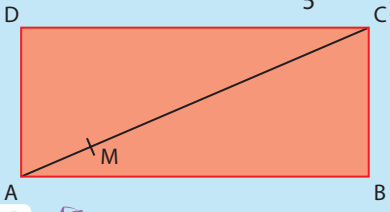
1. Construire une figure.
2. **a)** Que peut-on conjecturer pour les points K, M et I ?
**b)** Prouver cette conjecture.

↪ Résolution de problèmes p. 159

## À chacun son rythme

**115** On considère un rectangle ABCD tel que AC = 5 cm.

Les points M et N sont définis par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$.




**Énoncé A**

1. Recopier la figure et placer le point N.
2. Montrer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$.
3. Que peut-on en déduire pour les droites (AM) et (NC) ?

**Énoncé B**

1. Recopier la figure et placer le point N.
À partir de $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$, montrer que $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.
2. De même, montrer que $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.
3. **a)** Justifier pourquoi les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{DN}$ sont colinéaires.
**b)** Que peut-on en déduire pour les droites (BM) et (DN) ?

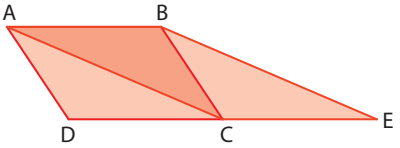
**Énoncé C**

On considère de plus le point P tel que $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{DA}$.

1. Démontrer que les points A, P et C sont alignés.
2. Montrer que $\overrightarrow{AP} = \frac{-10}{3}\overrightarrow{MN}$.

## 116 Aires et distances

On considère les parallélogrammes ABCD et ABEC avec AB = 5.
L'aire de ABCD est égale à 17,5.




Déterminer la distance du point E à la droite (AB).

## 117 Calculer une hauteur

On considère un triangle ABC tel que AB = 5 cm, AC = 12 cm et BC = 13 cm.
On note H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1. Faire une figure.
2. Justifier la nature du triangle ABC.
3. Calculer l'aire de ABC. En déduire AH.

## 118 Dans un cercle

On considère un cercle de centre O et de diamètre [AB]. Les points C et D sont deux points du cercle de même projeté orthogonal H sur (AB) et tels que $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

1. Faire une figure.
2. Expliquer pourquoi OD = DB = OB.
3. Justifier la nature du quadrilatère ODBC.

## 119 Conjecturer et démontrer

Démo

Soit ABC un triangle isocèle en A.
On note H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1. Faire une figure.
2. Soit le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

**a)** Construire le point D.
**b)** Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de ABDC ?
3. On souhaite démontrer la conjecture.

**a)** Justifier l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$.
**b)** Donner une égalité analogue pour le vecteur $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AH}$.
**c)** Déterminer la nature du quadrilatère ABDC.

## 120 Droites parallèles

Soient un triangle MNP et deux points R et S tels que $\overrightarrow{MR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MN}$.

1. Justifier l'égalité $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MS}$ et en déduire que $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PN}$.
2. Que peut-on en déduire pour les droites (PN) et (RS) ?

## 121 Nature d'un quadrilatère

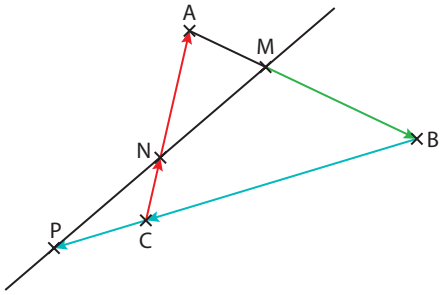
1. Construire un parallélogramme ABCD.
2. Placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AC}$.
3. En écrivant $\overrightarrow{MN}$ sous la forme $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$ prouver que $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BC}$.
4. Que peut-on en déduire pour la nature du quadrilatère BCNM ?

## 122 Placer des points

Soit ABC un triangle. Placer les points D, E et F tels que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CA}$ et $3\overrightarrow{FC} - 2\overrightarrow{FB} = \vec{0}$.

## 123 Milieu

On considère la figure ci-dessous, où A, B et C sont trois points non alignés.




On a construit les points M, N et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. **a)** Simplifier $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$.

**b)** En déduire que $\overrightarrow{MN} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

2. **a)** Montrer que $\overrightarrow{NP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

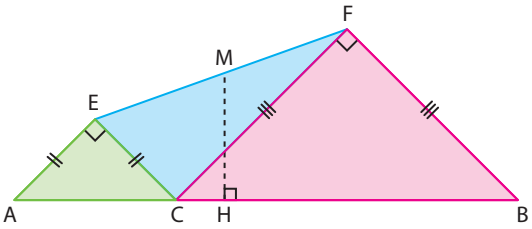
**b)** En déduire que $\overrightarrow{NP} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

3. En déduire que le point N est le milieu de [MP].

## 124 Triangles emboîtés

Sur un segment [AB], un point C est mobile.
On a construit, du même côté de (AB), deux triangles ACE et BCF isocèles et rectangles en E et F.

1. Faire une figure.
2. Placer le point M milieu du segment [EF] et construire le projeté orthogonal H de M sur la droite (AB).




3. Démontrer que le triangle CEF est un triangle rectangle.
4. Construire le point G intersection des droites (AE) et (BF).

**a)** Montrer que le triangle ABG est rectangle en G.
**b)** Montrer que le quadrilatère ECFG est un rectangle.
**c)** En déduire que M est le milieu du segment [CG].

5. On appelle I et J les milieux respectifs des segments [AG] et [BG].

Démontrer que les points I, M et J sont toujours alignés.

**Coup de pouce** On pourra utiliser le théorème de Thalès.

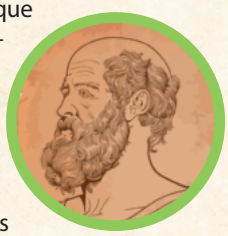
6. **a)** Justifier pourquoi, quelle que soit la position de C sur [AB], les points G, I et J sont fixes.

**b)** En déduire que la distance MH est constante.

# Exercices d'approfondissement

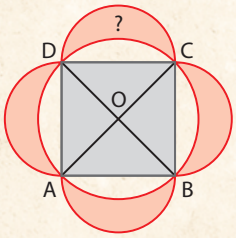
## 125 Les lunules — Histoire des sciences

Dès l'Antiquité, les mathématiciens ont cherché à représenter à la règle et au compas un disque de même aire qu'un carré. Ils n'obtiennent que des solutions approchées. On sait depuis 1882 (découverte de Lindemann) que la nature du nombre Pi rend la construction impossible. Néanmoins on sait dessiner quatre lunules d'Hippocrate dont l'aire est égale à celle d'un carré.



Hippocrate (–460 ; –377)

Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré de diagonales [AC] et [BD] et sécantes en O.
Le cercle de centre O est circonscrit au carré.
Les demi-cercles extérieurs ont pour diamètre un côté du carré.




On se propose ici de prouver que l'aire du carré ABCD est égale à la somme des aires des quatre *lunules*, une lunule étant la portion de plan limitée par deux arcs de cercle de rayons distincts, ci-dessus marquée d'un point d'interrogation.
On suppose le cercle de rayon 1.

**1. a)** Calculer la longueur du côté du carré.
**b)** En déduire l'aire du carré.
**2.** À partir de l'aire du disque et de celle du carré, calculer l'aire des quatre portions blanches
**3.** Exprimer l'aire des quatre demi-cercles extérieurs.
**4.** En déduire l'aire des quatre lunules.

## 126 La carte au trésor — Défi

Une carte indique qu'un trésor est situé dans une zone rectangulaire, à 1 260 m d'un coin, à 320 m d'un coin opposé et à 1 120 m d'un troisième coin.
À quelle distance du quatrième coin se trouve-t-il ?

## 127 Points alignés

A, B et C sont trois points du plan tels que pour tout point M du plan on a $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
Montrer que les points A, B et C sont alignés et représenter ces points.

## 128 Longueur constante

Dans un triangle ABC rectangle et isocèle en A, on construit le milieu I du segment [BC] et un point M quelconque et variable sur le segment [BC].
La droite parallèle à la droite (AI) passant par M coupe la droite (AB) en E et la droite (AC) en F.

**1.** Déterminer la nature des triangles MEB et MFC.
**2.** En déduire que la distance ME + MF est constante et donner sa valeur.

## 129 Un milieu

**1.** Construire un parallélogramme ABCD de centre O. Nommer I le milieu de [OC].
**2.** Construire A' le symétrique de A par rapport à D et O' le symétrique de O par rapport à B.
**3. a)** Démontrer que $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{DB}$.
**b)** Démontrer que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OO'}$.
**c)** En déduire que I est le milieu de [A'O'].

# Vers la 1re

## 130 Vers la Spécialité Maths

**Formule d'Al-Kashi**
Soit ABC un triangle tel que BC = *a*, AB = *c* et AC = *b*. On considère la hauteur du triangle ABC issue de A. On note H le pied de cette hauteur. On note HB = *x* et on note AH = *h*.

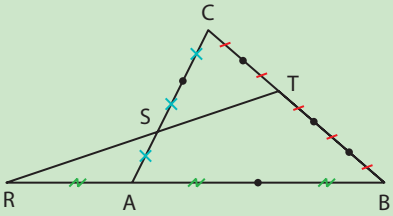
**1. a)** Dans le triangle AHB, exprimer $c^2$ en fonction de *x* et *h*.
**b)** En travaillant dans le triangle AHC et en utilisant le résultat de la question **a)**, montrer que $c^2 = b^2 - a^2 + 2ax$.
**c)** Exprimer *x* à l'aide du cosinus de l'angle aigu $\widehat{ABC}$ et de *c*.
**d)** À l'aide des résultats des questions **b)** et **c)**, prouver la formule d'Al-Kashi : $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos(\widehat{ABC})$.

**2. Application**
On donne AB = 10 cm, AC = 6 cm, $\widehat{BAC} = 60°$.
Calculer BC. Arrondir au dixième.

## 131 Vers la Spécialité Maths

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ formant un angle aigu.
On note H le projeté orthogonal de A sur (OB).
Montrer que $OA \times OB \times \cos(\widehat{AOB}) = OH \times OB$.

## 132 Vers la Spécialité Maths




On considère le triangle ABC. R est un point de (AB), S un point de (AC) et T un point de (BC).
On se propose de démontrer que les points R, S et T sont alignés en utilisant des égalités vectorielles.

**1.** Montrer que :
**a)** $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

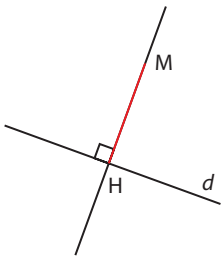
**2.** En déduire une expression du vecteur $\overrightarrow{RT}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
**3.** Vérifier que $\overrightarrow{RS} = \frac{5}{9}\overrightarrow{RT}$. Conclure.

**CARTES FLASH**
Mémoriser le cours
www.lienmini.fr/8270-2

Objectif
## 1 Utiliser le projeté orthogonal

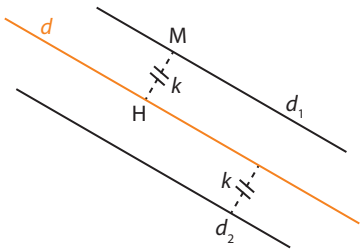
### Reconnaître un projeté orthogonal

Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite *d* est le point H intersection de *d* et de la perpendiculaire à *d* passant par M. La distance MH définit la distance du point M à la droite *d*.




### Déterminer l'ensemble des points situés à une distance donnée d'une droite

L'ensemble des points situés à une distance donnée d'une droite *d* est constitué de deux droites parallèles à *d* et symétriques entre elles par rapport à *d*.



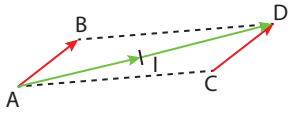

Objectif
## 2 Utiliser les caractéristiques des vecteurs

### Reconnaître de vecteurs égaux

Deux vecteurs sont **égaux** si, et seulement si, ils ont même **direction**, même **sens** et même **norme**.

### Se rappeler certaines situations d'égalités de vecteurs

- **Translation** : l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ le point C a pour image D.
- **Parallélogramme** : l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ caractérise le parallélogramme ABDC.

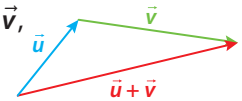



- **Milieu** : l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$ caractérise le milieu I du segment [AD].

Objectif
## 3 Manipuler des sommes de vecteurs

### Construire une somme et une différence de vecteurs

- Pour construire la somme $\vec{u} + \vec{v}$, on met des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ bout à bout.




- Pour construire la différence $\vec{u} - \vec{v}$ on met des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{v}$ bout à bout.

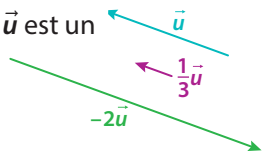
### Utiliser la relation de Chasles

- La **relation de Chasles** permet de réduire une écriture vectorielle, comme par exemple $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.
- La relation de Chasles permet aussi de décomposer un vecteur sous la forme d'une somme, comme par exemple $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}$.

Objectif
## 4 Utiliser la colinéarité de vecteurs

### Construire des vecteurs colinéaires

Un vecteur colinéaire à $\vec{u}$ est un vecteur de la forme $k\vec{u}$, $k$ réel. On le représente par un vecteur :




- de même direction que le vecteur $\vec{u}$.
- dont le sens dépend du signe de $k$.
- dont la norme est obtenue en multipliant $\|\vec{u}\|$ par $k$ si $k > 0$ et par $-k$ si $k < 0$.

### Prouver un alignement, un parallélisme

- Prouver que **deux droites** (AB) et (CD) sont **parallèles** est équivalent à prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Prouver que **trois points** A, B et C sont **alignés** est équivalent à prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

# Préparer le contrôle — Je me teste

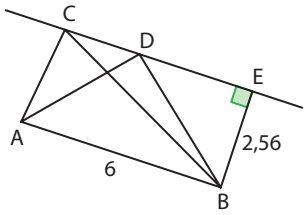
QCM INTERACTIF
Tester ses connaissances
www.lienmini.fr/8270-16

## QCM Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Objectif 1

### Utiliser le projeté orthogonal

Pour les exercices **133** et **134**, on considère la figure ci-contre dans laquelle les points C, D et E sont sur une droite parallèle à (AB). Les droites (AC) et (EB) ne sont pas parallèles. On donne BE = 2,56.




| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **133** On peut affirmer que : | la longueur AC est supérieure à la longueur BE | B est le projeté orthogonal de E sur (AB) | la distance du point D à la droite (AB) est égale à 2,56 | E est le projeté orthogonal de B sur (CD) |
| **134** On peut affirmer que : | les triangles ACB et ADB ont la même aire | l'angle $\widehat{EAD}$ mesure 45° | les triangles CBE et ACB ont la même aire | le triangle ABE est rectangle en B |

Objectif 2

### Utiliser les caractéristiques des vecteurs

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **135** Si J est le milieu du segment [KL], alors : | $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{LJ}$ | $\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{JL} = \vec{0}$ | $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{JL}$ | $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JL}$ |
| **136** Si EFGH est un parallélogramme, alors : | $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$ | $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GF}$ | $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$ | $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{HG}$ |

Objectif 3

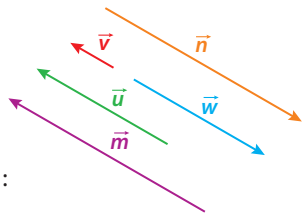
### Manipuler des sommes de vecteurs

Pour les exercices **137** et **138**, EFGH est un parallélogramme de centre I.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **137** La somme $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF}$ est égale à : | $\overrightarrow{EG}$ | $\overrightarrow{HI}$ | $\overrightarrow{HF}$ | $\overrightarrow{EG}$ |
| **138** La différence $\overrightarrow{HE} - \overrightarrow{FE}$ est égale à : | $\overrightarrow{HF}$ | $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF}$ | $\overrightarrow{FH}$ | $2\overrightarrow{HI}$ |
| **139** Pour tous points A, B, C et D, on a $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}$ est égal à : | $\overrightarrow{CB}$ | $\overrightarrow{DC}$ | $\overrightarrow{DB}$ | $\overrightarrow{BD}$ |

Objectif 4

### Utiliser la colinéarité de vecteurs

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **140** Les points A, B, C, D et E sont régulièrement espacés sur la droite ci-dessous. A B C D E F | $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ | $\overrightarrow{EB} = -3\overrightarrow{DC}$ | $\overrightarrow{FC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EC}$ | $\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ |
| **141** D'après la figure ci-contre, les égalités vectorielles correctes sont :  | $\vec{w} = \vec{u}$ | $\vec{n} = 2\vec{u}$ | $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{m}$ | $\vec{v} = 3\vec{u}$ |

↪ Corrigés p. 390

# Préparer le contrôle — Je m'entraîne

## Parcours différenciés

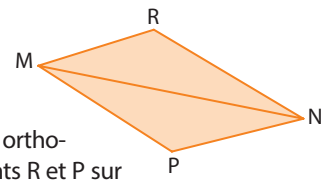
| | Objectif 1 | Objectif 2 | Objectif 3 | Objectif 4 |
|---|---|---|---|---|
| Parcours A | 1 3 142 | 5 7 145 | 9 11 148 | 13 15 151 |
| Parcours B | 59 143 | 76 146 | 90 149 | 101 152 |
| Parcours C | 70 144 | 83 147 | 94 150 | 109 153 |

## Exercices

### Objectif 1 Utiliser le projeté orthogonal

**142** On donne un segment [AB] et une droite $d$ perpendiculaire à [AB] en B.
Soit I un point non situé sur $d$.
**1.** Quel est le projeté orthogonal de A sur $d$ ?
**2.** Construire le projeté orthogonal I′ de I sur (AB).
**3.** Construire tous les points situés à la même distance que A de la droite $d$.

**143** On considère les triangles MNP et MNR de la figure ci-contre.




**1.** Construire les projetés orthogonaux R′ et P′ des points R et P sur (MN).
**2.** Lorsque les triangles MNP et MNR ont la même aire, que peut-on dire des distances RR′ et PP′ ?
**3.** Construire deux autres points S et V tels que les triangles MNP, MNS et MNV aient la même aire.

**144** On considère un cercle de diamètre [AB] et deux points C et D du cercle ayant le même projeté orthogonal sur [AB].
Pour quelles positions de C et D sur le cercle l'aire du quadrilatère ACBD est-elle maximale ?

### Objectif 2 Utiliser les caractéristiques des vecteurs

**145** On considère un losange ABCD de centre O.
**1.** Citer des vecteurs égaux.
**2.** Construire le représentant d'origine D du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
**3.** Citer trois vecteurs qui ne sont pas égaux et qui ont la même norme.

**146** ABCD est un parallélogramme.
**1.** Construire les points E et F tels que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$.
**2.** Montrer que BEFC est un parallélogramme.

**147** On considère un losange ABCD de centre O.
**1.** Construire D′ tel que $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BC}$ et B′ tel que $\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{BC}$.
**2.** Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D'B'}$.

### Objectif 3 Manipuler des sommes de vecteurs

**148** ABCD est un parallélogramme de centre O.
**1.** Construire le point E tel que $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$.
**2.** Construire le point F tel que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DC}$.

**149** ABC est un triangle rectangle isocèle en A.
Construire les points D et E définis par $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}$.

**150** Démontrer que pour tous points I, J, K, L :
**a)** $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{LJ}$ **b)** $\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{JL} = \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{JK}$

### Objectif 4 Utiliser la colinéarité de vecteurs

**151** Tracer une droite (MN) puis placer les points P, Q et R tels que $\overrightarrow{MP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NQ} = -2\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{MR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MN}$.

**152** Soit un triangle ABC.
**1. a)** Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC}$.
**b)** Que peut-on en déduire pour les points A, M et C ?
**2.** Construire les points N et P tels que : $\overrightarrow{NB} = 3\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

**153** ABCD est un parallélogramme.
Les points E et F sont tels que $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{DA}$.
**1.** Montrer que $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.
En déduire que $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.
**2.** De même, exprimer $\overrightarrow{BF}$ sous la forme $\alpha\overrightarrow{AD} + \beta\overrightarrow{AB}$, avec $\alpha$ et $\beta$ réels.
**3.** En déduire que les droites (CE) et (BF) sont parallèles.

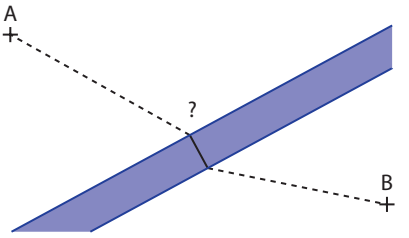
↪ Corrigés p. 390

# Travaux pratiques

Géométrie dynamique — 30 min — Raisonner — Représenter

## 1 Trouver le bon emplacement

On veut relier les villes A et B par une voie rapide et un pont. Étant donné les contraintes inhérentes à la construction d'un pont et les coûts associés, celui-ci est perpendiculaire aux rives. La largeur de la rivière est de 75 m. On appellera M et C les points correspondants aux extrémités du pont, C étant placé du côté de B par rapport à la rivière.



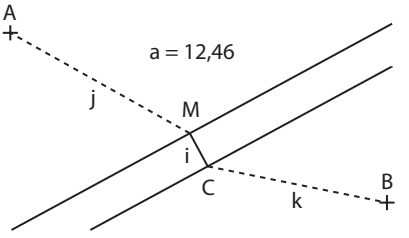

### A ▸ Conjecturer avec un logiciel de géométrie dynamique

**1.** Tracer deux droites parallèles pour représenter la rivière.
Positionner les points A et B.

**2.** Placer un point C puis le point M de sorte que le segment [CM] qui représente le pont soit perpendiculaire aux bords de la rivière.

**3.** Dans la barre de saisie calculer la longueur i+j+k (ici nommée a).

**4.** Déplacer la position du pont et conjecturer la situation pour laquelle la longueur i+j+k est minimale.

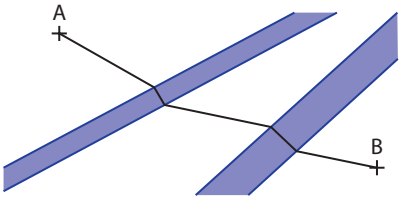



### B ▸ Démonstration

**1.** On reprend la figure de la partie **A**.

**2. a)** Construire le point A′ image du point A par translation du vecteur $\overrightarrow{MC}$.
**b)** Quelle est la nature du quadrilatère AA′CM ? Justifier.
**c)** En déduire que les longueurs AM et A′C sont égales.

**3.** Le trajet de A vers B se décompose selon la somme AM + MC + CB.
**a)** Montrer que cette somme s'écrit aussi AA′ + A′C + CB ou encore 75 + A′C + CB.
**b)** Déterminer la position de C qui minimise cette somme. Conclure.

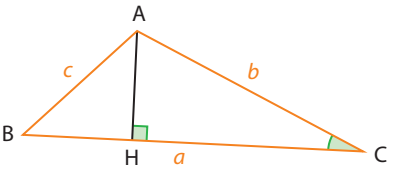



**4.** Pour aller plus loin — On reprend la question précédente mais avec la présence de deux ponts à construire et avec les mêmes contraintes.

15 min — Chercher — Communiquer

## 2 Expression de l'aire d'un triangle

On considère le triangle ABC ci-contre et sa hauteur AH.
L'objectif de ce TP est de déterminer une expression de l'aire du triangle en fonction d'un angle au sommet et des deux côtés adjacents à l'angle.




**1.** Exprimer l'aire $\mathcal{S}$ du triangle ABC en fonction de $a$ et de AH.

**2.** Exprimer la longueur AH à l'aide de $\sin(\hat{C})$ et de $b$.

**3.** En déduire que $\mathcal{S} = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin(\hat{C})$.

**4.** Écrire une égalité analogue donnant $\mathcal{S}$ en fonction de $a$, $c$ et $\sin(\hat{B})$.

On admet que l'on a aussi $\mathcal{S} = \frac{1}{2} \times c \times b \times \sin(\hat{A})$.

**5.** Pour aller plus loin — Déduire des égalités précédentes que : $\frac{2\mathcal{S}}{abc} = \frac{\sin(\hat{C})}{c} = \frac{\sin(\hat{A})}{a} = \frac{\sin(\hat{B})}{b}$.

20 min — Raisonner — Calculer

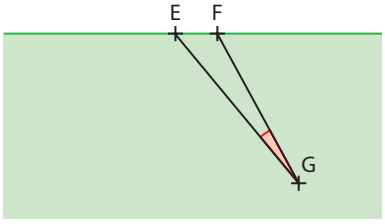
## 3 Distance et angle

Le terrain de rugby est rectangulaire de dimensions 100 m et 70 m.

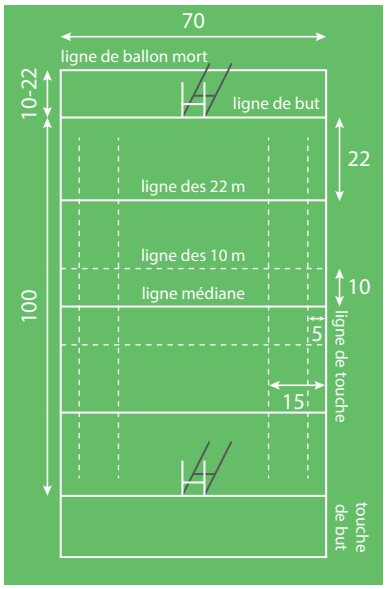
**1.** Réaliser une représentation du terrain à l'échelle 1/1 000e.

**2.** Le joueur G est placé sur la ligne des 22 m, à 20 m de la ligne de touche. Placer un point G sur la figure.

**3. a)** Construire H le projeté orthogonal de G sur la ligne de but.
**b)** On désigne par E et F les pieds des poteaux espacés de 6 m. Calculer les distances EH et FH.
**c)** Calculer la distance du joueur à chacun des pieds des poteaux. On donnera la valeur exacte et l'arrondi au cm.




**4.** Sur la figure ci-contre le point G donne la position du joueur. De quel angle de tir $\widehat{EGF}$ à l'horizontale dispose le joueur pour envoyer le ballon entre les poteaux ?




**5.** Pour aller plus loin Une pénalité est tirée de 55 m en face des poteaux et vise le milieu des poteaux. On admet que la hauteur $h$ du ballon est égale à $-0{,}02x^2 + 1{,}19x$, $x$ étant la distance horizontale qui sépare le ballon du joueur. Sachant que la barre des poteaux est située à 3 m de hauteur, la pénalité est-elle réussie ?
À quelle distance du joueur le ballon retombe-t-il au sol ?

Géométrie dynamique — 30 min — Représenter — Raisonner

## 4 Définition vectorielle des homothéties

### A ▸ À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique

**1.** Placer un point O et un point A et un curseur $k$.

**2.** Construire A′ l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport $k$.

**3.** Créer les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$.

**4.** Émettre une conjecture sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$.

Coup de pouce Il faut utiliser le bouton Homothétie.

Coup de pouce Il faut utiliser le bouton $a=b$.

### B ▸ Redéfinir une homothétie avec les vecteurs

**1.** Prouver la conjecture émise dans la partie **A**.

**2.** En déduire la définition vectorielle de l'homothétie de centre O et de rapport $k$.

### C ▸ Étude d'égalités vectorielles dans une homothétie

Considérons deux points A et B d'images respectives A′ et B′ par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

**1.** Faire une figure. Quelle égalité vectorielle semble exister entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ ?

**2. a)** Montrer que $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$.
**b)** En déduire que $\overrightarrow{A'B'} = -2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$ puisque $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$.

**3.** Pour aller plus loin **a)** Si trois points A, B et C sont alignés, en est-il de même pour leurs images A′, B′ et C′ par une homothétie de centre O et de rapport 2 ? Faire une figure pour émettre une conjecture.
**b)** Justifier pourquoi on peut affirmer qu'il existe un réel $t$ tel que $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$.
**c)** D'après la question **2. b)** on a $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$ et on montrerait de la même façon que $\overrightarrow{A'C'} = 2\overrightarrow{AC}$.
Avec la réponse à la question **3. b)**, en déduire une égalité vectorielle qui prouve l'alignement des points A′, B′ et C′.

# 6

# Vecteurs et repère

## Les maths au quotidien

Pour créer des affiches qui s'adaptent à toutes les tailles, du format A4 jusqu'aux affiches géantes de Broadway, les graphistes peuvent utiliser des images vectorielles. Les illustrations et les typographies sont alors constituées de formes géométriques (lignes, courbes, polygones) définies à partir de points et de **vecteurs** représentés par des tableaux de coordonnées. Le **calcul vectoriel** permet d'adapter la figure quand on l'agrandit, sans perdre en qualité.

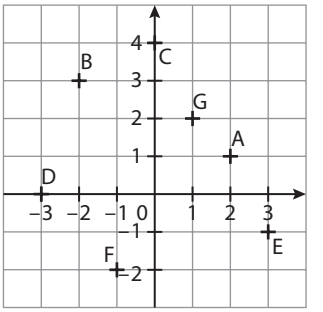
# Pour prendre un bon départ

EXERCICES Sésamath
Réviser ses acquis
www.lienmini.fr/8270-s12

## 1 Lire des coordonnées

Vu au collège

**1.** Sur la figure ci-contre, lire les coordonnées des points C, D et E.
**2.** Quel est le nom du point de coordonnées (1 ; 2) ?




## 2 Effectuer des calculs

Vu au collège

Calculer les valeurs suivantes.

**a)** $-3-5$
**b)** $-3-(-5)$
**c)** $3\times(-5)-2\times4$
**d)** $\dfrac{8+(-5)}{2}$
**e)** $-6\times3-(-2)\times9$
**f)** $7^2-4^2$
**h)** $(2-1)^2+(3-(-5))^2$
**g)** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$

## 3 Reconnaître des tableaux de proportionnalité

Vu au collège

Les tableaux suivants sont-ils des tableaux de proportionnalité ?
Si c'est le cas, préciser le coefficient de proportionnalité permettant de passer de la 1re ligne à la 2e ligne.

**a)**

| | |
|---|---|
| −2 | 3 |
| 3 | −4,5 |

**b)**

| | |
|---|---|
| $\frac{5}{3}$ | $\frac{3}{5}$ |
| $\frac{3}{4}$ | $-\frac{4}{3}$ |

**c)**

| | |
|---|---|
| $\sqrt{2}$ | 2 |
| 1 | $\sqrt{2}$ |

**d)**

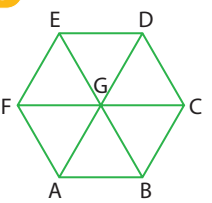
| | |
|---|---|
| −6 | 3 |
| 1 | 0,5 |

## 4 Reconnaître des vecteurs égaux

Vu au chap 5

ABCDEF est un hexagone régulier.
Lesquelles de ces égalités sont vraies ?

**a)** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GC}$
**b)** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CG}$
**c)** CF = FC
**d)** AB = GC
**e)** $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{FC}$
**f)** AB = CG




## 5 Effectuer des opérations sur les vecteurs

Vu au chap 5

Avec la figure de l'exercice 4, donner le nom d'un vecteur représentant les vecteurs suivants :

**a)** $\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GD}$
**b)** $-2\overrightarrow{CD}$
**c)** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$
**d)** $2\overrightarrow{DE}$
**e)** $\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{FC}-\overrightarrow{ED}$
**f)** $\overrightarrow{EF}+2\overrightarrow{GD}$

## 6 Construire des vecteurs

Vu au chap 5

**1.** Reproduire la figure de l'exercice 4.
**2.** Tracer le point M image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{FG}$.
**3.** Tracer le point P image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{GA}$.
**4.** Tracer le point N tel que $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CA}$.
**5.** Tracer le point Q tel que $\overrightarrow{FQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

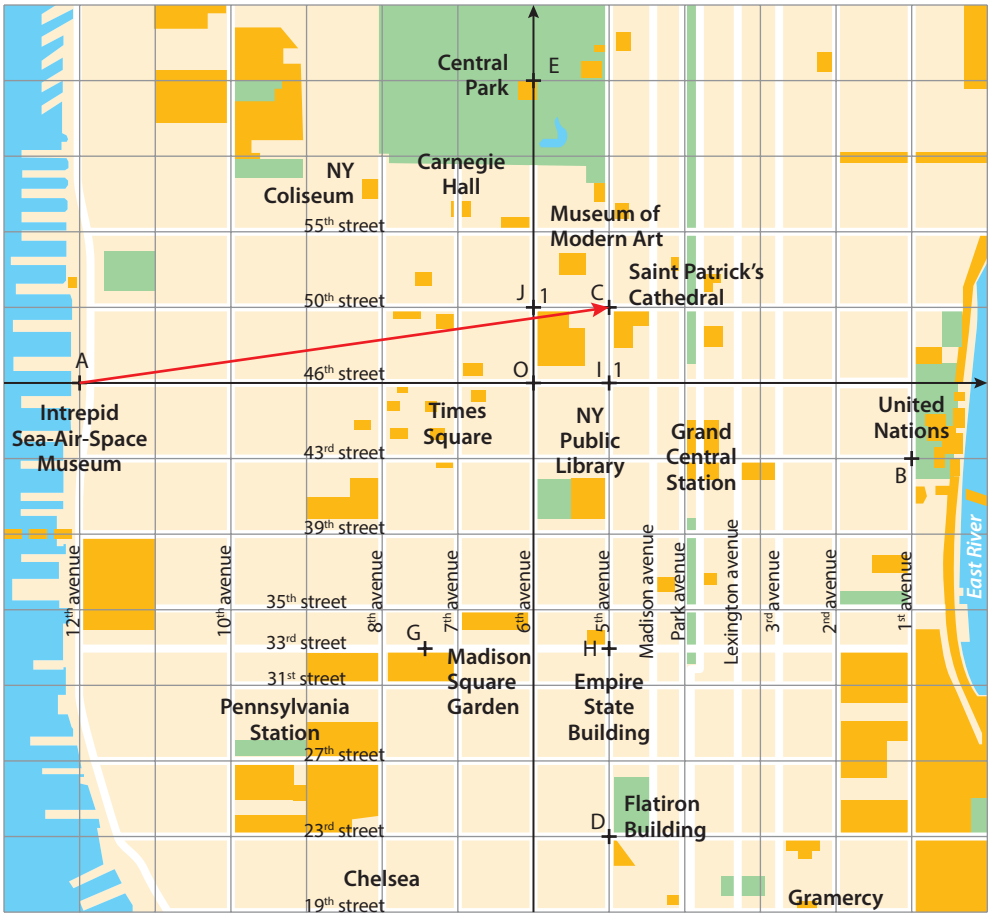
CORRIGÉS www.lienmini.fr/8270-17

15 min

## 1 Des coordonnées du point aux coordonnées du vecteur

Manhattan est l'un des cinq arrondissements de la ville de New York. Cette île est globalement organisée selon un plan en damier hérité de 1811.

Le plan ci-contre est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J).




**1.** Donner les coordonnées des lieux remarquables suivants :

A : Intrepid Sea-Air-Space Museum

B : United Nations

C : Saint Patrick's Cathedral

D : Flatiron Building

E : Central Park

G : Madison Square Garden

H : Empire State Building

**2.** On note $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$. Déterminer les réels $x$ et $y$ tels que $\overrightarrow{DB} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

**Coup de pouce** Pour aller du Flatiron Building (point D) à United Nations (point B), on suit la 23e rue horizontalement pendant 4 graduations vers la droite, puis la 1re avenue verticalement pendant 5 graduations vers le haut.

On dit que le vecteur $\overrightarrow{DB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ où 4 est son abscisse et 5 son ordonnée.

**3. a)** Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$.

**b)** Quelle formule liant les coordonnées de deux points et les coordonnées du vecteur ayant ces points pour origine et extrémité peut-on conjecturer ?

**c)** Appliquer votre conjecture pour déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ et vérifier graphiquement votre réponse.

**4. a)** Que dire des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{EA}$ ?
Comment le traduire avec les coordonnées ?

**b)** Que dire des vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$ ? Comment cela se traduit-il sur leurs coordonnées ?

**c)** Que dire des vecteurs $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{HE}$ ? Comment cela se traduit-il sur les coordonnées ?

**d)** **Pour aller plus loin** Soient $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Soit $k$ un réel.

Déterminer les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ et $k\vec{u}$.

↪ Cours 1 p. 154

Géométrie dynamique 15 min

## 2 Milieu et longueur d'un segment à partir de coordonnées

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

**1.** Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique. Afficher le repère.

**2. a)** Placer deux points A et B ainsi que le milieu K du segment [AB].

**b)** Afficher les coordonnées des points A, B et K ainsi que la longueur du segment [AB].

**3. a)** Recopier le tableau ci-contre sur votre cahier ou dans une feuille de calcul. Placer A(2 ; 3) et B(–4 ; 5) dans le logiciel de géométrie et compléter la première colonne.

**b)** Compléter les trois colonnes suivantes à l'aide du logiciel en prenant les coordonnées de A et B de votre choix.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Coordonnées de A** | (2 ; 3) | | | |
| **Coordonnées de B** | (–4 ; 5) | | | |
| **Coordonnées de K** | | | | |
| **Longueur de AB** | | | | |

**4.** Conjecturer les formules permettant de déterminer les coordonnées de K.

**5. a)** Dans le logiciel de géométrie, placer A(2 ; 3), B(–4 ; 5) et C(–4 ; 3). Quelle est la nature du triangle ABC ?

**b)** Déterminer AC et BC. En déduire AB. Comparer avec le tableau établi en **3.**.

**c)** Conjecturer la formule donnant la longueur de [AB] à partir des coordonnées des points A et B.

**Pour aller plus loin** On note $(x_K ; y_K)$, $(x_A ; y_A)$ et $(x_B ; y_B)$ les coordonnées respectives des points K, A et B.

**6.** Écrire une relation vectorielle vérifiée par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK}$ puis en déduire les coordonnées du point K en fonction des coordonnées des points A et B.

**7.** On trace la parallèle à un axe du repère passant par A et la parallèle à l'autre axe passant par B, elles se coupent en un point H. Dans le triangle ABH, exprimer les longueurs AH et BH. En déduire la longueur AB.

↪ Cours 2 p. 156

15 min

## 3 Condition de colinéarité

**1.** Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, placer les points A(–2 ; 6), B(–8 ; –3), C(–3 ; –2), D(–1 ; 1), E(–6 ; 0), F(1 ; 4), G(3 ; 2), H(1 ; –1) et K(–2 ; –1).

**2. a)** Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GK}$.

**b)** Parmi eux, lesquels semblent avoir la même direction que $\overrightarrow{CD}$ ?

**c)** Recopier le tableau en écrivant le nom des vecteurs trouvés dans la première ligne du tableau puis le compléter en calculant leurs coordonnées.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Vecteur** | $\overrightarrow{CD}$ | | | | |
| **Première coordonnée** | | | | | |
| **Deuxième coordonnée** | | | | | |

**3.** Que dire des deux dernières lignes du tableau précédent ?

**4.** Exprimer les vecteurs du tableau en fonction du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sous la forme $k\overrightarrow{CD}$ où $k$ est un réel.

**5.** En déduire une conjecture permettant de déterminer la colinéarité de deux vecteurs en fonction de leurs coordonnées.

**6.** **Pour aller plus loin** Soient $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Soit $k$ un réel.

Démontrer que $\vec{u} = k\vec{v}$ si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

↪ Cours 3 p. 156

# Cours

## 1 Base, repère et coordonnées

**Définition** **Base orthonormée**

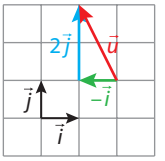
Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan dont les directions sont perpendiculaires et tels que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$. Le couple $(\vec{i}\,;\vec{j})$ est une **base orthonormée** des vecteurs du plan.

**Propriété** **Décomposition d'un vecteur et coordonnées**

Tout vecteur $\vec{u}$ du plan se **décompose de manière unique** sous la forme $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ où $x$ et $y$ sont deux nombres réels. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $(x\,;y)$ est le **couple de coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}\,;\vec{j})$.

**Exemple**

Dans la base orthonormée $(\vec{i}\,;\vec{j})$, on a $\vec{u} = -1\vec{i} + 2\vec{j}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.




**Définition** **Repère orthonormé**

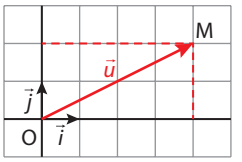
On appelle **repère orthonormé** du plan le triplet $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ constitué par un point O du plan appelé **origine** et par les vecteurs d'une **base orthonormée** $(\vec{i}\,;\vec{j})$.

**Remarque** Soit M un point quelconque du plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

M a pour coordonnées $(x\,;y)$ dans $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ signifie que $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}\,;\vec{j})$.

**Exemple**

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ représenté ci-contre a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc les coordonnées du point M sont M(4 ; 2).




**Dans la suite, on considère un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.**

**Propriété** **Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$**

Soient deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

Les **coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$** sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

**Exemple**

Soient C(−3 ; 2) et D(1 ; 4). $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 4-2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

**Propriété** **Égalité de vecteurs**

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **égaux** si et seulement s'ils ont les **mêmes coordonnées.**

**Propriétés** **Opérations sur les vecteurs et les coordonnées**

Soient $k$ un nombre réel et deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On a :

- $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
- $-\vec{u}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$
- $\vec{u} - \vec{v}\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$
- $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

**Exemple** ↪ Méthode 2 p. 155

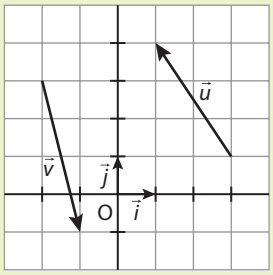
# Exercices résolus

Dans tous les exercices de cette page, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

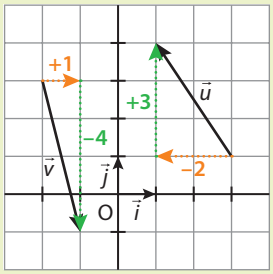
## Méthode 1 Déterminer graphiquement les coordonnées d'un vecteur

**Énoncé**

**Déterminer graphiquement les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentés dans le repère ci-contre.**




**Solution**



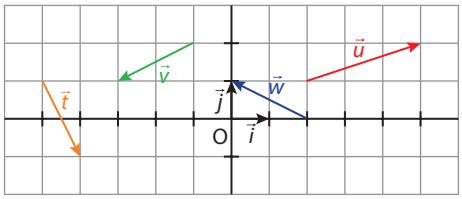

$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$. 1 2

**VIDÉO ALL MATHS PARNAK**
**Comprendre une méthode**
www.lienmini.fr/8270-18

**Conseils & Méthodes**

1. La première coordonnée se lit **horizontalement** et la deuxième **verticalement**.
2. Le signe dépend du sens de lecture. Dans un repère classique, la coordonnée horizontale est positive quand on va vers la droite et négative vers la gauche. La coordonnée verticale est positive quand on va vers le haut et négative quand on va vers le bas.

### À vous de jouer !




**1** Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et $\vec{t}$.

**2** 1. Reproduire le repère ci-contre.

2. Placer un vecteur $\vec{z}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ et un vecteur $\vec{s}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

3. Nommer le (ou les) vecteur(s) colinéaire(s) à $\vec{z}$ et à $\vec{s}$.

↪ Exercices 40 à 45 p. 162

## Méthode 2 Calculer les coordonnées d'une expression vectorielle

**Énoncé**

**Soient trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées de : a) $\vec{u}+\vec{v}$ b) $-2\vec{v}$ c) $3\vec{w}-2\vec{u}$**

**Solution**

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}7+(-5)\\0+3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. 1

b) $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ donc $-2\vec{v}\begin{pmatrix}-2\times(-5)\\-2\times3\end{pmatrix}$ et $-2\vec{v}\begin{pmatrix}10\\-6\end{pmatrix}$. 2

c) $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$ donc $3\vec{w}-2\vec{u}\begin{pmatrix}3\times1-2\times7\\3\times(-3)-2\times0\end{pmatrix}$ et $3\vec{w}-2\vec{u}\begin{pmatrix}-11\\-9\end{pmatrix}$. 3

**Conseils & Méthodes**

1. Additionner ou soustraire les abscisses et les ordonnées.
2. Multiplier chaque coordonnée par le nombre réel.
3. Combiner somme et produit.

### À vous de jouer !

**3** Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées de :

**a)** $-\vec{v}$ **b)** $\vec{u}+\vec{v}$ **c)** $3\vec{u}-2\vec{v}$

**4** Soient A(3 ; −2), B(−1 ; 2) et C(2 ; 3).

Calculer les coordonnées de :

**a)** $-\overrightarrow{BC}$ **b)** $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **c)** $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

↪ Exercices 53 à 62 p. 163

# 2 Milieu et norme

Soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

**Propriété** **Coordonnées du milieu d'un segment**

Le **milieu** d'un segment [AB] a pour coordonnées : $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

**Remarque** Pour appliquer cette formule, le repère n'a pas besoin d'être orthonormé.

**Exemple**

Soient A(3 ; –1) et B(–2 ; 5), alors le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées : $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ soit $\left(\dfrac{3 + (-2)}{2} ; \dfrac{-1 + 5}{2}\right)$ c'est à dire : $I\left(\dfrac{1}{2} ; 2\right)$.

**Propriété** **Norme d'un vecteur**

La **norme** du vecteur $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

La norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $AB = \sqrt{x_{\overrightarrow{AB}}^2 + y_{\overrightarrow{AB}}^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

**Exemple**

Soient A(3 ; –1) et B(–2 ; 5) alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $AB = \sqrt{(-5)^2 + 6^2} = \sqrt{61}$.

**Remarque** Cette longueur AB est exprimée dans l'unité du repère.

# 3 Condition de colinéarité

**Définition** **Déterminant de deux vecteurs**

On appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le nombre $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

**Propriété** **Condition de colinéarité de deux vecteurs**

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

**Démonstration**

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs. On suppose que $x' \neq 0$ et $y' \neq 0$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un nombre réel $k$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. Ce qui signifie que $x = kx'$ et $y = ky'$. Ainsi, $k = \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}$ (car $x' \neq 0$ et $y' \neq 0$) ce qui équivaut à $xy' = x'y$ ou à $xy' - x'y = 0$.

**Remarques**

- Le calcul du déterminant ne permet pas / ne nécessite pas de trouver le coefficient de colinéarité.
- La condition de colinéarité permet de démontrer que des droites sont parallèles ou que des points sont alignés.

**Exemple**

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix}$. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 4 \times 18 - 6 \times 12 = 72 - 72 = 0$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Soit $k$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, alors $k = \dfrac{4}{6} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$. On a donc $\vec{u} = \dfrac{2}{3}\vec{v}$.

# Exercices résolus

Dans tous les exercices de cette page, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

## Méthode 3 Calculer la norme d'un vecteur

**Énoncé**

**On considère les points A(1 ; –3), B(–4 ; –1), C(3 ; 3) et D(–1 ; 2). Calculer les longueurs : a) AC b) BD.**

**Solution**

**Méthode 1 : à partir des coordonnées du vecteur**

**a)** $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 3-(-3) \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ (1) donc

$AC = \sqrt{2^2 + 6^2}$ (2) $= \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$.

**b)** $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ (1) donc $BD = \sqrt{3^2 + 3^2}$ (2) $= \sqrt{18}$.

**Méthode 2 : à partir des coordonnées des points**

**a)** A(1 ; –3) et C(3 ; 3).

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$ (3)

**b)** $BD = \sqrt{(-1-(-4))^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$ (3)

**Conseils & Méthodes**

(1) Pour calculer une longueur, on peut déterminer les coordonnées du vecteur.

(2) On applique ensuite la formule de la norme d'un vecteur.

(3) Pour calculer une longueur, on peut appliquer la formule avec les coordonnées des points.

**À vous de jouer !**

**5** Soient A(–2 ; 1) et B(1 ; 3).
Calculer la longueur AB.

**6** On considère les points A(1 ; 5), B(–1 ; 1) et C(3 ; 4).
Calculer les longueurs AB, AC et BC.

↪ Exercices 71 à 95 p. 164

## Méthode 4 Utiliser la colinéarité de deux vecteurs

**Énoncé**

**Soient les points A(–2 ; –1), B(2 ; –3), C(–4 ; 4) et D(6 ; –1).**

**1. Prouver que les droites (CD) et (AB) sont parallèles.**

**2. Les points A, B et C sont-ils alignés ?**

**Solution**

**1.** A(–2 ; –1), B(2 ; –3), C(–4 ; 4) et D(6 ; –1) donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}$. (1)

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 4 \times (-5) - 10 \times (-2) = -20 + 20 = 0$ (2)

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

**2.** A(–2 ; –1), B(2 ; –3) et C(–4 ; 4) donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. (1)

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4 \times 5 - (-2) \times (-2) = 20 - 4 = 16 \neq 0$ (2)

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés. (3)

**Conseils & Méthodes**

(1) Calculer les coordonnées des vecteurs.

(2) Calculer le déterminant

(3) On aurait pu choisir d'autres vecteurs utilisant les 3 points.

**À vous de jouer !**

**7** **1.** Placer les points P(–3 ; –1), N(0 ; 1) et R(3 ; 3).
**2.** Ces trois points sont-ils alignés ?

**8** **1.** Placer A(–3 ; 1), B(1 ; 3), C(1 ; –4) et D(7 ; –1).
**2.** (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? et (AC) et (BD) ?

↪ Exercices 96 à 107 p. 165

EXERCICES Sésamath
Travailler des méthodes
www.lienmini.fr/8270-s13

**Dans tous les exercices de cette page, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.**

Méthode 5

## Déterminer les coordonnées d'un point à partir d'une égalité vectorielle

### Énoncé

**On considère les points A(–2 ; 3), B(4 ; –1) et C(5 ; 3).**
**Calculer les coordonnées :**
**a) du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.**
**b) du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.**

### Solution

**a)** On cherche $(x_D ; y_D)$ les coordonnées du point D tel que ABDC soit un parallélogramme, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. 2

Après calculs, on obtient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ et l'on exprime $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - 5 \\ y_D - 3 \end{pmatrix}$ en fonction des coordonnées de D.

On obtient alors deux équations,
une pour les abscisses $x_D - 5 = 6$,
l'autre pour les ordonnées $y_D - 3 = -4$. 3

On résout chacune d'entre elles :

$x_D = 6 + 5 = 11$ et $y_D = -4 + 3 = -1$ donc D(11 ; –1).

**b)** On cherche les coordonnées $(x_E ; y_E)$ du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Après calcul : 3

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E + 2 \\ y_E - 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 13 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

soit $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 12 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Pour les abscisses, on résout l'équation $x_E + 2 = 12$, d'où $x_E = 10$.

Pour les ordonnées, on résout $y_E - 3 = -8$ d'où $y_E = -5$.

Donc E(10 ; –5). 3

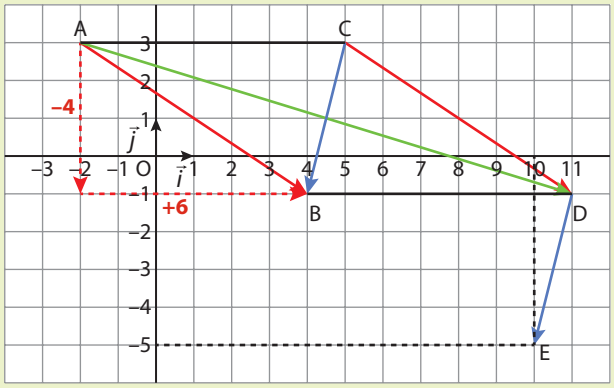
### Conseils & Méthodes

1 Toujours faire une figure même si ce n'est pas demandé par l'énoncé, cela permet de vérifier ses réponses graphiquement.

2 Dans un repère, pour montrer que ABCD est un parallélogramme, on montre l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ en utilisant la propriété : « Deux vecteurs sont égaux s'ils ont les mêmes coordonnées. »

3 Lorsque l'on cherche les coordonnées d'un point défini par une relation vectorielle, il faut résoudre deux équations dont les inconnues sont les coordonnées cherchées.

1




## À vous de jouer !

**9** On considère le point A(–5 ; –2) et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les coordonnées du point M défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$.
2. Calculer les coordonnées du point N défini par $\overrightarrow{AN} = \vec{u} - \vec{v}$.
3. Faire une figure et vérifier vos résultats.

**10** On considère les points B(–4 ; 2), C(0 ; 3) et D(1 ; –5). Calculer les coordonnées du point E défini par $\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BC} - 5\overrightarrow{CD}$.

**11** Soient E(–3 ; 2), F(1 ; –2) et G(–1 ; –5). Déterminer les coordonnées du point H pour que EFGH soit un parallélogramme.

↪ Exercices 108 à 129 p. 166

# Exercices résolution de problèmes

**Dans tous les exercices de cette page, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.**

## J'apprends à émettre une conjecture

**Réflexe 1**

Commencer par s'appuyer sur des exemples. En géométrie, on fait généralement un (ou des) schéma(s) bien codé(s) ; en algèbre ou analyse, on prend des valeurs particulières.

**Réflexe 2**

Reconnaître une configuration connue. En géométrie, cela peut être un polygone particulier, un cercle, un alignement, un milieu, etc. ; en algèbre ou analyse, cela peut être des multiples, des carrés, etc.

### Énoncé

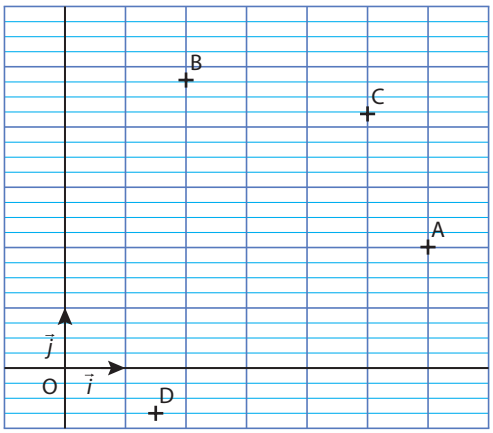
Soient A(6 ; 2), $B\left(2 ; 2+2\sqrt{2}\right)$, $C\left(5 ; 2+\sqrt{5}\right)$ et $D\left(\frac{3}{2} ; \frac{4-3\sqrt{3}}{2}\right)$. **Que peut-on dire des points A, B, C et D ?**

### Solution

**Étape 1** Je fais une figure en plaçant les points dans le repère en m'aidant du quadrillage de mon cahier.

**Réflexe 1**

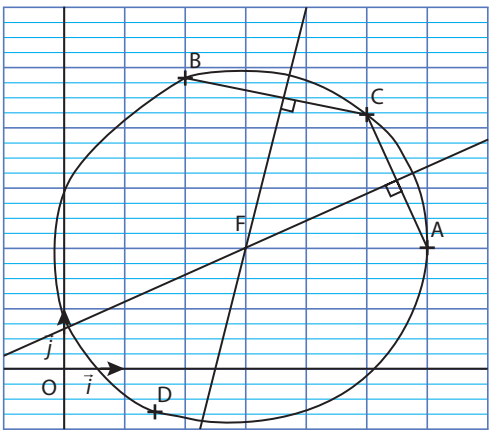
$2+2\sqrt{2} \approx 4{,}8$ $\quad 2+\sqrt{5} \approx 4{,}2$ $\quad \frac{4-3\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}6$




**Étape 2** Les quatre points forment un quadrilatère qui ne ressemble à aucun quadrilatère connu : les côtés ne sont pas parallèles, les diagonales n'ont pas de particularités et les côtés n'ont pas de longueurs égales. **Réflexe 2**

**Étape 3** Je pense alors à un cercle. **Réflexe 2**

Cela a globalement la forme en traçant à main levée.




**Étape 4** Il s'agit maintenant de le caractériser en définissant son centre et son rayon. Pour cela, on trace les médiatrices de deux segments dont les extrémités sont deux des points A, B, C ou D. Le point d'intersection F est donc à égale distance des extrémités de ces deux segments ce qui se traduit par FB = FC = FA sur le graphique précédent. On obtient donc un centre éventuel en F(3 ; 2) et le rayon serait de 3. Avec le compas, on trace le cercle éventuel qui semble bien passer par les 4 points.

*Réponse rédigée*

Je conjecture que les points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre F(3 ; 2) et de rayon 3.

## Je m'entraîne à émettre une conjecture

### 12 Avec quatre points

On considère les points $A\left(0 ; 2\sqrt{2}\right)$, B(–2 ; –2), C(2 ; –2) et D(2 ; 2). Que peut-on dire des points A, B, C et D?

### 13 Avec trois points

On considère les points A(–5 ; 5), B(–2 ; 4) et C(–5 ; –4). Que peut-on dire des points A, B et C ?

### 14 Avec quatre points

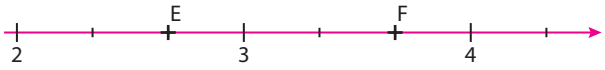
Soient C(–3 ; 2) et B(1 ; 2). La médiatrice du segment [BC] recoupe le cercle de centre C de rayon CB en deux points A et D. Que peut-on dire des points A, B, D et C ?

# Exercices automatismes

**CARTES FLASH**
Acquérir des automatismes
www.lienmini.fr/8270-6

## Rituel 1

### Repérer un nombre rationnel sur une droite graduée




**15** Sur la droite graduée ci-dessus, quelles sont les abscisses des points E et F ?

**16** Reproduire la droite graduée ci-dessus et placer les points d'abscisses $\frac{2}{3}$ et $-\frac{4}{3}$.

### Appliquer une formule mathématique

**17** Soient $x = 2$, $y = -4$, $x' = -3$ et $y' = 6$. Déterminer :

**a)** X sachant que $X = \frac{x + x'}{2}$.

**b)** A sachant que $A = xy' - yx'$.

### Appliquer Pythagore

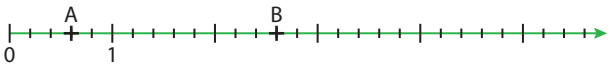
**18** Le triangle DEF est rectangle en F et DF = 5 et DE = 13. Calculer EF.

**19** Le triangle ABC est tel que AB = 3, AC = 4 et BC = 6. Est-il rectangle ?

## Rituel 2

### Repérer un nombre rationnel sur une droite graduée

**20** Quelles sont les abscisses des points A et B ?



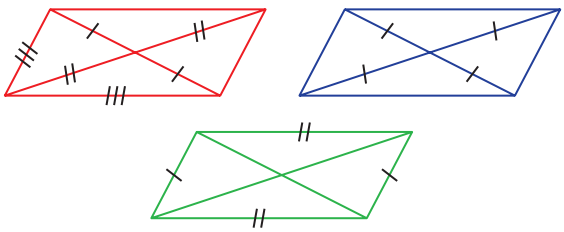

### Résoudre une équation du 1er degré

**21** Résoudre les équations suivantes :

**a)** $3 - (2x + 5) = -2$ **b)** $3(x - 2) = -5x + 7$

### Nommer des quadrilatères à partir d'un graphique

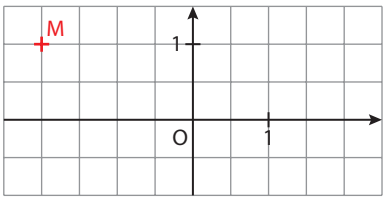
**22** Donner la nature des quadrilatères d'après le codage. Les schémas ne sont pas à l'échelle.



## Rituel 3

### Repérer un point dans le plan

**23** Dans le repère orthonormé ci-contre, donner les coordonnées :




**a)** du point M.

**b)** du point A symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.

**c)** du point B symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

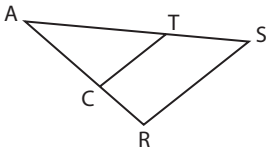
### Résoudre une équation du 1er degré

**24** Résoudre les équations suivantes :

**a)** $2x - 7 = -5$ **b)** $7 - 8x = -2$

### Appliquer Thales

**25** On a AT = 5, AS = 8, AC = 3,5 et AR = 5,6. Les droites (TC) et (SR) sont-elles parallèles ?




## Rituel 4

### Repérer un point dans le plan

**26** Reproduire le repère de l'exercice **23**.

Placer les points de coordonnées A(0 ; 1), $R\left(-1 ; -\frac{1}{2}\right)$ et $E\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

### Appliquer une formule mathématique

**27** Le volume d'une boule de rayon $r$ est donné par $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Calculer le volume d'une boule de rayon 6.

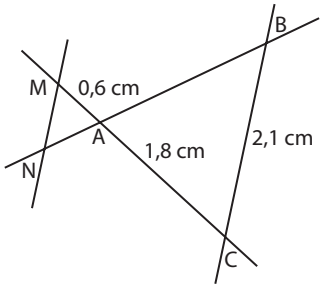
**28** Deux résistances $R_1$ et $R_2$ sont montées en dérivation. Cette partie du circuit électrique est équivalent à $R$ tel que $R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$. Calculer $R$ si $R_1 = 25\ \Omega$ et $R_2 = 8\ \Omega$.

### Appliquer Thalès

**29** On considère la figure ci-contre.

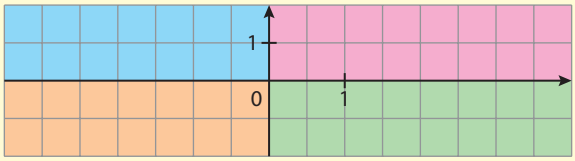
Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Calculer MN.



## Je consolide mes acquis

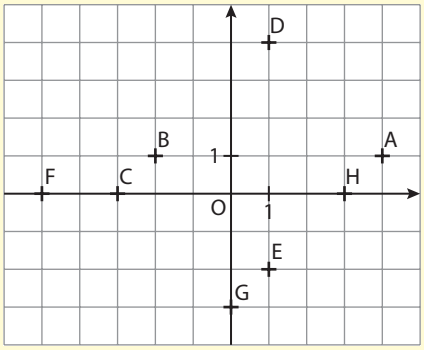
### 30 Régionnement du plan




En utilisant la couleur, indiquer dans quel quadrant se trouvent les points suivants :

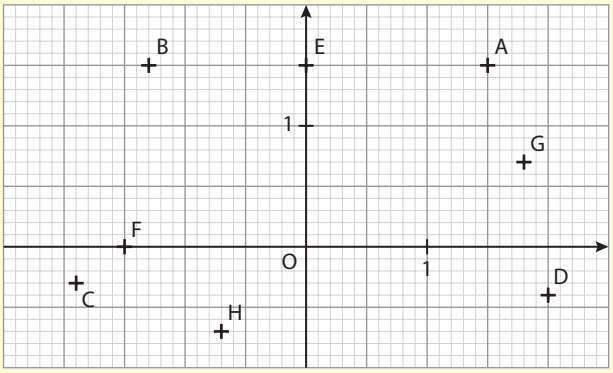
- A(–2 ; 1)
- B(–2 ; –1)
- C(1 ; –1)
- D(–3 ; –2)
- E(4 ; –2)
- F(–4 ; 2)

### 31 Abscisse et ordonnée



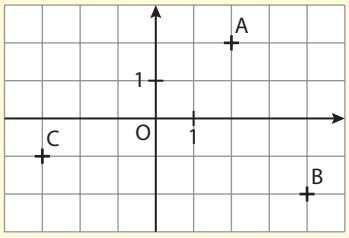

**1.** Quel est le point d'abscisse 4 ?
Quelle est son ordonnée ?
**2.** Quel est le point d'ordonnée 4 ?
Quelle est son abscisse ?
**3.** Quel est le point d'abscisse –2 ?
Quelle est son ordonnée ?
**4.** Quel est le point d'ordonnée –2 ?
Quelle est son abscisse ?

### 32 Coordonnées de points




Écrire les coordonnées des points A à H.

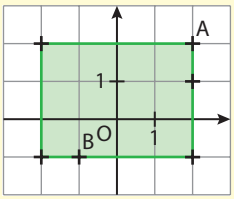
### 33 Construction et coordonnées




**1.** Donner les coordonnées des points A, B et C.
**2.** Reproduire le repère et placer le point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
Quelles sont ses coordonnées ?
**3.** Placer le point E tel que CAEB soit un parallélogramme. Quelles sont ses coordonnées ?
**4.** Placer le point F, symétrique de D par rapport à A.
Quelles sont ses coordonnées ?

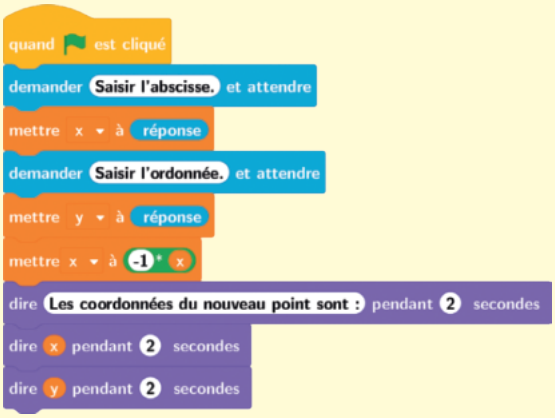
### 34 Coordonnées

Reproduire le repère et placer les points C, D, E et F sachant que :
– C a la même abscisse que A ;
– E a une abscisse négative ;
– D a la même abscisse que A et une ordonnée négative ;
– F a la même ordonnée que A.




### 35 Symétrie et coordonnées

**1.** Que répond le programme suivant avec les points A(5 ; 3) puis B(–2 ; –3) ?




**2.** Quel est l'objectif de ce programme ?
**3.** Modifier ce script pour qu'il détermine les coordonnées de l'image du point rentré par la symétrie de centre O.

# Exercices d'entraînement

**Dans tous les exercices, sauf mention contraire, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.**

## Questions de cours

**36** Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, quel vecteur a toujours les mêmes coordonnées que le point M ?

**37** Comment déterminer les coordonnées d'une somme de vecteurs ?

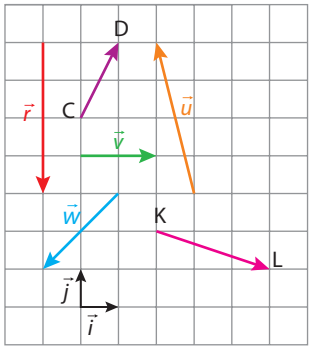
**38** Quelle formule donne la longueur d'un segment à partir des coordonnées de ses extrémités ?

**39** Comment déterminer la colinéarité de deux vecteurs à partir de leurs coordonnées ?

## Lecture graphique

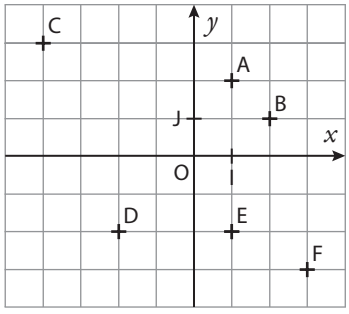
Méthode 1 p. 155

**40** Oral Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{r}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{KL}$.




**41** Lire les coordonnées des points et des vecteurs suivants dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

**a)** A **b)** B **c)** $\overrightarrow{OC}$
**d)** $\overrightarrow{AE}$ **e)** $\overrightarrow{FC}$ **f)** $\overrightarrow{DO}$




**42** **1.** Placer le point A(–3 ; 4).

**2.** Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$. Placer les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$.

**3.** Que peut-on dire du point A ?

**43** **1.** Reproduire la figure de l'exercice **41**.

**2.** Construire un représentant du vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ à partir du point D. Quel est le nom du point à l'extrémité du vecteur tracé ?

**3.** Même question avec :

**a)** le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ à partir du point E.

**b)** le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$ à partir du point A.

**44** Soient A(6 ; 5), B(2 ; –3) et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

**1.** Placer le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$.

**2.** Placer le point D tel que $\overrightarrow{DB} = \vec{u}$.

**3.** Lire les coordonnées :

**a)** des points C et D.

**b)** des vecteurs $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CB}$.

## Coordonnées d'un vecteur par le calcul

**45** **1.** Placer les points A(3 ; –2), B(–1 ; 2) et C(2 ; 3) et lire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

**2.** Vérifier leurs coordonnées par le calcul.

**46** On considère les points A(1 ; 2), B(–2 ; 5) et C(–3 ; –3). Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

**47** On considère les points D(3 ; –2), E(–1 ; –4) et F(–3 ; 2). Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DF}$.

**48** Soient les points A(3 ; 5), B(2 ; –1), C(–2 ; –4) et D(–1 ; 2).

**1.** Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

**2.** Que peut-on dire du quadrilatère ABCD ?

**49** Soient les points E(2 ; 2), F(–3 ; 4), G(1 ; –4) et H(–4 ; –2). Démontrer que EFHG est un parallélogramme.

**50** On considère les points $E\left(-\frac{9}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$, $L\left(-1 ; -\frac{3}{2}\right)$, $A\left(\frac{3}{2} ; 1\right)$ et N(–2 ; 2).

Démontrer que ELAN est un parallélogramme.

**51** Soient les points M(–5 ; 2), N(3 ; 4), P(6 ; –7), R(–8 ; 9). Le quadrilatère MPNR est-il un parallélogramme ?

**52** **1.** Placer les points A(2 ; 5), B(–5 ; 6), C(–4 ; –1), D(3 ; –2) et I(–11 ; 0).

**2.** Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

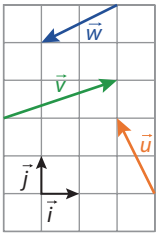
**3.** Que représente le point C pour le segment [ID] ? Justifier.

**4.** Le point C est-il l'image du point I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ ? Justifier.

## Coordonnées d'une expression vectorielle

Méthode 2 p. 155

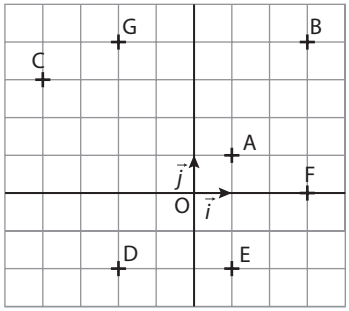
**53** **1.** Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
**2.** Reproduire la figure puis tracer les vecteurs suivants.




**a)** $\vec{u}+\vec{v}$ **b)** $\vec{u}+\vec{w}$
**c)** $\vec{u}-\vec{v}$ **d)** $\vec{u}-\vec{w}$
**3.** Lire leurs coordonnées.
**4.** Les vérifier par le calcul.

**54** On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.
**1.** Tracer les deux vecteurs.
**2.** Construire les vecteurs suivants :
$2\vec{u}$, $-3\vec{v}$, $\frac{1}{3}\vec{u}$ et $\frac{3}{2}\vec{v}$.
**3.** Lire leurs coordonnées.
**4.** Les vérifier par le calcul.

**55** Oral **1.** Lire les coordonnées des points.




**2.** Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :
• $\overrightarrow{AB}$ • $\overrightarrow{CE}$ • $\overrightarrow{FA}$ • $\overrightarrow{GD}$ • $\overrightarrow{BG}$
**3.** Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GD}$.

**56** Soient trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.
Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :
**a)** $\vec{u}+\vec{v}$ **b)** $\vec{u}-\vec{v}$ **c)** $-2\vec{w}$

**57** On considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$.
Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :
• $\overrightarrow{3u}$ • $-4\vec{u}$ • $\frac{2}{3}\vec{u}$ • $-\frac{9}{2}\vec{u}$

**58** On considère les vecteurs suivants $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.
**1.** Déterminer les coordonnées des vecteurs $2\vec{u}$ et $-\vec{v}$.
**2.** Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ vérifiant l'égalité $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}$ ?

**59** Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.
Calculer les coordonnées de $\vec{w}$, $\vec{m}$ et $\vec{z}$ tels que $\vec{u}+\vec{w}=\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{m}=\vec{v}$ et $\vec{z}-\vec{u}=\vec{v}$.

**60** Soient trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\-11\end{pmatrix}$.
Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :
**a)** $\vec{v}+\vec{w}$ **b)** $\vec{u}-\vec{v}$ **c)** $-\overrightarrow{3u}$
**d)** $-3\vec{u}+\vec{w}$ **e)** $3\vec{v}+2\vec{u}$ **f)** $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$

**61** Soient les points A(1 ; 2), B(−2 ; 5) et C(−3 ; −3).
Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CA}$ et $2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$.

**62** Soient A(3 ; −2), B(−1 ; 2) et C(2 ; 3).
Calculer les coordonnées de $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}$.

## Coordonnées du milieu

**63** On donne les points A(2 ; 3) et B(−1 ; −4).
Déterminer les coordonnées du milieu du segment [AB].

**64** Déterminer les coordonnées du milieu du segment [CD] quand :
**a)** C(5 ; 1) et D(−2 ; 1).
**b)** $C\left(\frac{1}{2};2\right)$ et $D\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

**65** On considère les points C(1 ; −1) et D(3 ; −2).
Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la médiatrice de [CD] avec le segment [CD].

**66** On considère les points E(−5 ; 3) et F(−3 ; −1).
**1.** Déterminer les coordonnées :
**a)** du point I, milieu du segment [EF].
**b)** du point J, milieu du segment [EI].
**c)** du point K, milieu du segment [IF].
**2.** Montrer que I est aussi le milieu de [JK].

**67** Histoire des maths

Descartes est le premier mathématicien à associer l'algèbre et la géométrie, en attribuant des nombres aux vecteurs pour déterminer leur position. Cela permet de résoudre un problème géométrique par un calcul.

René Descartes (1596-1650)

Soient les points $P\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$, A(−4 ; 1), $R\left(-\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)$ et T(−2 ; 2).
**1.** Déterminer le milieu de [PR].
**2.** Démontrer que PART est un parallélogramme.

**68** Dans un repère orthonormé, on place les points A(1 ; –1), B(–2 ; 0), C(0 ; 6) et D(3 ; 5).
**1.** Déterminer les coordonnées du milieu :
**a)** du segment [AC]. **b)** du segment [BD].
**2.** En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

**69** Soient les points A(–2 ; 5), B(–1 ; 1), C(3 ; 0) et D(2 ; 4).
**1.** Montrer que ABCD est un parallélogramme.
**2.** Déterminer les coordonnées du centre E de ABCD.

**70** On considère les points A(5 ; –6) et B(–2 ; 6).
Le point C est le milieu de [AB].
Déterminer les coordonnées des vecteurs :
**a)** $\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{CA}$ **c)** $\overrightarrow{BC}$

## Norme et longueur

Méthode 3 p. 157

**71** Calculer la norme des vecteurs suivants :
• $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ • $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$ • $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ • $\vec{m}\begin{pmatrix}-3\\-7\end{pmatrix}$ • $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$

**72** Soient A(5 ; –1) et B(–2 ; 1). Déterminer :
**a)** les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
**b)** la valeur exacte de la longueur du segment [AB].

**73** Dans chaque cas, calculer la distance AB.
**a)** A(1 ; –5) et B(4, ; 1).
**b)** A(–2 ; 4) et B(–1 ; –1).
**c)** A(3 ; –2) et B(–5 ; 0).
**d)** $A\left(\frac{1}{2};-2\right)$ et $B\left(3;-\frac{8}{3}\right)$.
**e)** $A\left(\frac{5}{4};-\frac{1}{3}\right)$ et $B\left(\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right)$.

**74** Soient A(6 ; 5), B(2 ; –3) et C(–4 ; 0).
Déterminer le périmètre du triangle ABC.

**75** On considère les points F(7 ; –1), I(5 ; –4) et L(–4 ; 2).
**1.** Calculer les longueurs FI, FL et IL.
**2.** Justifier que le triangle FIL est rectangle en I.

**76** On considère les points D(3 ; –1), E(5 ; 2) et F(7 ; –1).
**1.** Calculer les longueurs DE, EF et DF.
**2.** Donner la nature du triangle DEF.

**77** On considère les points A(–2 ; 1), B(–4 ; 4) et C(0 ; –2).
**1.** Calculer les longueurs AB, AC et BC.
**2.** Les points forment-ils un triangle ou sont-ils alignés ?

**78 Analyser un problème**
Soient les points T(1 ; 3), A(5 ; 3), R(3 ; –5) et D(7 ; –6).
**1.** Quelle est la nature du triangle TAR ?
**2.** Quelle est la nature du triangle ARD ?
↪ Résolution de problèmes p. 134

**79** On considère les points H(3 ; 4), U(12 ; 4) et M(3 ; –2).
**1.** Démontrer que le triangle HUM est rectangle en H.
**2.** Déterminer $\sin(\widehat{HUM})$.
**3.** En déduire $\widehat{HUM}$ puis $\widehat{HMU}$. Arrondir à $10^{-2}$ près.

**80** On considère les points A(7 ; –2), B(–1 ; 6) et C(–5 ; 2).
Déterminer l'angle $\widehat{ACB}$. Arrondir à $10^{-2}$ près.

**81** On considère un triangle ABC tel que : A(–3 ; 1), B(7 ; 1) et C(1 ; 4).De plus le point H a pour coordonnées (1 ; 1).
**1.** Montrer que les triangles ACH et BCH sont rectangles
**2.** Calculer les valeurs des angles $\widehat{CAH}$ et $\widehat{CBH}$.
**3.** En déduire que le triangle ABC n'est pas rectangle.

**82 Émettre une conjecture**
Soient les points R(1 ; –1), I(–2 ; 0), E(0 ; 6) et N(3 ; 5).
**1.** Placer les points dans un repère.
**2.** Conjecturer la nature du quadrilatère RIEN.
**3.** Démontrer cette conjecture.
↪ Résolution de problèmes p. 159

**83** Soient les points B(–1 ; 6), A(4 ; 4), N(2 ; –1) et E(–3 ; 1).
**1.** Placer les points dans un repère.
**2.** Conjecturer la nature du quadrilatère BANE.
**3.** Démontrer cette conjecture.

**84** On considère les points E(5 ; 2) et B(4 ; –1).
**1.** Faire une figure et tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre E qui passe par B.
**2.** Calculer le rayon du cercle $\mathscr{C}$.
**3.** Démontrer que ce cercle passe par le point A de coordonnée (8 ; 3).

**85** On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre I(–4 ; 2) de rayon 5.
Parmi les points suivants, lesquels appartiennent à $\mathscr{C}$ ?
**a)** A(0 ; 5) **b)** B(–3 ; 7) **c)** C(–9 ; 2) **d)** D(–7 ; –2)

**86** On considère les points A(6 ; –3) et B(8 ; –2).
**1.** Parmi les points suivants, quels sont ceux appartenant au disque de centre A passant par B :
• C(5 ; –3) • E(9 ; –2) • D(7 ; –5)
• F(6 ; –1) • G(3,5 ; –3) • H(7,5 ; –4,5)
**2.** Est-ce qu'un point d'ordonnée positive peut appartenir à ce disque ?

**87** Soient les points A(6 ; –1), B(–3 ; 1), C(1 ; 9) et H(–2 ; 3).
**1.** Démontrer que les triangles BAH et AHC sont rectangles en H.
**2.** Que peut-on en déduire pour la droite (AH) ?
**3.** Déterminer l'aire du triangle ABC.

**88** Soient les points P(1 ; –2), A(7 ; 2), I(–2 ; –4) et N(5 ; –8).
**1.** Faire une figure.
**2.** Montrer que P est le projeté orthogonal du point N sur la droite (AI).
**3.** Déterminer l'aire du triangle NIA.
**4.** En déduire la longueur de la hauteur du triangle NIA issue de A.

**89** On considère les points P(–2 ; 4), A(0 ; –1) et T(5 ; –2).
**1.** Faire une figure.
**2.** Placer le point E milieu du segment [AT].
**3.** Tracer la droite parallèle à (TP) passant par E.
Elle coupe la droite (PA) en F.
**4.** Oral Quelles sont les coordonnées du point F ?

**90** Soient les points A(2 ; 3), B(13 ; 1), C(5 ; 7) et J(0 ; 1).
**1.** Le point A appartient-il au cercle de centre C et de rayon 5 ?
**2.** Le point B est-il sur la médiatrice de [OJ] ?
**3.** Quelle est la nature du triangle ABC ?
**4.** Soit R(4 ; –1). Quelle est la nature du triangle JAR ?

**91** Soient les points M(–2 ; –2), N(3 ; 1), P(0 ; 6) et Q(–5 ; 3).
**1. a)** Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{QP}$.
**b)** En déduire la nature du quadrilatère MNPQ.
**2. a)** Calculer la norme de $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{MP}$.
**b)** Préciser la nature du quadrilatère MNPQ.
**3. a)** Le repère $(M ; \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ})$ est-il orthonormé ? Justifier.
**b)** La base $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ})$ est-elle orthonormée ? Justifier.

**92** On considère un triangle ABC tel que : A(6 ; 5), B(2 ; –3) et C(–4 ; 0).
**1.** Montrer que le triangle ABC est rectangle et préciser le sommet de l'angle droit.
**2.** Calculer le périmètre du triangle ABC.
**3.** Calculer l'aire du triangle ABC.
**4.** Déterminer sous forme de fraction irréductible la tangente de l'angle $\widehat{ACB}$.
**5.** En déduire une valeur arrondie de l'angle $\widehat{ACB}$.

### 93 Décomposer un problème Python

**1.** Écrire une fonction `norme` en langage **Python** qui, à partir des coordonnées de deux points A et B, retourne la longueur AB.
**2.** Écrire un programme qui, à partir des coordonnées de quatre points ABCD, renvoie `vrai` si le quadrilatère ABCD est un losange.

↪ Résolution de problèmes p. 31

**94** On considère le point A(–1 ; –2).
**1.** Faire une figure.
**2.** Où se situent tous les points d'abscisse 2 ?
**3. a)** Combien y a-t-il de points M d'abscisse 2 vérifiant OA = OM ?
**b)** Déterminer par le calcul leur ordonnée.
**4. a)** Combien y a-t-il de points M d'abscisse 2 vérifiant AM = 5 ?
**b)** Déterminer par le calcul leur ordonnée.
**5. a)** On considère les points I(1 ; 0) et J(0 ; 1).
Tracer la médiatrice de [IJ].
**b)** Déterminer les ordonnées des points de la médiatrice d'abscisse 2.
**6.** Combien y a-t-il de points M d'abscisse 2 tels que MI = MJ et AM = 5 ?

**95** On considère les points A (–1 ; 1), B(3 ; 1), C(3, –3) et D(–1 ; –3).
**1.** Conjecturer la nature du quadrilatère ABCD.
**2.** Démontrer cette conjecture.
**3.** Déterminer les coordonnées du centre O du quadrilatère ABCD.
**4.** Citer, en justifiant, un repère orthonormé ayant pour origine :
**a)** A **b)** D **c)** O
**5.** Donner les coordonnées des points A, B, C, D et O dans les repères suivants :
**a)** $(D ; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$ **b)** $(A ; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$ **c)** $(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$

## Colinéarité

Méthode 4 p. 157

**96** **1.** Calculer les déterminants des vecteurs suivants.
**a)** $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-4{,}5\end{pmatrix}$. **b)** $\vec{s}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}14\\4\end{pmatrix}$.
**c)** $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{r}\begin{pmatrix}3\\4{,}5\end{pmatrix}$. **d)** $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-4{,}5\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-8\\12\end{pmatrix}$.
**e)** $\vec{s}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{m}\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{7}\end{pmatrix}$.
**2.** Dire s'ils sont colinéaires. Si oui, écrire une égalité vérifiée par les deux vecteurs.

**97** Soient D(–3 ; –1), E(–4 ; 2), F(2 ; –2) et G(1 ; 1). Dans chaque cas, calculer les coordonnées des vecteurs suivants puis leur déterminant.
Conclure sur leur éventuelle colinéarité.
**a)** $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{DE}$. **b)** $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FD}$. **c)** $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DG}$. **d)** $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DG}$.

**98** Dans chaque cas, dire si les droites (AB) et (CD) sont parallèles en justifiant par un calcul de déterminant.
**a)** A(–2 ; 1), B(3 ; 4), C(2 ; 2) et D(5 ; 4).
**b)** A(2 ; 2), B(5 ; 4), C(1 ; 4) et D(–2 ; 2).
**c)** A(3 ; 4), B(5 ; 0), C(0 ; 5) et D(3 ; 0).

**99** Dans chaque cas, dire si les trois points sont alignés en justifiant par un calcul de déterminant.
**a)** A(–4 ; 3), B(2 ; 3) et C(6 ; 3).
**b)** D(2 ; 5), E(–4 ; –3) et F(5 ; 9).
**c)** G(–2 ; 1), H(3 ; 4) et I(5 ; 5).

**100** Dans chaque cas, dire si le point C appartient à la droite (AB).
**a)** A(2 ; 3), B(2 ; –1) et C(2 ; 7).
**b)** A(1 ; 4), B(–5 ; –4) et C(4 ; 8).
**c)** A(–3 ; 0), B(2 ; 3) et C(4 ; 4).

**101** Soient $A\left(-\frac{1}{3} ; 0\right)$, $B\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3}\right)$, $C\left(\frac{4}{3} ; -1\right)$ et $D\left(0 ; \frac{2}{3}\right)$.
Les droites suivantes sont-elles parallèles ? Justifier.
**a)** (AB) et (CD). **b)** (BC) et (AD).

**102** Les coordonnées des points A, B, C et D sont respectivement (5 ; 1), (–4 ; 4), (–3; –2) et (0 ; –3).
Démontrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze.

**103** Les coordonnées des points A, B et C sont respectivement (3 ; 2), (9 ; –5) et (–9 ; 16).
**1.** Démontrer que ces points sont alignés.
**2.** Calculer le nombre $k$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

**104** Soient les points $M\left(\frac{2}{3} ; -\frac{3}{8}\right)$, $E\left(\frac{5}{9} ; \frac{5}{2}\right)$ et R(2 ; –1).
**1.** Faire une figure.
**2.** Les points M, E et R sont-ils alignés ?
Si oui, quelle égalité vectorielle lie $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MR}$ ?

**105** Déterminer $y$ pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.
**a)** $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-10\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\y\end{pmatrix}$. **b)** $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\y\end{pmatrix}$.

**106** Soit ABCD un carré de centre O. On note $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$ et on se place dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$.
**1.** Quelle est la nature du repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$ ?
**2.** Quelles sont les coordonnées de A, B et D ?
**3. a)** Exprimer $\overrightarrow{AO}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
**b)** En déduire les coordonnées du point O.
Soient E le point défini par $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO}$ et F le point défini par $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
**4.** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. En déduire les coordonnées du point E.
**5.** Quelles sont les coordonnées du point F ?
**6.** Les points O, E et F sont-ils alignés ?

**107** Soient A, B et C trois points non alignés.
On définit le point E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
**1.** Faire une figure.
**2.** Établir une conjecture sur les droites (CE) et (AB).
**3.** On note $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{j}$ et on se place dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer les coordonnées des points A, B, C et E.
**4.** Démontrer la conjecture.

## Détermination des coordonnées d'un point

Méthode 5 p. 158

**108** Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, celles du point A(5 ; 2).
Calculer les coordonnées du point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

**109** On considère le point A(–3 ; 4) et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.
On définit les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$.
**1.** Calculer les coordonnées des points B et C.
**2.** Que peut-on dire du point A ?

**110** On considère les points J(–5 ; 4), U(–4 ; –2) et L(3 ; –4).
Déterminer les coordonnées du point A, image de L par la translation de vecteur $\overrightarrow{JU}$.

**111** On considère les points E(2 ; –1), F(–3 ; 4) et G(1 ; 4).
Déterminer les coordonnées du point H pour que EFGH soit un parallélogramme.

**112** On considère les points A, B et C respectivement de coordonnées (1 ; 4), (4 ; 6) et (2 ; 3).
**1.** Quelles sont les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme ?
**2.** Prouver que ABCD est aussi un losange.

**113** On considère les points A(3 ; –2), M(0 ; 3).
Déterminer les coordonnées du point B tel que M soit le milieu du segment [AB].

**114** On considère les points H(1 ; 1) et U(4 ; –1).
Déterminer les coordonnées du point M tel que M soit le symétrique de H par rapport à U.

**115** On considère les points A(3 ; –4) et B(–1 ; 2).
Quelles sont les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$ ?

**116** On considère les points $A\left(\frac{2}{9} ; \frac{6}{25}\right)$ et $B\left(-\frac{5}{6} ; \frac{9}{20}\right)$.
Calculer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{AC} = \frac{15}{2}\overrightarrow{AB}$.

**117** On considère les points L(–2 ; 3), A(–3 ; –2) et N(–1 ; –4).
**1.** Quelles sont les coordonnées de $3\overrightarrow{LA}$ et $-2\overrightarrow{AN}$ ?
**2.** En déduire les coordonnées de $3\overrightarrow{LA} - 2\overrightarrow{AN}$.
**3.** Quelles sont les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{NG} = 3\overrightarrow{LA} - 2\overrightarrow{AN}$ ?

**118** On considère les points M(–4 ; 2), N(0 ; 3) et P(1 ; –5).
Calculer les coordonnées du point Q défini par $\overrightarrow{MQ} = -3\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PN}$.

**119** On considère les points D(–4 ; 2), E(0 ; 3) et F(1 ; –5).
Calculer les coordonnées du point G défini par $\overrightarrow{DG} = -3\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{DF}$.

**120** Esprit critique

On considère les points $J\left(\frac{5}{2} ; -1\right)$, $K\left(-1 ; -\frac{1}{2}\right)$ et $L\left(\frac{1}{2} ; 2\right)$.
Existe-t-il un point M défini par $2\overrightarrow{MJ} + 3\overrightarrow{MK} = 5\overrightarrow{ML}$ ?

**121** Vérifier un résultat

Soient les points A(3 ; –5), B(–1 ; 3) et C(1 ; 1).
**1.** Déterminer les coordonnées du point M appartenant à l'axe des ordonnées tel que les droites (AB) et (CM) soient parallèles.
**2.** Déterminer les coordonnées du point P appartenant à l'axe des abscisses tel que les points B, C et P soient alignés.

Résolution de problèmes p. 188

**122** Soient les points A(–2 ; 1), B(–1 ; 4) et C(2 ; 2). On considère les points P et Q définis par $\overrightarrow{AP} = -3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ} = -3\overrightarrow{AC}$.
1. Calculer les coordonnées des points P et Q.
2. Démontrer que les droites (BC) et (PQ) sont parallèles.

**123** Les coordonnées des points A, B et C sont respectivement (–1 ; –1,5), (–4 ; –2) et (5 ; 0).
1. Faire une figure.
2. Placer le point U tel que $\overrightarrow{CU}$ ait pour coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.
3. Que peut-on dire des droites (OU) et (AB) ? Justifier.

**124** Soient les points A(4 ; 5) B (–3 ; 4) et C (1, 1).
1. Faire la figure.
2. **a)** Calculer CA, CB, AB.
**b)** En déduire la nature du triangle ABC.
3. Trouver les coordonnées du point D tel que CBDA soit un parallélogramme.
4. Quelle est la nature de CBDA ? Pourquoi ?
5. Calculer les coordonnées de S image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
6. Calculer les coordonnées de R image de A par la symétrie de centre C.
7. Quelle est la nature du quadrilatère ABSR ? Justifier.
8. Calculer l'aire de ABSR.

**125** Soient les points A(2 ; 5), B(4 ; –2), C(–5 ; 1) et D(–1 ; 6). On définit les points I et K tels que $\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $2\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
1. Que peut-on dire des droites (BC) et (AD) ?
2. Déterminer les coordonnées des points I et K.
3. Démontrer que les points I, K et A sont alignés.

**126** Soient les points A $\left(-\frac{7}{2} ; 2\right)$, B(–2 ; 5), C $\left(5 ; \frac{13}{2}\right)$ et D $\left(3 ; \frac{5}{2}\right)$.
On définit les points I, J et K par $\overrightarrow{IA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$.
1. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
2. Déterminer les coordonnées du point I.
3. Les points I, B et C sont-ils alignés ?
4. Les points I, J et K sont-ils alignés ?

**127** Soient les points A(3 ; 7), B(8 ; 2) et C(–4 ; –2) et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
À tout réel $k$, on associe le point M défini par $\overrightarrow{CM} = k\vec{u}$.
1. Déterminer en fonction de $k$ les coordonnées du point M puis du vecteur $\overrightarrow{AM}$.
2. Comment choisir $k$ pour que le point M appartienne à la droite (AB) ?

**128** On considère les points A(–1 ; 1) et D(2 ; –3 ). **Problème ouvert**
Déterminer les coordonnées des points B et C tels que ABDC soit un losange.

**129** On considère les points A(–2 ; 1), B(6 ; 1), C(9 ; 4) et H(–2 ; 4).
1. Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
2. Démontrer que le triangle ACH est rectangle.
3. En déduire que H appartient à la droite (CD).
4. Calculer l'aire du parallélogramme ABCD.

## À chacun son rythme

**130** Soient les points A(4 ; 3), B(–3 ; 4), C(–11 ; –2), D(–4 ; –3) et E(1 ; 7) dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$ , $\vec{j}$ ).

### Énoncé A

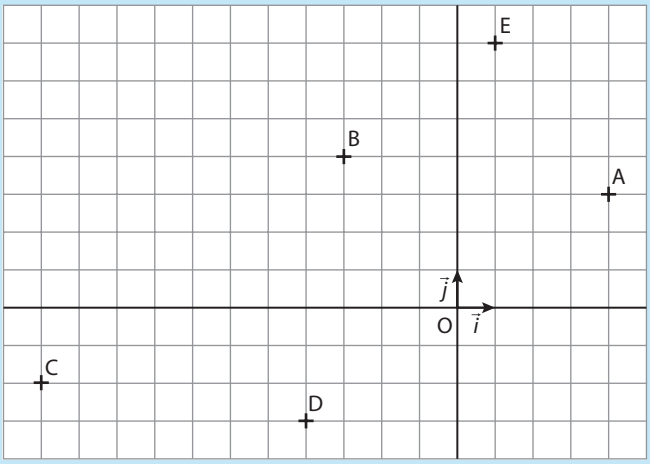
1. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
2. Calculer les coordonnées du point J, milieu de [AC]. En déduire celle du milieu de [BD].
3. Montrer que les points B, C et E sont alignés. Que peut-on déduire des droites (CE) et (AD) ?

### Énoncé B

1. Déterminer les coordonnées du point I, milieu de [BC].
2. Démontrer que le triangle BEA est un triangle rectangle isocèle en E.
3. Déterminer la nature du quadrilatère IEAD.

### Énoncé C

1. Déterminer les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{BE}$.
2. Déterminer l'aire du quadrilatère CBDF.
3. En déduire celle du quadrilatère BEAD.



# Exercices de synthèse

**Sauf mention contraire, on se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.**

## 131 Un quadrilatère particulier

On considère les points A(–2 ; 2), B(1 ; 0), C(–1 ; –3).

**1.** Déterminer les coordonnées :

**a)** du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

**b)** du centre O de ABCD.

**2.** Démontrer qu'il s'agit d'un carré.

## 132 Quatre points alignés

On donne les points suivants : A(–5 ; 2), B(2 ; 7), C(–2 ; –1).

**1.** Déterminer les coordonnées du point I, milieu de [BC].

**2.** Déterminer les coordonnées du point D image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

**3.** Soit le point E défini par $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

Déterminer les coordonnées du point E.

**4.** Soit le point H de coordonnées (–3 ; 0).

Montrer que les points D, E, I et H sont alignés.

## 133 Translation et symétrie

On considère les points suivants : A(–3 ; 1), B(1 ; –3), C(–1 ; 3).

D est le symétrique de B par rapport à A et E est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.

**1.** Faire une figure.

**2.** Quelle est la nature du triangle ABC ?

**3.** Déterminer les coordonnées du point D.

**4.** Montrer que A est le milieu de [CE].

**5.** Quelle est la nature du quadrilatère BCDE ?

## 134 Dans un carré

Soit ABCD un carré de côté 4 cm. Les points E et F sont les points définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA})$ et $\overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{CB}$.

**1.** Construire la figure en vraie grandeur.

On note $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$ et on se place dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$.

**2.** Quelle est la nature du repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$ ?

**3.** Quelles sont les coordonnées de A, B et D ?

**4. a)** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur $\overrightarrow{AD}$.

**b)** En déduire les coordonnées du point E.

**5.** Quelles sont les coordonnées du point F ?

**6.** Les points A, E et F sont-ils alignés ?

## 135 Projeté orthogonal et aire

On considère les points A(–4 ; 4), B(–2 ; 3), C(–1 ; 5) et D(–4 ; –1).

**1.** Montrer que les points D, B et C sont alignés.

**2.** Déterminer la nature du triangle ABD.

**3.** En déduire le projeté orthogonal du point A sur la droite (DC).

**4.** Déterminer l'aire du triangle ADC.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre B passant par C.

**5.** Montrer que le point A appartient à $\mathscr{C}$.

**6.** En déduire la nature du triangle ABC.

## 136 Parallèles et perpendiculaires

On donne les points : A(2 ; 5), B(–4 ; –1), C(–5 ; 6) et I(–1 ; 2).

**1.** Montrer que les droites (AB) et (CI) ne sont pas parallèles.

**2. a)** Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AI}$ et du vecteur $\overrightarrow{IB}$.

**b)** Que peut-on en déduire ?

**3.** Calculer les longueurs AC et BC.

**4.** En déduire que (CI) et (AB) sont perpendiculaires.

## 137 Médiatrice

On considère les points A(6 ; 0), B(0 ; 4) et C(1 ; –1).

K est le milieu de [AB].

**1.** Prouver que le triangle ABC est rectangle.

**2.** Déterminer $\widehat{ABC}$. Arrondir à $10^{-2}$ près.

**3.** Déterminer les coordonnées du point K.

**4.** Montrer que K appartient à la médiatrice de [OC].

**5.** Déterminer les coordonnées du point F tel que OKCF soit un losange.

## 138 Construction

On donne les points F(–1,5 ; 2), N(3,5 ; 2) et A(2,5 ; 4).

**1.** Faire une figure à compléter au fur et à mesure.

**2. a)** Tracer le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [NF].

**b)** Déterminer les coordonnées de I, son centre.

**c)** Calculer le rayon du cercle.

**3. a)** Démontrer que le cercle $\mathscr{C}$ passe par A.

**b)** Déterminer la nature du triangle FAN.

**c)** Est-ce que O appartient au cercle ? Justifier.

**4. a)** Déterminer les coordonnées B du milieu de [OA].

**b)** En déduire les coordonnées du point P tel que FOPA soit un parallélogramme.

**c)** Placer le point P.

**d)** Les points F, P et N sont-ils alignés ? Justifier.

**5. a)** Placer le point E tel que AIE soit un triangle rectangle isocèle en I et que E soit situé sous le segment [FA].

**b)** Le point E appartient-il au cercle $\mathscr{C}$ ? Pourquoi ?

**c)** Lire ses coordonnées.

**6. a)** Placer le point H symétrique de A par rapport au point I.

**b)** Le point H appartient-il à un axe du repère ? Justifier.

**c)** Quelle est la nature de FANH ?

## 139 Quadrilatères

On considère les points suivants : P(4 ; 1), $T\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$, M(–3 ; –2) et U(2 ; 3).

**1.** Déterminer les coordonnées :

**a)** de S, milieu de [MP].

**b)** de R, symétrique de T par rapport à S.

**c)** Que peut-on dire du quadrilatère PTMR ?

**2. a)** Montrer que les points M, T et U sont alignés.

**b)** En déduire que les droites (UT) et (PR) sont parallèles.

**c)** Montrer que les droites (TR) et (UP) sont parallèles.

**d)** Déterminer TP et UR.

**e)** En déduire la nature du quadrilatère TUPR.

**3.** Soit N le point défini par $\overrightarrow{TN} = \overrightarrow{MR} + 2\overrightarrow{SR}$.

**a)** Déterminer les coordonnées du point N.

**b)** Montrer que N est l'intersection des droites (UP) et (MR).

**c)** En déduire la nature du triangle MUN.

**Sauf mention contraire, on se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.**

## 140 Agrandissement et périmètre

Soient $M\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{5}\right)$, $O\left(\frac{4}{6} ; \frac{1}{4}\right)$ et $I\left(\sqrt{5} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

**1.** Déterminer les coordonnées L, Y et S milieux respectifs de [MO], [OI] et [IM].
**2.** Démontrer que $\overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{LS}$, $\overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{SY}$ et $\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{LY}$.
**3.** Déterminer le périmètre du triangle MOI.
**4.** En déduire celui du triangle LYS.

## 141 Nature d'un quadrilatère

On considère les points A(4 ; –3) et B(–1 ; –3).
**1.** Faire une figure.
**2.** Construire le point C d'ordonnée positive tel que ABC soit un triangle équilatéral.
**3.** Déterminer l'abscisse du point C.
**4.** Calculer l'ordonnée du point C.
**5.** Construire le point D, symétrique du point C par rapport à la droite (AB).
**6.** Quelle est la nature du quadrilatère ADBC ?

## 142 Coordonnées de points

**1.** Placer le point S(2 ; 1).
**2.** Construire le point T d'abscisse négative tel que le triangle SOT soit rectangle en O et que OT = 2OS.
**3.** Déterminer les coordonnées du point T.
**5.** Déterminer les coordonnées des points U et C tels que TUCS soit un losange de centre O.

## 143 Distances

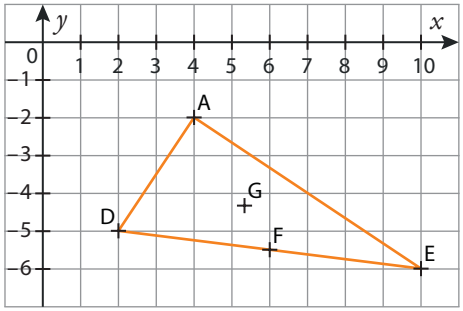
Soient A(6 ; 5) ; B(2 ; –3) et C(–4 ; 0).
**1.** Calculer les distances AB, BC et CA. Donner les résultats sous la forme $a\sqrt{5}$ où $a$ est un nombre entier positif.
**2.** En déduire la nature du triangle ABC.
**3.** Calculer l'aire du triangle ABC.
**4.** Calculer le périmètre du triangle ABC. En donner la valeur arrondie au dixième de ce résultat.
On considère le cercle circonscrit au triangle ABC.
**5.** Préciser la position du centre E de ce cercle en justifiant la réponse.
**6.** Calculer les coordonnées de ce point E.
**8.** Déterminer la valeur exacte du rayon de ce cercle.

## 144 Repère et carré

On considère un carré ABCD de côté 5 cm. I est un point à l'intérieur du carré tel que AIB soit un triangle équilatéral. V est un point situé à l'extérieur du carré tel que BCV soit un triangle équilatéral.
**1.** Construire la figure en vraie grandeur.
On note $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$ et on se place dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$.
**2.** Quelle est la nature du repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$ ?
**3.** Quelles sont les coordonnées des points A, B et D ?
**4.** Déterminer les coordonnées des points I et V.
**5.** Démontrer que les points D, I et V sont alignés.

## 145 Comparaison de deux méthodes de résolution

On donne les points suivants : A(4 ; –2), D(2 ; –5), E(10 ; –6).
On note F le milieu de [DE].
On définit le point G par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} = \vec{0}$.




**1.** Comment semblent se positionner les points A, G et F ?

### Partie A ▶ Sans coordonnées

**2.** Exprimer $\overrightarrow{GA}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
**3.** Déterminer $k$ tel que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AF}$.
**4.** Conclure.

### Partie B ▶ Avec les coordonnées

**5.** Déterminer les coordonnées des points G et F.
**6.** Montrer que $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires.
**7.** Conclure.

### Partie C ▶ Comparaison

**8.** Comparer les deux méthodes.

## 146 Repère et parallélogramme

Soit ABCD un parallélogramme.
Les points E et F sont définis par $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD}$ et $AF = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
**1.** Faire une figure.
**2.** Que peut-on conjecturer pour les points B, F et E ?
On note $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$ et on se place dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$.
**3.** Quelles sont les coordonnées des points A, B et D ?
**4.** Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
**5.** En déduire les coordonnées du point C.
**6.** Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AF}$ ?
En déduire celles du point F.
**7.** Calculer les coordonnées du point E.
**8.** Démontrer que $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires.

## 147 Choisir un repère Défi

On considère un parallélogramme OIJK. Les points A, B et C sont définis par $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.
**1.** Faire une figure.
**2.** Choisir un repère pour démontrer que les points O, G et J sont alignés.

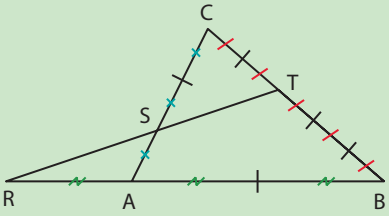
## 148 Conjecture

On considère les points A(–3 ; 0), B(5 ; –1), C(9 ; 6) et D(1 ; 7).
Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

# Vers la 1re

## 149 Vers la Spécialité Maths

On considère le triangle ABC. R est un point de (AB), S un point de (AC) et T un point de (BC).




**1.** À partir de la figure ci-contre, déterminer les valeurs des réels $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ tels que :

• $\overrightarrow{AR} = \alpha\overrightarrow{AB}$ • $\overrightarrow{AS} = \beta\overrightarrow{AC}$ • $\overrightarrow{BT} = \gamma\overrightarrow{BC}$

On se propose de démontrer que les points R, S et T sont alignés en utilisant deux méthodes.

### Partie A ▶ Méthode géométrique

**2.** Montrer que :

**a)** $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

**3.** En déduire une expression du vecteur $\overrightarrow{RT}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

**4.** Vérifier que $\overrightarrow{RS} = \frac{5}{9}\overrightarrow{RT}$. Conclure.

### Partie B ▶ Méthode analytique

On considère le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

**5.** Donner les coordonnées des points suivants : A, B, C, S et R.

**6.** Calculer les coordonnées du point T.

**7.** Montrer que les coordonnées de $\overrightarrow{ST}$ sont $\left(\frac{2}{5} ; \frac{4}{15}\right)$.

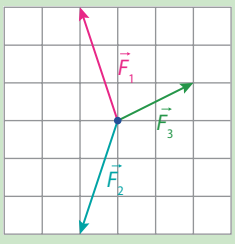
**8.** Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{SR}$ sont colinéaires. Conclure.

## 150 Vers STI2D

**Point cours**

La somme des forces extérieures appliquées à un système appelée **force résultante** est reliée à son mouvement d'après la 2e loi de Newton.

On considère un objet soumis à trois forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$. On définit un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ où O est le centre de gravité de l'objet, ici le point en bleu.



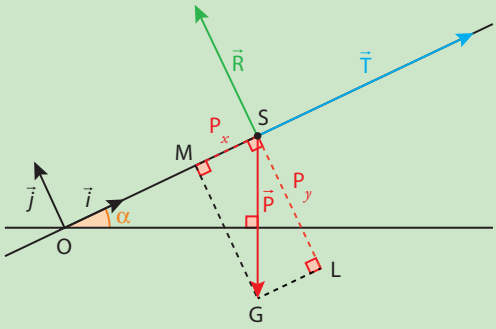

**1.** Quelles sont les coordonnées des vecteurs forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$ ?

**2.** Quelles sont les coordonnées du vecteur « somme des forces » appelée « résultante des forces » ?

**3.** L'objet est-il en équilibre ou va-t-il se déplacer ? S'il se déplace, dans quelle direction le fait-il ?

## 151 Vers STI2D

On considère un skieur assimilé à un point S sur une pente inclinée d'un angle $\alpha = 25°$ par rapport à l'horizontale sur un tire-fesse.




Il est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction du support $\vec{R}$, au frottement $\vec{f}$ (non représenté sur la figure) et à la force $\vec{T}$ du tire-fesse.

On donne :

• $m = 80$ kg

• $\|\vec{P}\| = m \times g$, avec $g$ l'intensité de pesanteur

• $g \approx 9{,}8$ N·kg$^{-1}$.

On considère le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ noté sur la figure.

**1.** Quelle est l'ordonnée du point S et du vecteur de la force résultante dans ce repère ?

**2.** Exprimer les coordonnées des vecteurs $\vec{R}$, $\vec{T}$ et $\vec{f}$ en fonction de leur norme.

**3.** Justifier que le vecteur $\vec{P}$ s'écrit $\vec{P} = P_x\,\vec{i} + P_y\,\vec{j}$.

**4.** Déterminer l'angle $\widehat{MSG}$.

**5.** Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{P}$.

**6.** En déduire les coordonnées du vecteur résultante des forces.

**7.** On considère une neige gelée. Compte tenu de la glisse du ski, la situation est assimilée à une situation sans frottement. Quelle est la valeur minimale de $\|\vec{T}\|$ pour que le skieur monte la pente ?

**8.** On considère une neige très humide. La situation est assimilée à une situation où $\|\vec{f}\| = 100$ N. Quelle est la valeur minimale de $\|\vec{T}\|$ pour que le skieur monte la pente ?

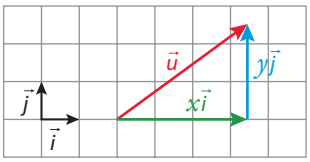
**Dans un repère orthonormé du plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.**

Objectif

## 1 Déterminer les coordonnées d'un vecteur

### Par lecture graphique

- Tout vecteur $\vec{u}$ du plan se **décompose** de manière unique sous la forme $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ où $x$ et $y$ sont deux nombres réels.




- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $(x ; y)$ est le **couple de coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

### Par le calcul

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
- Soit $k$ un nombre réel. On a :
  - $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
  - $-\vec{u}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$
  - $\vec{u} - \vec{v}\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$
  - $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Objectif

## 2 Déterminer les coordonnées d'un point

### Milieu d'un segment

Le milieu d'un segment [AB] a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

### Coordonnées d'un point défini par une égalité vectorielle

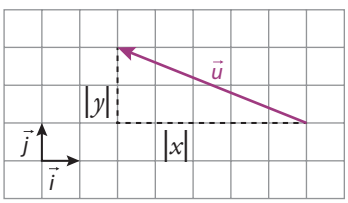
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées : $x = x'$ et $y = y'$.

Objectif

## 3 Déterminer la norme d'un vecteur

### À partir des coordonnées d'un vecteur

La norme du vecteur $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.




### À partir des coordonnées des points

La longueur du segment [AB] est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Objectif

## 4 Utiliser la colinéarité

### Déterminant

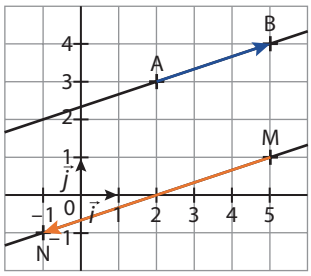
On appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le nombre $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

### Déterminant et colinéarité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

### Applications de la colinéarité

En utilisant la colinéarité de deux vecteurs, on peut démontrer que deux **droites** sont **parallèles** ou que trois **points** sont **alignés**.



**QCM INTERACTIF**
Tester ses connaissances
www.lienmini.fr/8270-19

## QCM Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

**On se place dans un repère orthonormé du plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.**

Objectif 1

### Déterminer les coordonnées d'un vecteur

Soient les points A(3 ; –6), B(–2 ; 5), D(2 ; –4), E(9 ; –5) et F(–2 ; –2).

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **152** $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : | $\begin{pmatrix}5\\-11\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-5\\11\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\-11\end{pmatrix}$ |
| **153** Le vecteur $2\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FE}$ a pour coordonnées : | $\begin{pmatrix}18\\-4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-25\\5\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}25\\-21\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}25\\-5\end{pmatrix}$ |
| **154** Quels sont les vecteurs qui ont pour coordonnées $\begin{pmatrix}-18{,}5\\30{,}5\end{pmatrix}$ ? | $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{EF}$ | $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$ | $2\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+EF$ | $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$ |

Objectif 2

### Déterminer les coordonnées d'un point

Soient A(2 ; 4), B(–2 ; 5), C(7 ; –6). Soient I le milieu de [BC], D tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ et F tel que A soit le milieu de [BF].

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **155** Les coordonnées de I sont : | (–1 ; –1) | $\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$ | (2,5 ; –5,5) | (5,5 ; –0,5) |
| **156** Les coordonnées de D sont : | (11 ; –7) | (3 ; 7) | (3 ; –5) | (–11 ; –5) |
| **157** Les coordonnées de F sont : | (–6 ; 3) | (3 ; 2) | (3 ; 6) | (6 ; 3) |

Objectif 3

### Déterminer la norme d'un vecteur

Soient les points A(3 ; –2), B(–2 ; –1), C(2 ; 6) et D(–1 ; 4), et $\mathscr{C}$ le cercle de centre D passant par A.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **158** La longueur du segment [CD] est : | $\sqrt{101}$ | $\sqrt{13}$ | $\sqrt{5}$ | 13 |
| **159** Le rayon de $\mathscr{C}$ est : | $\sqrt{52}$ | $\sqrt{338}$ | $\sqrt{8}$ | 4 |
| **160** Le triangle ABC est : | rectangle | équilatéral | isocèle | quelconque |

Objectif 4

### Utiliser la colinéarité

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$ et les points A(3 ; –2), B(2 ; 4) et C(1 ; 7).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **161** Quelles sont les paires de vecteurs qui ont un déterminant nul ? | $\vec{u}$ et $\vec{v}$ | $\vec{v}$ et $\vec{w}$ | $\vec{v}$ et $\vec{z}$ | $\vec{u}$ et $\vec{w}$ |
| **162** On peut affirmer que : | $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires | $\vec{v}$ et $\vec{z}$ sont colinéaires | $\vec{u}=-\frac{1}{2}\vec{w}$ | $\vec{z}=3\vec{u}$ |
| **163** On peut affirmer que : | A, B et C sont alignés | A, B et C ne sont pas alignés | $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$ | $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires |

↪ Corrigés p. 390

# Préparer le contrôle — Je m'entraîne

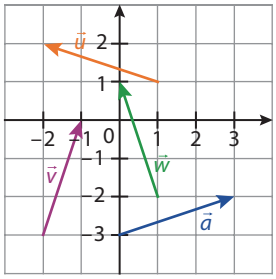
## Parcours différenciés

| | Objectif 1 | Objectif 2 | Objectif 3 | Objectif 4 |
|---|---|---|---|---|
| Parcours A | 1 3 164 | 63 167 | 5 170 | 7 174 |
| Parcours B | 56 165 | 9 111 168 | 74 171 172 | 102 175 |
| Parcours C | 166 | 115 169 | 82 173 | 105 176 |

## Exercices

### Objectif 1 Déterminer les coordonnées d'un vecteur

**164** **1.** Soient A(5 ; –1) et B(2 ; 0). Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
**2.** Quel est le vecteur de la figure ci-dessous qui a les mêmes coordonnées ?




**165** On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$.
Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$.

**166** Soient les points A(2 ; 2), B(4 ; –1) et C(4 ; –3).
Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}$.

### Objectif 2 Déterminer les coordonnées d'un point

**167** Soient B(–2 ; 3) et C(4 ; –1).
Déterminer le milieu de [BC].

**168** Soient A(–2 ; –2), B(2 ; 1) et C(1 ; –4).
Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABDC soit un parallélogramme.

**169** Soient M(6 ; 1), N(2 ; 4) et P(–1 ; –1).
Déterminer les coordonnées de Q tel que $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP}$.

### Objectif 3 Déterminer la norme d'un vecteur

**170** Soient A(–2 ; 1) et B(5 ; –7).
Déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

**171** On considère un triangle ABC tel que : A(–3 ; 1), B(4 ; 2) et C(–2 ; –6).
**1.** Montrer que le triangle ABC est rectangle.
**2.** En déduire l'aire du triangle ABC.

**172** On considère les points $P\left(-\frac{3}{2} ; 4\right)$, I(2 ; 3) et $C\left(-\frac{5}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.
On note A le milieu de [IC].
**1.** Quelle est la nature du triangle PIC ?
**2.** Montrer que les points P, I et C appartiennent au cercle de centre A de rayon AP.

**173** On considère les points R(4 ; 2), I(–2 ; –4), C(1 ; –7) et H(7 ; –1).
**1.** Quelle est la nature du quadrilatère RICH ?
**2.** Déterminer $\widehat{RIH}$.

### Objectif 4 Utiliser la colinéarité

**174** On considère les points M(–2 ; 5), N(4 ; 3), P(–1 ; 3), Q(8 ; 0) et R(5 ; 1).
**1.** Les droites (MN) et (PQ) sont-elles parallèles ?
**2.** Les points P, Q et R sont-ils alignés ?

**175** On considère les points D(0 ; 4), E(4 ; 5), F(8 ; 0) et G(0 ; –2).
Quelle est la nature du quadrilatère DEFG ?

**176** On considère les points M(2 ; 4), A($x$ ; 5), T(2 ; 1) et H(3 ; $x$ – 1) où $x$ est un réel.
Déterminer les valeurs de $x$ pour que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{TH}$ soient colinéaires.

↪ Corrigés p. 390

# Travaux pratiques

Python | 50 min | Chercher | Raisonner

## 1 Parallèles, alignés ?

On souhaite écrire un programme en langage **Python** qui indique si trois points sont alignés ou si deux droites sont parallèles.

### A ▸ Fonction « déterminant »

Dans la console Python, écrire une fonction `determinant` qui admet quatre réels en paramètres, X, Y, Z et T, correspondant aux coordonnées de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} Z \\ T \end{pmatrix}$ et qui renvoie la valeur **`det`** qui correspond à la valeur du déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

### B ▸ Fonction « Points Alignés »

On souhaite écrire une fonction `aligne` qui, à partir des coordonnées de trois points A, B et C renvoie **`true`** si les trois points sont alignés, **`false`** sinon.

**1.** Combien y-a-t-il de paramètres dans cette fonction ?

**2.** Quel est le type de la variable **`aligne`** retournée par cette fonction ?

**3.** Écrire la fonction `aligne`.

### C ▸ Fonction « Droites parallèles »

On souhaite écrire une fonction `parallele` qui, à partir des coordonnées de quatre points A, B, C et D renvoie **`true`** si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

**1.** Combien y-a-t-il de paramètres dans cette fonction ?

**2.** Quel est le type de la variable **`parallèle`** retournée par cette fonction ?

**3.** Écrire la fonction `parallèle`.

### D ▸ Un programme à partir de ces fonctions

**1.** On considère le début de programme ci-dessous.
Quelles sont les données entrées par l'utilisateur ?

```
C=int(input("tester alignement, taper 1 ; tester le parallélisme, taper 2"))
XA=float(input("Saisissez l'abscisse du point A."))
YA=float(input("Saisissez l'ordonnée du point A."))
…
if …:
     DX= …
     DY= …
…
```

**2. a)** Ouvrir le programme dans la console Python.
**b)** Compléter les pointillés de sorte qu'il permette de tester si trois points A, B et C sont alignés ou si deux droites (AB) et (CD) sont parallèles.

**CONSOLE PYTHON**
Parallèles, alignés ?
www.lienmini.fr/8270-py6

### E ▸ Généralisation Pour aller plus loin

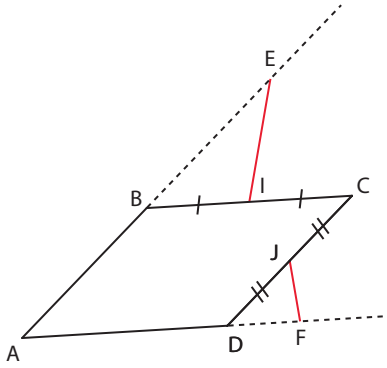
Écrire un programme qui :

- demande à l'utilisateur s'il souhaite tester des points alignés ou des droites parallèles.
- demande les coordonnées des points A, B, C et éventuellement D.
- retourne « les points A, B et C sont alignés » ou « les points A, B et C ne sont pas alignés » ou « les points … sont alignés » ou « les droites … et … sont parallèles » ou « aucune des droites possibles ne sont parallèles ».

Géométrie dynamique 50 min Chercher Raisonner

# 2 Configuration géométrique

On considère ABCD un parallélogramme, I le milieu de [BC] et J le milieu de [CD].
On place un point E sur la demi-droite [AB] et un point F sur la demi-droite [AD].
On s'intéresse à la position du point E et du point F pour que les droites (EI) et (JF) soient parallèles.




## A ▸ Rechercher la position des points

**1.** Dans un logiciel de géométrie dynamique, placer quatre points A, B, C et D tels que ABCD soit un parallélogramme.

**2.** Placer I le milieu de [BC] et J le milieu de [DC].

**3.** Placer un point E sur la demi-droite [AB] et un point F sur la demi-droite [AD].

**4.** Est-ce qu'il semble exister une position des points E et F telle que les droites (EI) et (JF) soient parallèles ?

**5.** Combien de solutions existe-t-il au problème ? Comment les déterminer ?

## B ▸ Dans un cas particulier

Soient les points A(2 ; –2), B(4 ; 1), C(9 ; 1) et D(7 ; –2).
I est le milieu de [BC] et J celui de [DC].

**1.** Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

**2.** $a$ et $b$ sont deux nombres réels et on considère les points E$(x\,;y)$ et F$(x'\,;y')$ tels que $\overrightarrow{BE} = a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = b\overrightarrow{AD}$.
**a)** Justifier l'existence de $a$ et $b$.
**b)** Montrer que $|a| = \dfrac{BE}{AB}$ et que $|b| = \dfrac{DF}{AD}$.

**3. a)** Sur une page vide d'un logiciel de géométrie dynamique, faire une figure avec les points A, B, C, D, I et J.
**b)** Créer le curseur $a$ puis le point E.
**c)** Placer le point J', image du point J par la translation de $\vec{EI}$
**d)** Placer ensuite le point F, intersection des droites (AD) et (JJ'), s'il existe.
**e)** Dans la barre de saisie, écrire $b = \dfrac{DF}{AD}$ puis conjecturer une relation entre $a$ et $b$.

**4.** Déterminer les coordonnées du point E en fonction de $a$ et les coordonnées du point F en fonction de $b$.

**5.** Exprimer les coordonnées de $\vec{EI}$ et $\vec{JF}$ en fonction de $a$ et $b$.

**6.** À quelle condition portant sur $a$ et $b$ les vecteurs $\vec{EI}$ et $\vec{JF}$ sont-ils colinéaires ?

## C ▸ Dans le cas général Pour aller plus loin

Soit ABCD un parallélogramme. I est le milieu de [BC] et J celui de [DC].
$a$ et $b$ sont deux nombres réels et on considère les points E et F tels que $\overrightarrow{BE} = a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = b\overrightarrow{AD}$.
On se place dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})$.
L'égalité $xy' - x'y = 0$ est toujours un critère de colinéarité.

**1.** Déterminer en fonction de $a$ et $b$ :
**a)** les coordonnées des points A, B, C et D.
**b)** les coordonnées des points E et F.
**c)** les coordonnées des vecteurs $\vec{IE}$ et $\vec{JF}$.

**2.** Établir une relation entre $a$ et $b$ afin que les droites (EI) et (FJ) soient parallèles.

# 7

# Droites du plan et systèmes d'équations

**Les maths au quotidien**

Une salle de spectacles propose des concerts et des ballets à prix fixes. Si on connaît le montant payé par un spectateur et le nombre de spectacles auxquels il a assisté, on peut réussir à déterminer le prix des concerts et des ballets, qui sont alors les **inconnues**. Pour cela, on peut modéliser la situation par un **système d'équations**.

# Pour prendre un bon départ

EXERCICES Sésamath
Réviser ses acquis
www.lienmini.fr/8270-s14

## 1 Coordonnées de vecteurs

Vu au chap 6

On donne les points A(1 ; –1), B(5 ; –3), C(2 ; –4) et D(4 ; 0) dans un repère.

**1.** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$.

**2.** Que peut-on en déduire pour le quadrilatère ADBC ?

**3.** Calculer les coordonnées du centre de ce quadrilatère.

## 2 Colinéarité et alignement

Vu au chap 6

On donne les points A(–2 ; –1), B(0 ; 3) et C(1 ; 5) dans un repère.

**1.** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

**2.** Que peut-on en déduire pour les points A, B et C ?

## 3 Colinéarité et parallélisme

Vu au chap 6

On donne les points A(–2 ; –3), B(0 ; 1), C(1 ; –4) et D(2 ; –2) dans un repère.

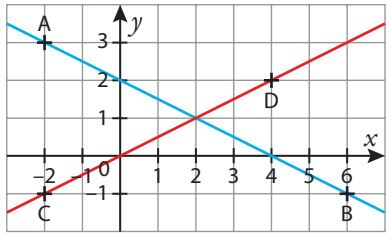
**1.** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

**2.** Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (CD) ?

## 4 Intersections

Vu au collège

On représente deux droites (AB) et (CD) ci-dessous.




**1.** Donner les coordonnées des points d'intersection de la droite (AB) avec les axes du repère.

**2.** Donner trois points à coordonnées entières appartenant à (CD).

**3.** Donner les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

## 5 Droites particulières

Vu au collège

**1.** Que peut-on dire de la droite passant par les points de coordonnées (2 ; –1), (–3 ; –1) et (5 ; –1) ?

**2.** Que peut-on dire de la droite passant par les points de coordonnées (–2 ; –1), (–2 ; 1) et (–2 ; 4) ?

## 6 Relation algébrique

Vu au chap 3

Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous sachant que : $y = -2x + 5$.

| $x$ | –1 | | $\frac{1}{3}$ | | $-\frac{3}{4}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | 2 | | $\frac{3}{2}$ | | –3 |

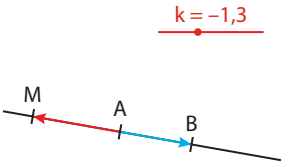
# Activités

Géométrie dynamique — 15 min

## 1 Droite et vecteur

On considère deux points A et B distincts.

**1.** Sur GeoGebra, construire une droite (AB), créer le vecteur $\overrightarrow{AB}$, un curseur $k$ dans l'intervalle [–5 ; 5] avec un incrément de 0,1 et le vecteur $k\overrightarrow{AB}$, puis son représentant d'origine A pour créer le point M.




Le point M est donc défini par $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ où $k$ est un réel que l'on appelle « paramètre ».

**2.** Pour quelle valeur de $k$ le point M est-il confondu avec le point A ?

**3.** Pour quelle valeur de $k$ le point M est-il confondu avec le point B ?

**4.** Pour quelle valeur de $k$ le point M est-il au milieu C du segment [AB] ?

**5.** Où se situent tous les points M pour lesquels :

**a)** $k$ est un réel compris entre 0 et 1 ?

**b)** $k > 1$ ?

**c)** $k < 0$ ?

**Remarque** $k$ donne la position du point M par rapport au point A qui joue le rôle d'origine et à l'aide du vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui lui s'appelle un vecteur directeur de la droite (AB).

**6.** On considère maintenant les points N tels que $\overrightarrow{BN} = h\overrightarrow{BC}$ où $h$ est un réel.

**a)** Où se situent tous les points N ?

**b)** Quelles sont alors les valeurs du paramètre $h$ correspondant aux points A, B et C ?

**c)** Dans ce cas, quel point joue le rôle de l'origine et quel est un vecteur directeur de la droite (AB) ?

↪ Cours 1 p. 180

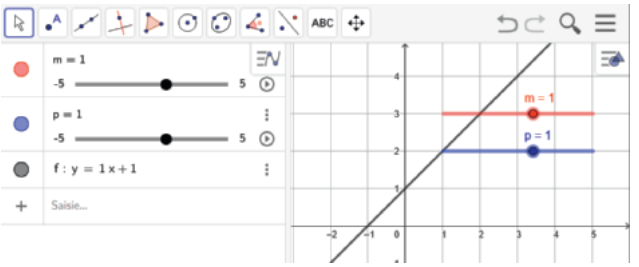
Géométrie dynamique — 10 min

## 2 Découvrir l'équation réduite d'une droite

**1.** Sur GeoGebra, créer deux curseurs $m$ et $p$, en les faisant varier de –5 à 5 avec un incrément de 0,5.

**2.** Dans la zone de saisie, taper l'équation : $y = mx + p$.

**3.** Donner l'équation de la droite qui s'affiche.




**Coup de pouce** Le logiciel trace alors une droite pour une certaine valeur de $m$ et de $p$ et son équation est écrite dans la fenêtre d'algèbre.

**4.** Faire varier la valeur de $p$ à l'aide du curseur.

**a)** Que peut-on dire de l'intersection de ces droites avec l'axe des ordonnées ?

**b)** Comment sont toutes les droites obtenues ?

**5.** Faire varier la valeur de $m$ à l'aide du curseur.

**a)** Que peut-on remarquer ?

**b)** Que se passe-t-il selon le signe de $m$ ?

↪ Cours 3 p. 182

15 min

## 3 Résoudre un système d'équations à deux inconnues par substitution

Une famille déjeune dans un restaurant argentin. Le restaurant propose des empanadas au bœuf ou végétariennes. Les adultes prennent 5 empanadas végétariennes et 1 empanada au bœuf pour un montant de 11,50 euros. Les enfants prennent 2 empanadas végétariennes et 3 empanadas au bœuf pour un montant de 12,40 euros.

On notera $x$ le prix d'une empanada végétarienne et $y$ le prix d'une empanada au bœuf.

**1.** Traduire la commande des adultes par une égalité avec les inconnues $x$ et $y$.

Une égalité avec deux inconnues s'appelle une **équation à deux inconnues**.

**2.** Donner l'équation qui traduit la commande des enfants.

On dit que $x$ et $y$ **vérifient le système** : $\begin{cases} 5x + y = 11{,}50 \\ 2x + 3y = 12{,}40 \end{cases}$.

**3.** On remarque que dans la première équation on peut isoler l'inconnue $y$ facilement.
Exprimer alors $y$ en fonction de $x$.

**4.** Remplacer alors l'inconnue $y$ dans la seconde équation.
On obtient ainsi une équation à une seule inconnue $x$.

**5.** Résoudre cette équation d'inconnue $x$.

**6.** En déduire alors la valeur de l'inconnue $y$.

**7.** Conclure en donnant le prix de chacune des deux types d'empanadas choisies.

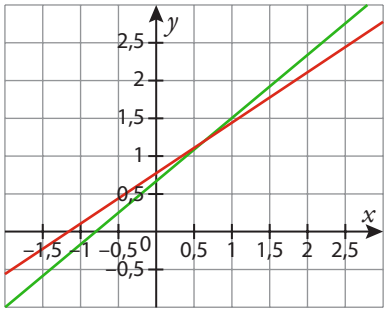
**Remarque** Pour des raisons de rigueur mathématique, quand on résout un tel système, on est obligé d'écrire dans une accolade les deux lignes à chaque étape, celle qui est modifiée et celle qui ne l'est pas.

↪ Cours 6 p. 186

15 min

## 4 Résoudre un système par combinaison

On souhaite trouver les coordonnées du point d'intersection des droites ci-contre d'équations cartésiennes $5x - 6y + 4 = 0$ et $-6x + 9y - 7 = 0$.




**1. a)** Donner les coordonnées du point d'intersection des deux droites.
**b)** Vérifier par le calcul si ce point appartient bien aux deux droites.

**2.** Donner le système vérifié par les coordonnées $(x\,;y)$ du point d'intersection de ces deux droites.

**3.** On se propose de transformer la première équation en la multipliant par 6 et de transformer la seconde équation en la multipliant par 5.
Donner le nouveau système obtenu.

**4.** En déduire alors la valeur de l'inconnue $y$ en additionnant les deux équations.

**5.** De même, déterminer par quels nombres multiplier la première équation et la seconde équation pour qu'en additionnant on puisse trouver la valeur de l'inconnue $x$.

**6.** Conclure sur les coordonnées du point d'intersection des deux droites et vérifier que ses coordonnées vérifient bien les deux équations.

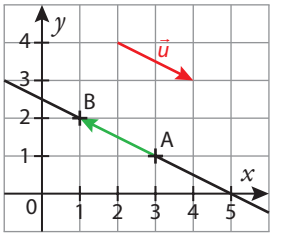
↪ Cours 6 p. 186

# 1 Vecteur directeur d'une droite

Dans tout le cours, on se place dans un repère orthonormé.

**Définition** **Vecteur directeur d'une droite**

**Soient A et B deux points distincts d'une droite *d*, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite *d*, de même que tout vecteur $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.**




**Exemple**

Soient A(3 ; 1) et B(1 ; 2), alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de la droite (AB) car $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

# 2 Équation cartésienne d'une droite

**Propriété** **Équation cartésienne d'une droite**

**Soient *a* et *b* deux réels et *d* une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.**

**Un point appartient à *d* si et seulement si ses coordonnées $(x\,;y)$ vérifient l'égalité $ax+by+c=0$ appelée équation cartésienne de la droite *d*, où *c* est une constante réelle.**

**Exemple ↪ Méthode 1** p. 181

**Démonstration**

Soient $A(x_A\,;y_A)$ un point donné de la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et $M(x\,;y)$ un point quelconque, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ donc :

$\det(\overrightarrow{AM},\vec{u})=a(x-x_A)-(-b)(y-y_A)=ax-ax_A+by-by_A=ax+by+(-ax_A-by_A)$

Le point $M(x\,;y)$ appartient à cette droite si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Soit $ax+by+(-ax_A-by_A)=0$ qui est bien de la forme $ax+by+c=0$.

**Remarques**

- Si $a=0$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\0\end{pmatrix}$ donc la droite est **horizontale**, c'est-à-dire parallèle à l'axe des abscisses, et son équation cartésienne est de la forme $y+c=0$.
- Si $b=0$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$ donc la droite est **verticale**, c'est-à-dire parallèle à l'axe des ordonnées, et son équation cartésienne est de la forme $x+c=0$.
- Une droite possède plusieurs équations cartésiennes, il suffit de multiplier tous les coefficients par un même réel.

**Propriété** **Condition d'appartenance d'un point à une droite**

**Soient *a*, *b* et *c* trois réels avec $(a\,;b)\neq(0\,;0)$.**

**L'ensemble d'équation $ax+by+c=0$ est une droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.**

**Exemple**

Le point A(–2 ; 1) appartient à la droite *d* dont une équation cartésienne est $3x+2y+4=0$ car $3x_A+2y_A+4=3\times(-2)+2\times1+4=0$ donc ses coordonnées vérifient l'équation.

Le point B(2 ; –1) n'appartient pas à *d* car $3x_B+2y_B+4=3\times2+2\times(-1)+4=8\neq0$ donc ses coordonnées ne vérifient pas l'équation et $B\notin d$.

# Exercices résolus

## Méthode 1 Déterminer une équation cartésienne d'une droite par le calcul

**Énoncé**

**Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A(–1 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.**

**Solution**

**Méthode 1 : colinéarité de deux vecteurs**

Soit un point M($x$ ; $y$) de la droite alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ce qui donne :

$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow 4(x+1) - 1(y-2) = 0$
$\Leftrightarrow 4x + 4 - y + 2 = 0$

Une équation cartésienne est donc : $4x - y + 6 = 0$. 1

**Méthode 2 : un vecteur directeur et un point**

$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur donc on a $a = 4$ et $b = -1$ et une équation cartésienne de la droite est de la forme $4x - y + c = 0$. 2

On utilise les coordonnées du point A ce qui donne : $4x_A - y_A + c = 0 \Leftrightarrow c = 6$. Une équation cartésienne est : $4x - y + 6 = 0$. 3

**Conseils & Méthodes**

1 Exprimer la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ à l'aide d'un calcul de déterminant.

2 Donner les valeurs de $a$ et $b$ à partir du vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ de la droite.

3 Pour trouver $c$ on utilise les coordonnées du point A.

### À vous de jouer !

**1** Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point A(1 ; –1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

**2** Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point A(–3 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-0\end{pmatrix}$.

↪ Exercices 51 à 59 p. 190

## Méthode 2 Représenter une droite donnée par son équation cartésienne

**Énoncé**

**Représenter dans un repère orthonormé la droite dont une équation cartésienne est $2x - 3y + 1 = 0$.**

**Solution**

**Méthode 1 : avec les coordonnées de deux points**

On prend par exemple le point A d'abscisse $x_A = 1$. 1

Alors ses coordonnées vérifient l'équation :

$2x_A - 3y_A + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \times 1 - 3y_A + 1 = 0$
$\Leftrightarrow 3 - 3y_A = 0 \Leftrightarrow y_A = 1$ donc A(1 ; 1). 2

Les coordonnées du point B d'ordonnée $y_B = 3$ vérifient :

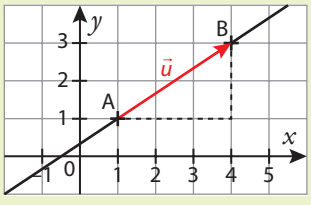
$2x_B - 3y_B + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x_B - 3 \times 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x_B - 8 = 0$
$\Leftrightarrow x_B = 4$ donc B(4 ; 3) et on trace ensuite la droite (AB).

**Méthode 2 : à partir d'un point et d'un vecteur directeur**

À partir de l'équation on a un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$. 3

Donc à partir du point A(1 ; 1) appartenant à la droite on peut tracer un représentant du vecteur $\vec{u}$. 4

On trace ensuite la droite.




**Conseils & Méthodes**

1 On cherche deux points dont les coordonnées vérifient l'équation de la droite.

2 On choisit deux abscisses (ou deux ordonnées) et on calcule les ordonnées (ou abscisses) correspondantes.

3 On donne un vecteur directeur à partir de $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et on cherche un point (↪ méthode 1).

4 On trace un représentant du vecteur.

### À vous de jouer !

**3** Dans un repère orthonormé, représenter la droite d'équation cartésienne $-4x + 5y - 1 = 0$.

**4** Dans un repère orthonormé, représenter la droite d'équation cartésienne $3x - 5y + 2 = 0$.

↪ Exercices 60 à 64 p. 191

# 3 Équation réduite d'une droite

## Propriété Équation réduite de droite

**• Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$ où $m$ s'appelle le coefficient directeur ou la pente et $p$ l'ordonnée à l'origine.**

**• Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x = k$.**

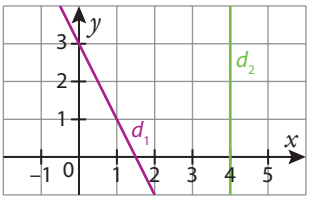
### Démonstration

Étant donné une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.

• Si $b = 0$ alors l'équation s'écrit : $x = -\dfrac{c}{a}$. • Si $b \neq 0$ alors l'équation s'écrit : $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ où $m = -\dfrac{a}{b}$ et $p = -\dfrac{c}{b}$.

### Exemple

Sur la figure ci-contre on a représenté la droite $d_1$ d'équation réduite $y = -2x + 3$ et la droite $d_2$ d'équation réduite $x = 4$.
$d_2$ est verticale et tous les points ont la même abscisse 4.




**Remarque** Toute droite admet une infinité d'équations cartésiennes mais une unique équation réduite.

## Propriété Lien avec fonction affine

**La représentation graphique d'une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ est une droite d'équation $y = mx + p$ et inversement toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.**

## Propriétés Lectures graphiques

**On considère la droite d'équation réduite $y = mx + p$.**

**• Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite.**

**• Le point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0\,;p)$.**
**C'est pour cette raison que $p$ est appelé « ordonnée à l'origine ».**

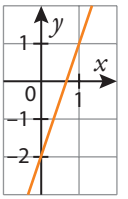
### Démonstration

• $y = mx + p \Leftrightarrow mx - y + p = 0$ donc un vecteur directeur est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.
• Si $x = 0$ alors $y = p$ et le point de coordonnées $(0\,;p)$ est sur l'axe des ordonnées.

### Exemple

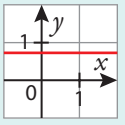
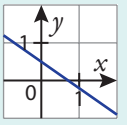
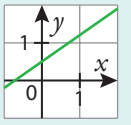
On a tracé la droite d'équation réduite $y = 3x - 2$, elle passe par le point de coordonnées $(0\,;-2)$ donc $p = -2$ et $y = 3x - 2 \Leftrightarrow 3x - y - 2 = 0$.

On constate alors que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite donc $m = 3$.




## Propriété Signe du coefficient directeur

**Soit $m$ le coefficient directeur de la droite d'équation réduite $y = mx + p$.**

| $m = 0$ | $m < 0$ | $m > 0$ |
|---|---|---|
| La droite est horizontale. | La droite « descend ». | La droite « monte ». |
|  |  |  |

# Exercices résolus

## Méthode 3 Représenter une droite donnée par son équation réduite

**Énoncé**

**Représenter dans un repère orthonormé la droite d'équation réduite $y = -\frac{2}{3}x + 2$.**

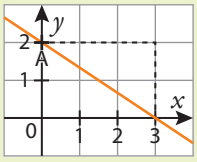
**Solution**

**Méthode 1 : à partir de deux points**

On fait un tableau de valeurs. 1

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 0 |

On prend les points (0 ; 2) et (3 ; 0) et on trace la droite passant par ces deux points.




**Méthode 2 : à partir d'un point et d'un vecteur directeur**

La droite passe par le point A(0 ; 2). L'équation s'écrit $-\frac{2}{3}x - y + 2 = 0$ donc un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ qui n'est pas simple à représenter donc on prend le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ qui lui est colinéaire. 2

On place un représentant de ce vecteur d'origine A puis on trace la droite.

**Conseils & Méthodes**

1 On prend des valeurs de $x$ et on calcule les valeurs de $y$ jusqu'à obtenir deux points à coordonnées entières.

2 On prend un point à coordonnées entières, on cherche un vecteur directeur à coordonnées entières et on place un représentant du vecteur à partir du point.

### À vous de jouer !

**5** Représenter dans un repère orthonormé la droite d'équation réduite $y = 3x + 1$.

**6** Représenter dans un repère orthonormé la droite d'équation réduite $y = \frac{5}{4}x - 2$.

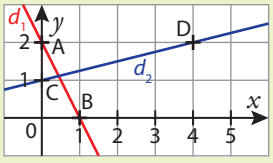
Exercices 73 à 77 p. 192

## Méthode 4 Lire graphiquement l'équation réduite d'une droite

VIDÉO ALL MATHS PARNAK
Comprendre une méthode
www.lienmini.fr/8270-21

**Énoncé**

**Donner les équations réduites des droites représentées ci-contre.**




**Solution**

Comme les droites $d_1$ et $d_2$ ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées, leur équation est de la forme $y = mx + p$.

- La droite $d_1$ passe par le point A(0 ; 2) 1 donc $p = 2$ et le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ donne $m = -2$. 2

L'équation réduite de $d_1$ est : $y = -2x + 2$.

- La droite $d_2$ passe par le point C(0 ; 1) 1 donc $p = 1$ et le vecteur directeur $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ 2 donc $m = \frac{1}{4}$ et l'équation réduite de $d_2$ est : $y = \frac{1}{4}x + 1$.

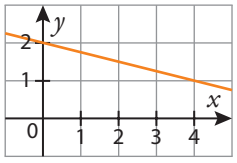
**Conseils & Méthodes**

1 On lit l'ordonnée à l'origine (0 ; $p$).

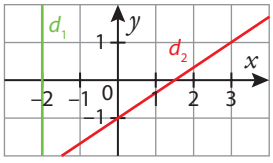
2 On prend deux points pour obtenir un vecteur directeur de la droite. Si son abscisse est 1, on lit $m$, sinon on cherche un vecteur colinéaire d'abscisse 1.

### À vous de jouer !

**7** Donner l'équation réduite de la droite représentée ci-contre.

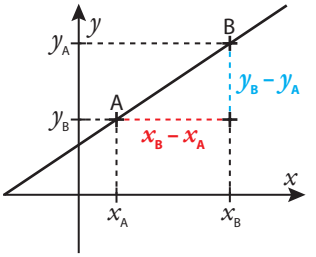



**8** Donner les équations réduites des droites représentées ci-contre.




Exercices 78 à 83 p. 192

# 4 Coefficient directeur d'une droite




**Propriété** **Coefficient directeur ou pente d'une droite**

**Le coefficient directeur ou pente de la droite (AB) avec A($x_A$ ; $y_A$) et B($x_B$ ; $y_B$) est donné par la formule, si $x_A \neq x_B$ : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.**

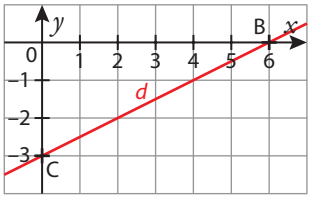
**Remarques**

- Si $x_A = x_B$, alors la droite est verticale.
- $m$ est le quotient du déplacement vertical par le déplacement horizontal pour aller d'un point de la droite à un autre point de celle-ci.

**Exemple**

La droite $d$ représentée dans le repère orthonormé ci-contre est la droite d'équation $y = 0{,}5x - 3$. On considère par ailleurs B(6 ; 0) et C(0 ; –3) appartenant à $d$. On calcule $\frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{0 - (-3)}{6 - (0)} = 0{,}5$.

Le quotient de la différence des ordonnées de deux points sur la différence de leur abscisse est égal au coefficient directeur $m = 0{,}5$.




# 5 Positions relatives de deux droites

**Propriété** **Position relative**

**Deux droites sont parallèles, éventuellement confondues, si et seulement si un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre. Dans le cas contraire les deux droites sont sécantes.**

**Propriété** **Avec des équations cartésiennes**

**Les droites $d$ et $d'$ d'équations cartésiennes $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $a$ et $b$ sont respectivement proportionnels à $a'$ et $b'$.**
**Si, de plus, $c$ et $c'$ sont également proportionnels alors elles sont confondues.**

**Démonstration**

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs des deux droites droites $d$ et $d'$.

Elles sont parallèles si et seulement si ces vecteurs sont colinéaires, c'est-à-dire si :

$\det(\vec{u}, \vec{u'}) = -a'b - (-ab') = 0 \Leftrightarrow ab' - ba' = 0 \Leftrightarrow ab' = ba' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

**Propriété** **Avec des équations réduites**

- **Les droites $d$ et $d'$ d'équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$. Si, de plus, $p = p'$ alors elles sont confondues.**
- **Les droites $d$ et $d'$ d'équations réduites $x = k$ et $x = k'$ sont toujours parallèles (confondues si $k = k'$).**
- **Les droites $d$ et $d'$ d'équations réduites $y = mx + p$ et $x = k$ sont toujours sécantes.**

**Démonstration du premier point**

Pour les équations réduites les vecteurs directeurs sont $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix}$ ce qui donne :

$\det(\vec{u}, \vec{u'}) = 1 \times m' - 1 \times m = 0 \Leftrightarrow m' - m = 0 \Leftrightarrow m = m'$

**Exemple** ↪ Méthode 6 p. 185

# Exercices résolus

## Méthode 5 Déterminer l'équation réduite d'une droite par le calcul

**Énoncé**

**Déterminer les équations réduites de la droite (AB) avec A(–1 ; –1) et B(1 ; 3) et de la droite (CD) avec C(–2 ; 3) et D(–2 ; 1).**

**Solution**

**Pour la droite (AB)**

On vérifie $x_A \neq x_B$. (1) On calcule le coefficient directeur

$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-(-1)}{1-(-1)} = \dfrac{4}{2} = 2$ (2)

donc l'équation réduite est de la forme $y = 2x + p$.

Les coordonnées du point A vérifient :

$y_A = 2x_A + p \Leftrightarrow -1 = 2 \times (-1) + p \Leftrightarrow -1 = -2 + p \Leftrightarrow p = 1$. (3) L'équation réduite de la droite (AB) est $y = 2x + 1$.

**Pour la droite (CD)**

On vérifie $x_C = x_D = -2$ (1) donc l'équation réduite de la droite (CD) est $x = -2$.

**Conseils & Méthodes**

1. On vérifie si les deux points ont la même abscisse.
2. On calcule le coefficient directeur.
3. On utilise un des deux points pour trouver l'ordonnée à l'origine.

### À vous de jouer !

**9** 1. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points A(2 ; 1) et B(–1 ; –3).
2. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points C(–2 ; –3) et D(0 ; 2).

**10** 1. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points A(3 ; –4) et B(–1 ; –5).
2. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points C(2 ; –1) et D(2 ; 4).

↪ Exercices 84 à 96 p. 193

## Méthode 6 Étudier la position relative de deux droites

**Énoncé**

**On donne les deux droites $d$ et $d'$ d'équations cartésiennes respectives $4x - 3y + 1 = 0$ et $-2x + y + 3 = 0$.**
**Déterminer la position relative de ces deux droites.**

**Solution**

**Méthode 1 : proportionnalité des constantes**

On constate que $\dfrac{4}{-2} \neq \dfrac{-3}{1}$, il n'y a pas de proportionnalité donc les droites sont sécantes en un point. (1)

**Méthode 2 : vecteurs directeurs**

Un vecteur directeur de $d$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de $d'$ est $\vec{u'}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$. (2)

On calcule leur déterminant : $\det(\vec{u}, \vec{u'}) = 3 \times (-2) - 4 \times (-1) = -2 \neq 0$. (3)

Les vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites sont sécantes en un point.

**Conseils & Méthodes**

1. On regarde la proportionnalité des constantes $a$, $b$ et $a'$, $b'$ des équations cartésiennes de $d$ et de $d'$.
2. On détermine un vecteur directeur pour chacune des deux droites.
3. On calcule le déterminant pour voir si les droites sont sécantes ou non.

### À vous de jouer !

**11** Déterminer la position relative des droites d'équations cartésiennes $4x - 2y + 3 = 0$ et $-6x + 3y - 1 = 0$.

**12** Déterminer la position relative des droites $5x + 3y - 2 = 0$ et $y = \dfrac{5}{4}x + 3$.

↪ Exercices 97 à 100 p. 193

# 6 Résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues

## Définition Système linéaire de deux équations à deux inconnues

**On dit qu'un couple $(x\,;y)$ vérifie le système de deux équations linéaires à deux inconnues** $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ **où $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$ et $c'$ sont des constantes, si ce couple vérifie les deux équations.**

### Exemple

On considère le système linéaire de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} 2x+3y-9=0 \\ -x+2y-13=0 \end{cases}$.

• Quand on remplace $x$ par $-3$ et $y$ par 5, on obtient $2\times(-3)+3\times5-9=0$ et $-(-3)+2\times5-13=0$.
Les deux égalités étant vérifiées, le couple $(-3\,;5)$ est solution du système.

• Quand on remplace $x$ par 6 et $y$ par $-1$, on obtient $2\times6+3\times(-1)-9=0$ mais $-6+2\times(-1)-13=-21\neq0$.
Au moins une des deux égalités n'est pas vérifiée donc le couple $(6\,;-1)$ n'est pas solution du système.

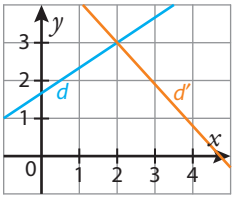
### Remarques

$ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ étant des équations de deux droites, résoudre ce système revient à trouver les coordonnées $(x\,;y)$ du point d'intersection éventuel de ces deux droites.

- Si elles sont **sécantes** le système admet **un seul couple solution.**
- Si elles sont **strictement parallèles** le système n'admet **aucune solution**.
- Si elles sont **confondues** le système a **un nombre infini de solutions**.

### Exemple

On a tracé ci-contre les droites $d$ et $d'$ d'équations respectives $2x-3y+5=0$ et $9x+8y-42=0$.




On lit graphiquement que l'unique point d'intersection de ces deux droites sécantes a pour coordonnées $(2\,;3)$.
Cela veut dire que le couple $(2\,;3)$ est l'unique solution du système linéaire de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} 2x-3y+5=0 \\ 9x+8y-42=0 \end{cases}$.
On peut vérifier cela en remplaçant $x$ par 2 et $y$ par 3 dans les deux équations.

## Règle Résolution d'un système par substitution

**Cette méthode consiste à isoler une inconnue à partir d'une équation et à la remplacer dans l'autre équation afin d'obtenir une nouvelle équation avec une seule inconnue.**
**On résout alors cette nouvelle équation puis on remplace l'inconnue trouvée dans la première équation afin de trouver la seconde inconnue.**

Exemple ↪ Méthode 7 p. 187

### Remarque

Cette méthode présente l'inconvénient que si la résolution de la première équation est fausse alors celle de la seconde le sera également.

## Règle Résolution par combinaison

**Cette méthode consiste à multiplier les deux équations par des nombres de telle manière qu'en additionnant les équations membre à membre, une inconnue s'élimine. Ainsi, il n'y a plus qu'à résoudre une équation à une seule inconnue. Pour trouver la seconde inconnue, on peut renouveler la même méthode pour éviter l'inconvénient de la méthode précédente.**

Exemple ↪ Méthode 8 p. 187

# Exercices résolus

## Méthode 7 Résoudre un système par la méthode de substitution

**Énoncé**

**Résoudre le système $\begin{cases} 4x - 3y + 1 = 0 \\ -2x + y + 3 = 0 \end{cases}$ par substitution.**

**Solution**

$\frac{4}{-2} \neq \frac{-3}{1}$ donc les droites d'équations $4x - 3y + 1 = 0$ et $-2x + y + 3 = 0$ sont sécantes et le système n'admet qu'une solution. (1)

On isole $y$ dans la seconde équation ce qui donne :

$\begin{cases} 4x - 3y + 1 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ (2)

On remplace $y$ par $2x - 3$ dans la première équation : (3)

$\begin{cases} 4x - 3(2x - 3) + 1 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 10 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ (4)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \times 5 - 3 = 7 \end{cases}$ (5)

Donc la solution est le point de coordonnées (5 ; 7).

**Conseils & Méthodes**

1. On détermine le nombre de solutions (↪ méthode 5 p. 185).
2. On repère un $x$ ou un $y$ isolé.
3. On remplace cette inconnue dans la seconde équation.
4. On obtient une équation avec une seule inconnue que l'on résout.
5. On remplace à nouveau.

**À vous de jouer !**

**13** Résoudre le système $\begin{cases} -x + 3y + 5 = 0 \\ 2x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$ par substitution.

**14** Résoudre le système $\begin{cases} -4x + 5y + 1 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases}$ par substitution.

↪ Exercices 101 à 105 p. 193

## Méthode 8 Résoudre un système par la méthode de combinaison

**Énoncé**

**Résoudre le système $\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 & (L_1) \\ -2x + 4y = 3 & (L_2) \end{cases}$, constitué des lignes $L_1$ et $L_2$, par combinaison.**

**Solution**

Pour les droites $d$ et $d'$ d'équations $3x - 2y + 1 = 0$ et $-2x + 4y = 3$, on constate que $\frac{3}{-2} \neq \frac{-2}{4}$ donc comme les constantes ne sont pas proportionnelles alors les droites $d$ et $d'$ sont sécantes et le système admet une unique solution. (1)

Pour éliminer l'inconnue $x$, on calcule $2L_1 + 3L_2$ (2) ce qui donne

$2(3x - 2y + 1) + 3(-2x + 4y) = 2 \times 0 + 3 \times 3 \Leftrightarrow 8y + 2 = 9 \Leftrightarrow y = \frac{7}{8}$.

De même pour éliminer l'inconnue $y$, on calcule $2L_1 + L_2$ ce qui donne

$2(3x - 2y + 1) + (-2x + 4y) = 2 \times 0 + 3 \Leftrightarrow 4x + 2 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$. (3) (4)

Donc la solution est le point de coordonnées $\left(\frac{1}{4} ; \frac{7}{8}\right)$.

**Conseils & Méthodes**

1. On détermine le nombre de solutions (↪ méthode 6 p. 185).
2. On observe par quelles valeurs multiplier les équations afin d'éliminer une inconnue en les additionnant.
3. On fait de même pour l'autre inconnue.
4. On peut aussi remplacer la première inconnue trouvée dans une des deux équations pour trouver l'autre inconnue.

**À vous de jouer !**

**15** Résoudre le système $\begin{cases} 4x - 3y + 1 = 0 \\ -2x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$ par combinaison.

**16** Résoudre le système $\begin{cases} 6x + 2y - 1 = 0 \\ -3x + 8y - 2 = 0 \end{cases}$ par combinaison.

↪ Exercices 106 à 109 p. 194

# Exercices résolution de problèmes

## J'apprends à vérifier un résultat

**Réflexe 1**
Vérifier que la solution n'est pas aberrante.

**Réflexe 2**
Vérifier que la solution est cohérente avec le problème posé.

**Réflexe 3**
Si cela est possible, faire une vérification numérique.

### Énoncé

Joshua collectionne deux types de cartes : les cartes des footballeurs de la ligue 1 (cartes A) et les cartes des footballeurs de la coupe du monde (cartes B). Chaque semaine, Joshua achète le même nombre de paquets de cartes A à 5,20 € et de paquets de cartes B à 6,50 € pour un total de 57,20 €.
Après la coupe du monde, l'éditeur applique une réduction : le paquet A coûte 4,80 € et le paquet B coûte 5,60 €. Joshua paye alors 51,20 €. On note $x$ le nombre de paquets de cartes A et $y$ le nombre de paquets de cartes B.
Déterminer $x$ et $y$ parmi les réponses proposées ci-dessous :
**a)** $x = 26$ et $y = 35$. **b)** $x = 1$ et $y = 5$. **c)** $x = 6$ et $y = 4$. **d)** $x = 6$ et $y = -4$.

### Solution

**Étape 1** La solution $x = 6$ et $y = -4$ n'est pas adaptée car je recherche un nombre de paquets donc un nombre positif. J'exclus ces valeurs aberrantes. **Réflexe 1**

La solution peut éventuellement être de $x = 26$ et $y = 35$ mais elle est incohérente avec le contexte puisque cela dépasserait largement le total de 57,20 €. **Réflexe 2**

**Étape 2** Je peux :

• modéliser la situation par un système d'équation et le résoudre (↪ Résolution de problèmes p. 80), mais il n'aura alors servi à rien d'exclure les réponses **a** et **d**

• tester l'une des deux solutions restantes en choisissant celle qui entraîne des calculs plus simples ou un calcul d'ordre de grandeur.

*Brouillon*

Pour $x = 1$ et $y = 5$ on a pour la première semaine : $5{,}2 \times 1 + 6{,}5 \times 5 = 37{,}7$. **Réflexe 3**

La réponse **b** est donc fausse. Je peux vérifier que la réponse **c** est bonne, mais ce n'est pas utile.

*Réponse rédigée*

La bonne réponse est la c. Joshua achète 6 paquets de cartes A et 4 paquets de cartes B chaque semaine.

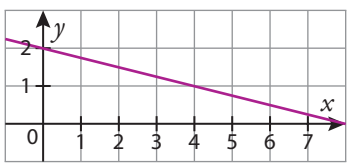
## Je m'entraîne à vérifier un résultat

### 17 Résolution par substitution

Deux amis vont dans un café. Le premier prend un café et 3 croissants pour 7,5 euros. Le second prend 3 cafés et 4 croissants pour 12,5 euros.
Déterminer les prix $x$ d'un café et $y$ d'un croissant :
**a)** $x = 7$ et $y = 3$. **b)** $x = 1{,}5$ et $y = 2$.
**c)** $x = 2$ et $y = 4$. **d)** $x = -4$ et $y = -2$.

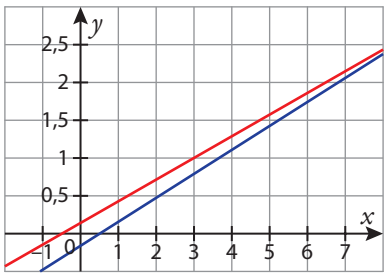
### 18 Résolution par lecture graphique

Déterminer $m$ et $p$ parmi ces propositions :
**a)** $m = \frac{1}{4}$ et $p = 2$.
**b)** $m = 4$ et $p = 1$.
**c)** $m = -\frac{1}{4}$ et $p = 2$.
**d)** $m = -4$ et $p = 4$.




### 19 Intersection de droites

On considère deux droites d'équations cartésiennes respectives $-2x + 7y - 1 = 0$ et $6x - 19y - 3 = 0$ représentées dans le repère ci-dessous.




Déterminer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites, parmi les réponses proposées :
**a)** (–10 ; 3) **b)** (3 ; 1) **c)** (–3 ; –1) **d)** (10 ; 3)

**CARTES FLASH**
Acquérir des automatismes
www.lienmini.fr/8270-6

# Exercices automatismes

## Rituel 1

### Effectuer mentalement des calculs simples avec des fractions

**20** Calculer $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}$.

**21** Calculer $2-\frac{7}{8}$.

### Calculer des aires et des volumes

**22** Calculer le volume d'un cône dont la base a un rayon de 6 cm et de hauteur 10 cm, en fonction de π.

**23** Calculer l'aire d'un cylindre de hauteur 12 cm et dont la base a un rayon de 5 cm, en fonction de π.

## Rituel 2

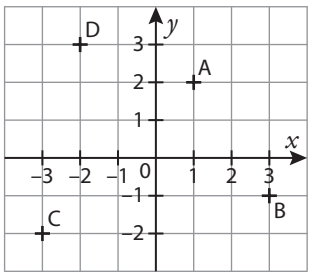
### Résoudre une équation du premier degré

**24** Résoudre l'équation : $2x+3=-3x+5$.

**25** Résoudre l'équation : $5-3x=4x-2$.

### Repérer un point dans le plan

Pour les exercices suivants on utilise la figure ci-dessous.




**26** Donner les coordonnées des points A et B dans le repère orthonormé.

**27** Donner les coordonnées des points C et D dans le repère orthonormé.

## Rituel 3

### Utiliser un ordre de grandeur pour contrôler un résultat

**28** Le résultat du calcul suivant vous paraît-il cohérent ?
$485 \times 163 = 79\,055$

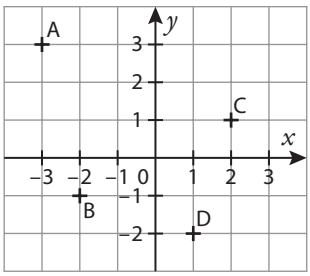
**29** Donner un ordre de grandeur sous forme d'une écriture scientifique du calcul suivant :
$5\,679 \times 0{,}48 \times 12\,341$.

### Effectuer une application numérique d'une formule mathématique

**30** On donne la formule de l'aire d'une boule $4\pi R^2$. Combien vaut, en fonction de π, l'aire d'une boule de rayon 7 ?

### Repérer un point dans le plan

Pour les exercices suivants on utilise la figure ci-dessous.




**31** Donner les coordonnées des points A et B dans le repère orthonormé.

**32** Donner les coordonnées des points C et D dans le repère orthonormé.

## Rituel 4

### Effectuer mentalement des calculs simples avec des fractions

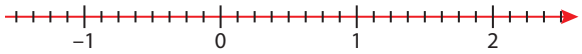
**33** Calculer $\frac{15}{14}\times\frac{7}{5}$.

### Effectuer une application numérique d'une formule mathématique

**34** On donne la relation d'Euler pour un solide : F + S = A + 2 où F est le nombre de faces, S le nombre de sommets et A le nombre d'arêtes. Combien un icosaèdre qui a 12 sommets et 20 faces a-t-il d'arêtes ?

### Repérer un nombre rationnel sur une droite graduée

Pour les exercices suivants, on considère la droite graduée ci-dessous. Reproduire la droite.



**35** Placer le nombre $\frac{3}{2}$ sur la droite graduée.

**36** Placer le nombre $-\frac{7}{8}$ sur la droite graduée.

↪ Travaillez les méthodes des automatismes p. 8

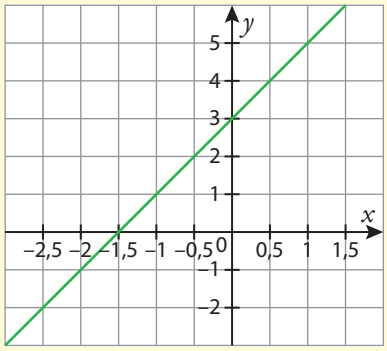
# Exercices d'entraînement

**Dans tous les exercices, on se place dans un repère orthonormé.**

## Je consolide mes acquis

### 37 Lecture graphique

La fonction affine $h$ définie par $h(x) = 2x + 3$ est représentée dans le repère ci-dessous.




**1.** Lire graphiquement les images de –2, de 0 et de 1.
**2.** Lire graphiquement les antécédents de 3, de 1 et de 5.

### 38 Images

À l'aide de la fonction affine $f$ définie par $f(x) = 5x - 1$, calculer les images suivantes :

**a)** $f(-3)$ **b)** $f\left(\frac{1}{3}\right)$ **c)** $f\left(-\frac{3}{4}\right)$ **d)** $f(2)$

### 39 Antécédents

À l'aide de la fonction affine $g$ définie par : $g(x) = -4x + 5$, calculer les antécédents de :

**a)** 2 **b)** –4

**c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $-\frac{5}{3}$

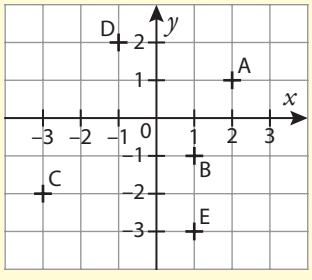
### 40 Équations

Résoudre les équations suivantes :

**a)** $2x - 5 = 5x + 1$
**b)** $-3x - 4 = x + 2$
**c)** $7x - 3 = 1 + 3x$
**d)** $\frac{2}{3}x + 1 = -3x + \frac{5}{4}$

### 41 Coordonnées

Sur la figure ci-dessous, lire les coordonnées des points A, B, C, D et E dans le repère.




## Questions de cours

**42** **1.** Une droite admet-elle une ou plusieurs équations réduites ?
**2.** Une droite admet-elle une ou plusieurs équations cartésiennes ?

**43** Dans une équation réduite donnée sous la forme $y = mx + p$, comment nomme-t-on les réels $m$ et $p$ ?

**44** Comment fait-on pour lire graphiquement la valeur du coefficient directeur d'une droite ?

**45** Comment déterminer la position relative de deux droites ?

**46** Comment résoudre un système de deux équations à deux inconnues ?

## Équation cartésienne

**47** On donne une équation cartésienne de la droite $d : x - 3y + 7 = 0$.
**1.** Le point C(–3 ; 1) appartient-il à cette droite ?
**2.** Déterminer l'ordonnée du point D d'abscisse $\frac{5}{3}$ qui appartient à la droite $d$.
**3.** Déterminer l'abscisse du point E d'ordonnée $-\frac{3}{2}$ qui appartient à la droite $d$.
**4.** Donner un vecteur directeur de cette droite.

**48** Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite d'équation cartésienne $2x - 6y + 3 = 0$ avec les deux axes du repère orthonormé.

**49** On considère la droite d'équation cartésienne $-5x + 2y - 3 = 0$.
**1.** Le point E de coordonnées (2 ; –3) appartient-il à la droite ?
**2.** Déterminer l'abscisse du point F de la droite d'ordonnée –1.
**3.** Déterminer l'ordonnée du point G de la droite d'abscisse 1.
**4.** Donner un vecteur directeur de cette droite.

**50** On considère la droite d'équation cartésienne $3x - 5y - 2 = 0$.
**1.** Déterminer les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des abscisses.
**2.** Déterminer les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des ordonnées

## Détermination d'une équation cartésienne de droite

Méthode 1 p. 181

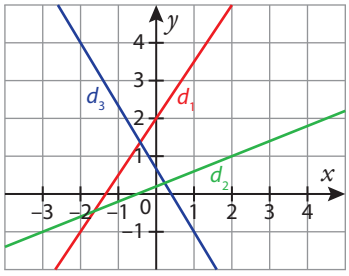
**51** Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point A(–1 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$.

**52** Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par l'origine du repère et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

**53** Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point H(–2 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.

**54** Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point M(1 ; –3) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$.

**55** Pour chacune des droites représentées, donner un vecteur directeur, un point et une équation cartésienne.




**56** Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) avec A(–1 ; 3) et B(2 ; –1).

**57** Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points :
**a)** C(0 ; 5) et D(3 ; –2). **b)** S(–2 ; –3) et V(0 ; 3).

**58** On considère le carré ABCD tel que A(0 ; 0) et B(2 ; 0). Déterminer une équation cartésienne de la droite (BD) par le calcul.

**59** Justifier que le programme suivant, écrit en langage **Python**, donne une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite (AB) passant par des points A et B donnés. Python

```
xA=float(input("xA ="))
yA=float(input("yA ="))
xB=float(input("xB ="))
yB=float(input("yB ="))
a=yB-yA
b=xA-xB
c=-xA*yB+xB*yA
print("a =",a)
print("b =",b)
print("c =",c)
```

## Représentation graphique d'une droite donnée par une équation cartésienne

Méthode 2 p. 181

**60** Représenter la droite d'équation cartésienne $-4x + 3y + 2 = 0$.

**61** Représenter les droites d'équations cartésiennes :
**a)** $3x + 2y - 1 = 0$ **b)** $\frac{3}{2}x - y + 1 = 0$
**c)** $x - 4 = 0$ **d)** $3x - 2y = 0$

**62** Représenter les droites d'équations cartésiennes :
**a)** $-4x + y = -3$ **b)** $x - 3y + 1 = 0$
**c)** $-2x + 3y = 5$ **d)** $-\frac{1}{3}x + 2y = -1$

**63** Représenter la droite passant par le point A(–2 ; 3) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.

**64** Représenter la droite passant par le point B(3 ; –1) et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

## Équation réduite

**65** On considère la droite d'équation réduite $y = -2x + 1$.
1. Le point A de coordonnées (1 ; 2) appartient-il à la droite ?
2. Déterminer l'abscisse du point de la droite d'ordonnée –1.
3. Déterminer l'ordonnée du point de la droite d'abscisse –3.

**66** On considère la droite d'équation réduite $y = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$.
1. Le point B de coordonnées (2 ; –2) appartient-il à la droite ?
2. Déterminer l'abscisse du point de la droite d'ordonnée 2.
3. Déterminer l'ordonnée du point de la droite d'abscisse –2.

**67** On considère la droite d'équation réduite $y = -3x + 5$.
1. Quelle est la valeur de son coefficient directeur $m$ ?
2. Quelle est la valeur de son ordonnée à l'origine $p$ ?

**68** On considère la droite d'équation réduite $y = \frac{5}{4}x - \frac{2}{3}$.
1. Quelle est la valeur de son coefficient directeur $m$ ?
2. Quelle est la valeur de son ordonnée à l'origine $p$ ?

**69** On considère la droite d'équation cartésienne $6x - 3y + 5 = 0$.
Donner son équation réduite.

**70** On considère la droite d'équation cartésienne $2x + 7y - 1 = 0$.
1. Donner son équation réduite.
2. Quelle est la valeur de son coefficient directeur $m$ ?
3. Quelle est la valeur de son ordonnée à l'origine $p$ ?

**71** On considère la formule donnant l'aire d'un cylindre $\mathcal{A} = 2\pi rh$. Exprimer la hauteur $h$ en fonction de $\mathcal{A}$ et de $r$.

**72** Soit la formule donnant la vitesse $v$ en fonction de la distance $d$ et du temps $t$ : $v = \frac{d}{t}$. Physique
Exprimer le temps $t$ en fonction de $v$ et de $d$.

## Représentation graphique d'une droite donnée par une équation réduite

Méthode 3 p. 183

**73** Dans un repère orthonormé, représenter la droite d'équation réduite $y = 5x - 3$.

**74** Dans un repère orthonormé, représenter les droites d'équations réduites :

**a)** $y = \frac{5}{4}x + 2$ **b)** $y = 2$

**75** Dans un repère orthonormé, représenter les droites d'équations réduites :

**a)** $y = \frac{7}{3}x - 1$ **b)** $x = -3$

**76** On considère la droite d'équation cartésienne $2x - 3y + 1 = 0$.

**1.** Donner son équation réduite.

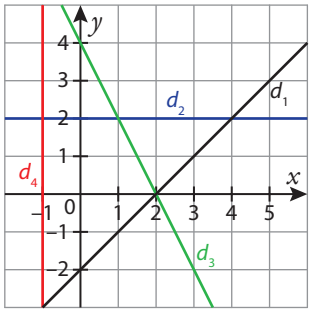
**2.** La représenter.

**77** Même exercice que le **76** avec la droite d'équation cartésienne $3x + 5y + 2 = 0$.

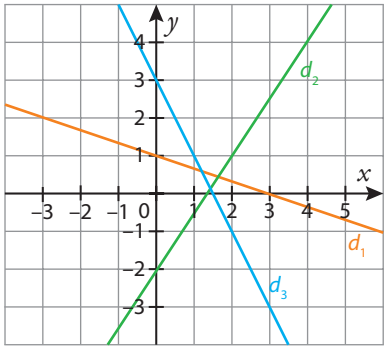
## Détermination graphique de l'équation réduite d'une droite

Méthode 4 p. 183

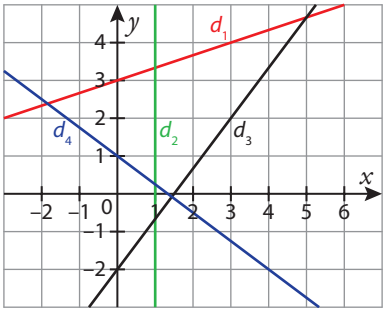
**78** Pour chacune des droites représentées ci-dessous, lire graphiquement son équation réduite.



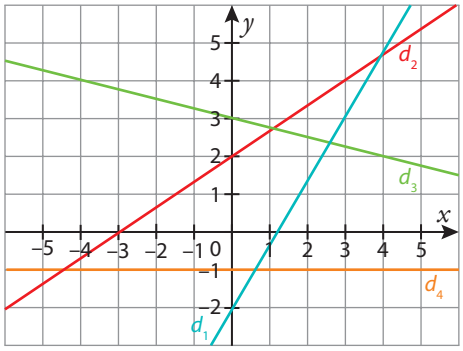

**79** Même exercice que le **78** avec les droites suivantes.



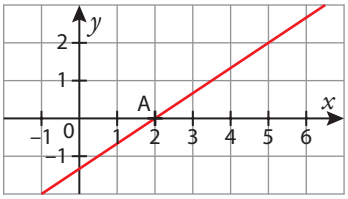

**80** Même exercice que le **78** avec les droites suivantes.




**81** Même exercice que le **78** avec les droites suivantes.




**82** On considère la droite $d$ représentée dans le repère ci-dessous.



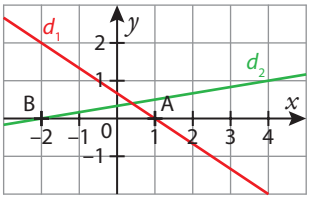

**1.** Donner graphiquement les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite $d$ d'abscisse 3.

**2.** En déduire les coordonnées d'un vecteur directeur d'abscisse 1 et d'un autre d'abscisse –2.

**3.** En partant du point A(2 ; 0) et en se déplaçant de –2 horizontalement et de $-\frac{4}{3}$ verticalement on trouve le point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées. En déduire la valeur de $p$.

**4.** Donner l'équation réduite de la droite $d$.

**83** En utilisant la même méthode que l'exercice précédent, donner les équations réduites des droites $d_1$ et $d_2$ représentées dans le repère ci-dessous.



## Détermination de l'équation réduite d'une droite par le calcul

Méthode 5 p. 185

**84** Calculer le coefficient directeur de la droite (AB) passant par les points A(2 ; –1) et B(–3 ; 2).

**85** Même exercice que le précédent avec les points M(–3 ; 4) et N(–2 ; –1).

**86** Par le calcul, trouver l'équation réduite de la droite (GH) passant par les points G(–2 ; 5) et H(4 ; –1).

**87** Même exercice que le **86** avec les points :
**a)** C(5 ; 0) et D(1 ; –2). **b)** E(–2 ; 1) et F(3 ; 1).

**88** Même exercice que le **86** avec les points :
**a)** G(2 ; –1) et H(–2 ; –1). **b)** K(2 ; –3) et L(–1 ; –4).

**89** Même exercice que le **86** avec les points :
**a)** R(–3 ; 1) et S(–3 ; –2). **b)** M(–2 ; –1) et N(1 ; 3).

**90** Même exercice que le **86** avec les points P(1 ; –4) et R(1 ; –3).

**91** Par le calcul, trouver l'équation réduite de la droite de coefficient directeur –2 et passant par le point N(1 ; 4).

**92** Même exercice que le **91** avec la droite :
**a)** de coefficient directeur $-\frac{1}{3}$ et passant par le point A(–1 ; –2).
**b)** de coefficient directeur $\frac{3}{4}$ et passant par le point B(2 ; –3).

**93** Déterminer l'équation réduite de la droite passant par le point C(–2 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

**94** Déterminer l'équation réduite de la droite passant par le point D(3 ; –1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.

**95** On considère le triangle ABC rectangle en A et tel que : AC = 2AB, A(0 ; 0) et B(3 ; 0).
Déterminer l'équation réduite de la droite (BC) par le calcul.

**96** Que fait l'algorithme, écrit en langage **Python**, suivant ?

Python

```
xA=float(input("xA ="))
yA=float(input("yA ="))
xB=float(input("xB ="))
yB=float(input("yB ="))
if xA==xB:
    print("La droite est parallèle à l'axe
    des ordonnées.")
else:
    m=(yB-yA)/(xB-xA)
    print("Le coefficient directeur
    de la droite est :",m)
```

## Position relative de droites

Méthode 6 p. 185

**97** Donner un vecteur directeur de chacune des droites et en déduire leur position relative.
**a)** $d_1 : 3x - 2y + 7 = 0$ et $d_2 : 2x + y - 5 = 0$.
**b)** $d_3 : x - 3y + 2 = 0$ et $d_4 : -2x + 6y = 4$.

**98** Même exercice que le précédent avec :
**a)** $d_1 : -3x + 2y = 0$ et $d_2 : 6x - 4y + 1 = 0$.
**b)** $d_3 : -3y + 1 = 0$ et $d_4 : 2x + 3 = 0$.

**99** Donner les positions relatives des droites $d$ et $d'$ :
**a)** $d : y = -3x + 1$ et $d' : y = \frac{1}{3}x - 1$.
**b)** $d : y = \frac{2}{3}x + 2$ et $d' : x = 2$.
**c)** $d : 4x - 3y + 2 = 0$ et $d' : x = -1$.
**d)** $d : x = 3$ et $d' : x = -2$.

**100** On considère la droite d'équation réduite $y = \frac{2}{3}x - 1$ et la droite d'équation cartésienne $3x + 2y - 1 = 0$.
Étudier leur position relative avec deux méthodes :
**a)** les coefficients directeurs ou la proportionnalité des constantes.
**b)** des vecteurs directeurs.

## Résolution d'un système par substitution

Méthode 7 p. 187

**101** Résoudre le système suivant par substitution :

$$\begin{cases} -2x + y - 1 = 0 \\ 3x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

**102** **Vérifier un résultat**
Résoudre les systèmes suivants par substitution :

**a)** $\begin{cases} -x + 3y - 4 = 0 \\ -2x + 5y - 1 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ -5x - y - 2 = 0 \end{cases}$

↳ Résolution de problèmes p. 188

**103** Résoudre les systèmes suivants par substitution :

**a)** $\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ -3x + 6y + 1 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -2x + 5y = 0 \end{cases}$

**104** Résoudre les systèmes suivants par substitution :

**a)** $\begin{cases} 5x - 3y = -1 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = -2x - 1 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$

**105** Résoudre les systèmes suivants par substitution :

**a)** $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 1 \\ y = -\frac{3}{4}x + 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2,4x + y - 1,5 = 0 \\ -4,2x - 2y + 2,5 = 0 \end{cases}$

# Exercices d'entraînement

## Résolution d'un système par combinaison

Méthode 8 p. 187

**106** Résoudre le système suivant par combinaison :

$\begin{cases} -2x+3y-1=0 \\ 3x-4y+2=0 \end{cases}$

**107** Résoudre les systèmes suivants par combinaison :

**a)** $\begin{cases} -2x+5y-1=0 \\ 3x-4y+2=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -4x+7y-1=0 \\ 3x-4y+2=0 \end{cases}$

**108** Résoudre les systèmes suivants par combinaison :

**a)** $\begin{cases} 4x-2y-6=0 \\ -2x+y+3=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -3x+2y=1 \\ 2x+4y=-1 \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ -4x+2y=0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} -5x+3y=1 \\ 3x+4y=1 \end{cases}$

**109** Résoudre les systèmes suivants par combinaison :

**a)** $\begin{cases} 4x-3y+2=0 \\ -6x+2y-3=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x+5y+2=0 \\ -2x+2y-3=0 \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} 5x-2y+3=0 \\ -6x+3y-1=0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x-y+2=0 \\ -6x+3y-1=0 \end{cases}$

## Résolution d'un système

**110** Résoudre les systèmes suivants par la méthode la plus adaptée.

**a)** $\begin{cases} -3x+4y=1 \\ 2x-5y=-2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x-3y=-2 \\ 2x-5y=3 \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} -3x+y=-1 \\ 2x-3y=-2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} -3x+2y=1 \\ 3x-2y=-2 \end{cases}$

**111** Résoudre les systèmes suivants par la méthode de son choix (ou la plus adaptée).

**a)** $\begin{cases} -5x+4y=-1 \\ 3x-5y=2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x-y=-2 \\ 2x-7y=-3 \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} -3x+2y=-1 \\ 6x-4y=2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} -x+y=1 \\ x-2y=-2 \end{cases}$

**112** Déterminer par le calcul l'intersection des deux droites dont les équations sont données dans chacun des cas suivants.

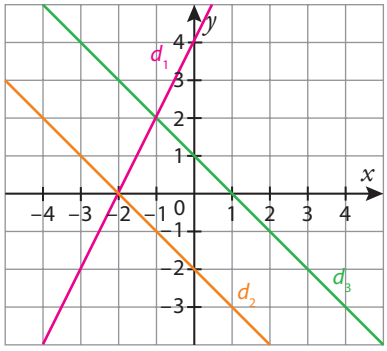
**a)** $-2x+3y+1=0$ et $4x-3y-2=0$.

**b)** $3x-2y-1=0$ et $-x-3y+3=0$.

**c)** $-x+y-1=0$ et $3x-3y+2=0$.

**d)** $-2x+y-1=0$ et $6x-3y+3=0$.

**113** À l'aide de la représentation graphique ci-contre, donner les solutions des systèmes suivants.

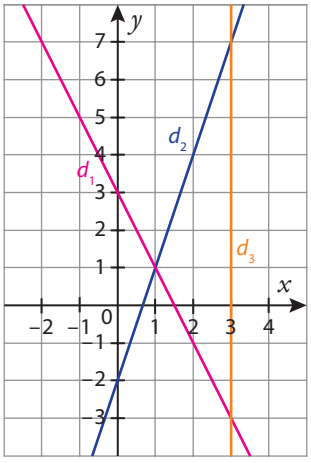



**a)** $\begin{cases} y=2x+4 \\ y=-x+1 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} y=-x-2 \\ y=-x+1 \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} y=2x+4 \\ y=-x-2 \end{cases}$

**114** À l'aide de la représentation graphique ci-contre, donner les solutions des systèmes suivants.

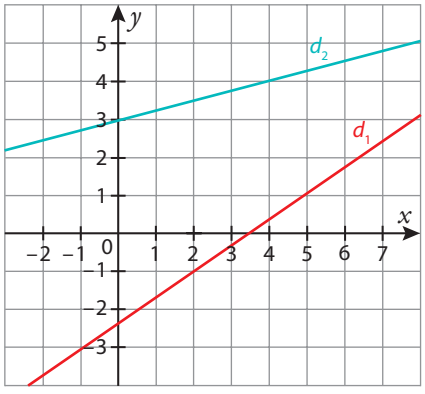



**a)** $\begin{cases} y=-2x+3 \\ y=3x-2 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} y=3x-2 \\ x=3 \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} y=-2x+3 \\ x=3 \end{cases}$

**115** À partir du graphique ci-dessous :
**a)** déterminer des équations des deux droites.
**b)** calculer les coordonnées de leur point d'intersection.




**116** Dans chacun des cas suivants, déterminer la position relative des droites (AB) et (CD) et préciser les coordonnées de leur point d'intersection quand il existe.
**a)** A(4 ; 1), B(5 ; 7), C(2 ; –6) et D(4 ; 6).
**b)** A(25 ; 40), B(15 ; 30), C(–20 ; –30) et D(40 ; 30).
**c)** A(462 ; –70), B(177 ; 14), C(88 ; 312) et D(86 ; 222).

**117** Dans chacun des cas suivants, déterminer si la droite (AB) est parallèle à la droite $d$.
**a)** A(5 ; –10), B(7 ; –2) et $d$ d'équation $4x-y+5=0$.
**b)** A(91 ; –280), B(277 ; 830) et $d$ d'équation $6x-y-2=0$.
**c)** A(0 ; 1), B(3 ; 1) et $d$ d'équation $6y-4x+1=0$.

**118** Margaux possède dans son porte-monnaie 20 pièces. Certaines valent 2 € et d'autres 1 €. À l'aide de toutes ses pièces, elle offre un cadeau à sa mère valant 36 €. Combien de pièces de chaque sorte Margaux a-t-elle dans son porte-monnaie ? On appellera $x$ le nombre de pièces de 2 € et $y$ le nombre de pièces de 1 €.

**119** Esprit critique — Développement durable

Une boulangerie reçoit une facture d'électricité en février 2023 de 1 206,54 €. Le détail de la facture montre une consommation de 2 166 kWh pendant les heures creuses et de 4 691 kWh pendant les heures pleines. En mars 2023, la facture s'élève à 689,57 € pour une consommation de 2 484 kWh en heures creuses et de 1 629 kWh en heures pleines.

1. Déterminer le prix du kWh en heures creuses et pleines.
2. Dans le contrat d'électricité de la boulangerie en 2023, le prix du kWh des heures creuses était de 0,1470 € et celui des heures pleines de 0,1841 €. Proposer une hypothèse pour expliquer la différence entre le prix réel des kWh et les résultats trouvés à la question précédente.

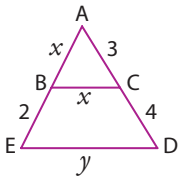
**120** Choisir le bon schéma

Soit un rectangle de longueur L et de largeur $\ell$ mesurées en mètres. *(D'après Brevet)*

1. Donner son aire en fonction de L et de $\ell$.
2. On sait que si on augmente sa longueur de 9 m et que si l'on diminue sa largeur de 3 m, l'aire de ce rectangle est inchangée. Traduire cette affirmation par une relation entre L et $\ell$. On notera (1) le résultat obtenu.
3. On sait que si on diminue sa longueur de 7 m et si l'on augmente sa largeur de 4 m, l'aire de ce rectangle est inchangée. Traduire cette affirmation par une relation entre L et $\ell$. On notera (2) le résultat obtenu.
4. **a)** En résolvant le système de deux équations (1) et (2), trouver la largeur et la longueur de ce rectangle.
**b)** Calculer son aire.

↪ Résolution de problèmes p. 298

**121** Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle isocèle en B et (BC) est parallèle à (DE). Déterminer les longueurs des segments [BC] et [DE].




**122** Parmi les quatre systèmes ci-dessous, déterminer celui qui permettra de résoudre le problème suivant :
« À la sortie du musée, Camille achète trois posters et deux stylos en souvenir. Elle paie 23 €. Anouk achète deux posters et cinq stylos. Elle paie 23,4 €. Quel est le prix d'un poster ? d'un stylo ? »

**a)** $\begin{cases} 3x+2y=23 \\ x-3y=0,4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+5y=23 \\ 3x+2y=23,4 \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} 3x+2y=23 \\ 2x+5y=23,4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+4y=23 \\ 5x+7y=46,4 \end{cases}$

**123** Modéliser une situation

Un bijou est composé d'un alliage d'or et d'or blanc. Il pèse 2,868 g pour un volume de 0,148 $cm^3$. 1 $cm^3$ d'or pèse 19,5 g et 1 $cm^3$ d'or blanc pèse 19,3 g. Calculer le volume d'or et le volume d'or blanc de ce bijou.

↪ Résolution de problèmes p. 80

**124** Maxence dit à son cousin Thomas : « Cette année j'ai le double de ton âge ». Thomas répond à Maxence : « Dans douze ans la somme de nos âges sera le double de celle de cette année ». Déterminer l'âge de Maxence et de Thomas.

**125** Pauline et Yann cherchent deux nombres vérifiant les deux conditions suivantes :
- « la différence entre le triple du premier et le double du deuxième vaut 50 » ;
- « la somme du double du premier et le septuple du deuxième vaut 125 ».

Déterminer ces deux nombres.

## À chacun son rythme

**126** Soient A(–3 ; 1), B(1 ; 3), C(3 ; –3), D(–2 ; 5), E(–4 ; 4) et F(7 ; 1) dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

**Énoncé A**

1. Déterminer les équations réduites de (AE) et (BD).
2. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection M.

**Énoncé B**

1. Déterminer des équations cartésiennes de (DE) et (CF).
2. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection N.

**Énoncé C**

Les droites (AD), (BC) et (EF) sont-elles concourantes ?

# Exercices de synthèse

## 127 Équations cartésiennes

Dans un repère orthonormé (O ; I, J), on considère les points A(–3 ; 5), B(9 ; 2) et C(2 ; 0).

**1.** Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

**2.** Montrer que le point C n'appartient pas à la droite (AB).

**3.** Déterminer une équation cartésienne de la droite $d$ passant par le point C et de coefficient directeur $\frac{7}{2}$.

**4.** Déterminer les coordonnées du point d'intersection M des droites (AB) et $d$.

**5.** Déterminer l'abscisse du point d'intersection P de la droite (AB) avec l'axe des abscisses.

## 128 Équations réduites

Dans un repère orthonormé (O ; I, J), on considère les points A(6 ; 2), B(–2 ; 4) et C(–1 ; 2).

**1.** Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

**2.** Montrer que le point C n'appartient pas à la droite (AB).

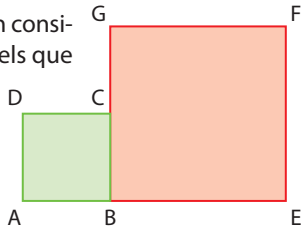
**3.** Déterminer l'équation réduite de la droite $d$ passant par le point C et de coefficient directeur $\frac{1}{3}$.

**4.** Déterminer les coordonnées du point d'intersection M des droites (AB) et $d$.

**5.** Déterminer l'abscisse du point d'intersection P de la droite $d$ avec l'axe des ordonnées.

## 129 Point de concours

Dans un repère orthonormé, on considère les carrés ABCD et BEFG tels que A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(1 ; 1) et E(3 ; 0), comme ci-contre.




**1.** Déterminer des équations réduites des droites (AG) et (CE).

**2.** Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de ces deux droites.

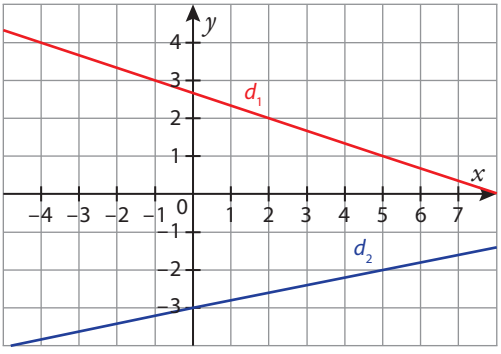
**3.** Déterminer l'équation réduite de la droite (DF).

**4.** Montrer que le point K appartient à la droite (DF).

**5.** Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (DF) et (AB).

## 130 Où est le point ?

On considère la figure ci-dessous où le point d'intersection des droites a disparu.




**1.** Déterminer les équations des deux droites.

**2.** Résoudre le système pour trouver les coordonnées du point d'intersection.

## 131 Ciné film

Pour une sortie au cinéma, les 35 élèves d'une classe doivent payer 7 euros s'ils utilisent la réduction de leur carte région, ou 11 euros sinon. Leur professeur récupère la somme de 305 euros pour sa classe.

On note $x$ le nombre d'élèves qui ont utilisé leur réduction et $y$ le nombre d'élèves qui ne l'ont pas utilisée.

Déterminer combien d'élèves ont utilisé leur carte et combien ne l'ont pas utilisée.

## 132 Critère du choix

Pour son anniversaire, Gaëlle a eu un bon d'achat de 400 euros à utiliser dans sa salle de spectacles préférée. La programmation prévoit 20 concerts à 16 euros l'unité et 40 ballets à 12 euros l'unité.

On notera $x$ le nombre de concerts et $y$ le nombre de ballets auxquels elle assistera.

Gaëlle veut dépenser l'intégralité de son bon d'achat.

**1.** Donner l'équation que vérifient $x$ et $y$ si Gaëlle dépense tout son bon d'achat.

**2.** Pourrait-elle ne choisir que des concerts ou que des ballets ?

**3.** N'arrivant pas à se décider, Gaëlle décide d'aller à autant de concerts que de ballets. Démontrer par le calcul que cela n'est pas possible.

**4.** Elle décide donc de choisir deux fois plus de ballets que de concerts. Quel sera donc son choix ?

**133** Déterminer deux entiers dont la différence est 8 et dont la somme est 36.

**134** Déterminer deux entiers dont la différence est 7 et dont la différence de leurs carrés est 21.

## 135 Point fixe

On considère un segment [AB] et un point C n'appartenant pas à [AB]. On prend A(0 ; 0), B(1 ; 0) et C($a$ ; $b$) où $a$ et $b$ sont des réels quelconques.

**1.** Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{CA}$.

**2.** Déterminer les coordonnées du point D et du point K milieu du segment [BD], en fonction de $a$ et $b$.

**3.** Déterminer une équation cartésienne de la droite (CK), en fonction de $a$ et $b$.

**4.** Déterminer les coordonnées du point d'intersection M des droites (CK) et (AB), en fonction de $a$ et $b$.

**5.** Quelle remarque peut-on faire sur ce point M si on modifie le point C ?

## 136 Position

Démo

On considère le carré ABCD de côté 1 et un point M($x$ ; $y$) quelconque, intérieur ou extérieur au carré. On projette ce point M en un point H sur (AB) et en un point K sur (BC).

**1.** Dans le repère orthonormé (A ; B, D), donner les coordonnées des points H et K en fonction de $x$ et de $y$.

**2.** Démontrer que les aires des triangles AMB et BMC sont égales si et seulement si $(x-1)^2 = y^2$.

**3.** En déduire quelles sont les positions possibles du point M pour que ces deux aires soient égales.

## 137 Croisements

Deux villes A et B sont distantes de 40 km. À 10 h, une automobiliste part de A et arrive en B à 10 h 30. Elle fait alors une pause d'une heure puis retourne en A à la même vitesse qu'à l'aller. À 10 h 15, un cycliste part de B vers A à une vitesse de 20 km/h sans s'arrêter. Les mouvements sont supposés uniformes.

**1.** Représenter la situation sur un graphique avec le temps en abscisse et la distance en ordonnée.

**2.** Déterminer les équations des trois segments de droites représentant le trajet de l'automobiliste.

**3.** Déterminer une équation du segment de droite représentant le trajet du cycliste.

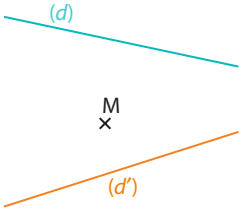
**4.** Déterminer graphiquement le nombre de fois où le cycliste et l'automobiliste se croisent.

**5.** Déterminer précisément par le calcul le lieu et l'heure de ce(s) croisement(s).

## 138 Intersection inaccessible

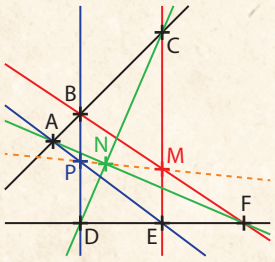
Défi

Est-il possible de tracer la droite qui passe par le point M donné et par le point d'intersection O des deux droites ($d$) et ($d'$) (sans prolonger les droites) ?




## 139 Théorème de Pappus

Histoire des sciences




On considère les droites d'équations réduites $y = x$ et $y = -3$. On place sur la première droite les points A, B et C d'abscisses respectives 0, 1 et 4. Puis sur la seconde droite on place les points D, E et F d'abscisses respectives 1, 4 et 7.

**1.** Déterminer des équations cartésiennes des droites (BF) et (CE).

**2.** Déterminer les coordonnées du point d'intersection M des droites (BF) et (CE).

**3.** Déterminer des équations cartésiennes des droites (AF) et (CD).

**4.** Déterminer les coordonnées du point d'intersection N des droites (AF) et (CD).

**5.** Déterminer des équations cartésiennes des droites (AE) et (BD).

**6.** Déterminer les coordonnées du point d'intersection P des droites (AE) et (BD).

**7.** Démontrer que les points M, N et P sont alignés.

**Remarque** Cette propriété est vraie quelle que soit la position des points A, B et C sur une droite et des points D, E et F sur une autre droite.

## 140 Côtés d'un triangle

On considère un triangle ABC rectangle en C tel que : AB = 6, AC = $b$ et BC = $a$.

**1.** Sachant que son aire vaut 8,64 cm$^2$, en déduire la valeur du produit $ab$.

**2.** Combien vaut $a^2 + b^2$ ?

**3.** En déduire les valeurs de $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$.

**4.** En déduire les valeurs de $a+b$ et de $a-b$.

**5.** Quelles sont les longueurs des côtés AC et BC ?

## 141 Vente privée ou soldes

Pour les soldes, des amis partent faire des achats dans les magasins. Ils achètent dans un même magasin deux pantalons et une veste pour 120 euros. Plusieurs mois plus tard, ils sont invités pour une vente privée avec des réductions de 50 % sur les pantalons et de 30 % pour les vestes. Ils en profitent et achètent six pantalons et deux vestes pour 174 euros.

On note $x$ le prix d'un pantalon et $y$ le prix d'une veste.

**1.** Donner l'équation correspondant aux achats pendant les soldes.

**2.** Donner celle correspondant à la vente privée.

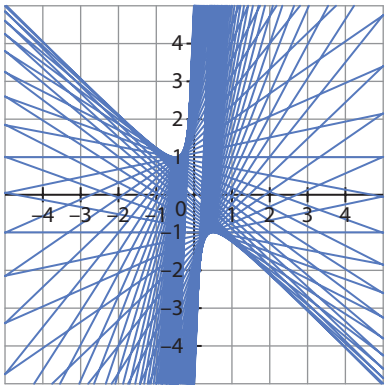
**3.** En déduire le prix d'un pantalon et celui d'une veste.

**4.** Quelle économie ont-ils fait à cette vente privée ?

# Exercices d'approfondissement

## 142 Famille de droites

On considère l'ensemble des droites définies par : $(m^2 - 1)x - y + m = 0$ où $m$ est un réel qui varie.



**1.** On étudie d'abord des cas particuliers.
Que se passe-t-il pour :
**a)** $m = 0$ ?
**b)** $m = 1$ ?
**c)** $m = -1$ ?
**2.** Donner un vecteur directeur de ces droites.
**3.** Peut-on obtenir pour certaines valeurs de $m$ des droites horizontales ou des droites verticales ?
**4.** On prend deux valeurs distinctes $m$ et $n$ pour deux droites de cette famille. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection en fonction de $m$ et $n$.

## 143 Au concert

Une salle de concerts a vendu un certain nombre de places $n$. On aurait placé 400 personnes de plus si le prix $p$ avait été réduit de 10 €, mais cela aurait rapporté 8 000 € de moins.
On aurait placé 200 personnes de moins si le prix $p$ avait été augmenté de 10 €, et cela aurait rapporté 6 000 € de plus.
**1.** Exprimer en fonction de $n$ et de $p$ la recette de la salle.
**2.** Donner les deux équations traduisant les deux phrases de l'énoncé.
**3.** Déterminer alors le nombre de places $n$ vendues et le prix $p$ d'une place.

## 144 Hyperbole et fractions

On considère la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et deux points A et B d'abscisses respectives $a$ et $b$ strictement positives appartenant à sa représentation graphique.
**1.** Donner les coordonnées des points A et B.
**2.** Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) en fonction de $a$ et de $b$.
**3.** Déterminer les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec les deux axes du repère.
**4.** En déduire qu'il n'existe pas deux entiers distincts tels que $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$.

# Vers la 1re

## 145 Vers la Spécialité Maths

On considère un carré ABCD de coté 1, un triangle équilatéral ABE à l'intérieur du carré et un triangle équilatéral BCF à l'extérieur du carré.
On utilise le repère (A ; B, D).
**1.** Montrer que les coordonnées de E et de F sont : $E\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $F\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$.
**2.** On veut montrer l'alignement des points D, E et F par plusieurs méthodes.
**a)** Démontrer par le calcul vectoriel.
**b)** Déterminer une équation de la droite (DE), puis vérifier que le point F appartient à (DE).
**c)** Déterminer les angles des triangles ADE, BEF, puis CDE. Conclure.

## 146 Vers la Spécialité Maths

On place un point M($a$ ; $b$) sur le cercle de centre O et de rayon 1 dans un repère orthonormé (O ; I, J).
**1.** Déterminer l'équation réduite de la droite (OM) en fonction de $a$ et de $b$.

**Point cours**

Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs vaut –1.

**2.** En déduire l'équation de la droite perpendiculaire à (OM) passant par M. Cette droite est la tangente au cercle en M.
**3.** Déterminer les coordonnées des points d'intersection de cette tangente avec les axes de coordonnées en fonction de $a$ et de $b$.

## 147 Vers STI

Deux particules $\alpha$ et $\beta$ sont animées respectivement d'un vecteur vitesse $\vec{v}_A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_B\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.
On suppose qu'à l'instant $t = 0$ elles sont respectivement en A(5 ; 4) et en B(–1 ; 7).
On définit la droite $d_A$ par l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{v}_A$ et la droite $d_B$ par l'ensemble des points N tels que $\overrightarrow{BN} = t\vec{v}_B$ où $t$ est un réel correspondant au temps.
**1.** Déterminer les coordonnées des points M et N en fonction de $t$.
**2.** Les deux particules rentrent en collision s'il existe une valeur de $t$ pour laquelle les points M et N sont confondus. Déterminer si c'est le cas ici et si oui, expliciter l'endroit et l'heure de la collision.

**CARTES FLASH**
Mémoriser le cours
www.lienmini.fr/8270-2

Objectif
## 1 Utiliser une équation de droite

### Tracé d'une droite

- **Méthode 1 :** on cherche deux points dont les coordonnées vérifient l'équation de la droite. On place ces points puis on trace la droite.
- **Méthode 2 :** on cherche un vecteur directeur et un point dont les coordonnées vérifient l'équation de la droite. On place le point et un représentant du vecteur directeur ayant comme origine ce point, puis on trace la droite.

**Remarque** On essaye de prendre des points et des vecteurs à coordonnées entières.

### Position relative de deux droites

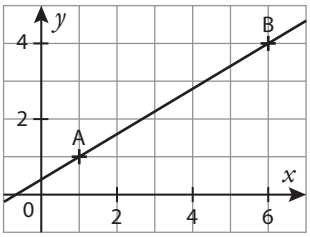
- Pour déterminer une position relative de droites on peut utiliser leurs vecteurs directeurs et on étudie leur colinéarité.
- On peut aussi utiliser le fait que les droites d'équations cartésiennes $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $a$ et $b$ sont proportionnels à $a'$ et $b'$.
- Les droites d'équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$.

Objectif
## 2 Déterminer graphiquement une équation de droite

### Équation cartésienne $ax + by + c = 0$

On cherche graphiquement les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Puis on calcule la constante $c$ à l'aide d'un point.




Pour le vecteur directeur comme pour le point on essaie de prendre des coordonnées entières.

### Équation réduite $y = mx + p$

- On détermine l'**ordonnée à l'origine $p$** avec le point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.
- On détermine le **coefficient directeur $m$** en déterminant les coordonnées entières d'un vecteur directeur, puis le vecteur colinéaire de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

Objectif
## 3 Déterminer une équation de droite par le calcul

### Équation cartésienne $ax + by + c = 0$

- **Méthode 1 :** un point M$(x\,;y)$ appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$.
- **Méthode 2 :** la droite passant par A et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ a pour équation $ax + by + c = 0$ et on détermine $c$ à l'aide des coordonnées du point A.

### Équation réduite $y = mx + p$

On calcule le coefficient directeur $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ à l'aide de deux points A et B, et on utilise un des deux points pour calculer l'ordonnée à l'origine $p$.

Objectif
## 4 Résoudre un système linéaire

Résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues équivaut à trouver les coordonnées du point d'intersection de deux droites.

### Par substitution

On exprime une inconnue en fonction de l'autre à l'aide d'une équation, puis on remplace dans l'autre équation. On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue, puis on remplace pour trouver la seconde inconnue.

### Par combinaison

On multiplie les deux équations de manière à ce qu'en les ajoutant une inconnue disparaisse. On résout l'équation alors obtenue.

**QCM INTERACTIF**
Tester ses connaissances
www.lienmini.fr/8270-22

## QCM Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

Objectif 1

### 1 Utiliser une équation de droite

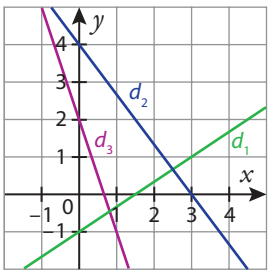
**On considère la droite d'équation cartésienne $3x - 2y + 4 = 0$.**

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **148** Le point d'abscisse 2 a pour ordonnée : | 0 | $-5$ | 5 | $-1$ |
| **149** Le point d'ordonnée $-1$ a pour abscisse : | 2 | $-2$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| **150** Le coefficient directeur est : | $-\frac{3}{2}$ | 3 | $-2$ | $\frac{3}{2}$ |
| **151** Un vecteur directeur a pour coordonnées : | $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ |

Objectif 2

### 2 Déterminer graphiquement une équation de droite

**Dans chacun des cas, déterminer graphiquement l'équation réduite ou une équation cartésienne de chacune des droites en couleur.**




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **152** La droite $d_1$ en vert : | $y = \frac{2}{3}x - 1$ | $y = -\frac{2}{3}x - 1$ | $3x - 2y - 2 = 0$ | $y = -\frac{3}{2}x - 1$ |
| **153** La droite $d_2$ en bleu : | $y = 4x - \frac{4}{3}$ | $y = -\frac{3}{4}x + 4$ | $y = -\frac{4}{3}x + 4$ | $y = \frac{4}{3}x + 4$ |
| **154** La droite $d_3$ en rouge : | $3x - y + 2 = 0$ | $-2x + y + 3 = 0$ | $x + 3y - 2 = 0$ | $-3x - y + 2 = 0$ |

Objectif 3

### 3 Déterminer une équation de droite par le calcul

**Déterminer une équation cartésienne ou l'équation réduite de la droite passant par les deux points donnés.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **155** A(2 ; $-1$) et B($-3$ ; 1) : | $2x + 5y + 1 = 0$ | $5x - 2y - 7 = 0$ | $2x - 5y = 0$ | $5x + 2y - 6 = 0$ |
| **156** C(3 ; $-1$) et D(2 ; 1) : | $2x - y - 7 = 0$ | $x - 2y - 5 = 0$ | $2x + y - 5 = 0$ | $-x + 2y + 5 = 0$ |
| **157** G($-2$ ; 3) et H($-2$ ; $-1$) : | $y = x - 2$ | $x = -2$ | $y = -2x$ | $y = -2$ |

Objectif 4

### 4 Résoudre un système linéaire

**Déterminer l'intersection des deux droites données $d$ et $d'$ dans chacun des cas.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **158** $d : x + y = 2$ et $d' : 2x - 3y = -1$ | ($-1$ ; $-1$) | ($-1$ ; 1) | (1 ; $-1$) | (1 ; 1) |
| **159** $d : -3x + 4y = 2$ et $d' : 2x - 5y = -6$ | ($-2$ ; $-2$) | (2 ; 2) | (1 ; 2) | (2 ; 1) |
| **160** $d : y = 5x - 3$ et $d' : -3x + 4y = 5$ | (1 ; 2) | (2 ; 1) | ($-2$ ; $-1$) | ($-1$ ; $-2$) |

↪ Corrigés p. 390

# Préparer le contrôle — Je m'entraîne

## Parcours différenciés

| | Objectif 1 | Objectif 2 | Objectif 3 | Objectif 4 |
|---|---|---|---|---|
| Parcours A | 11 161 | 7 164 | 1 9 167 168 | 13 15 171 |
| Parcours B | 97 162 | 78 165 | 56 86 169 | 101 106 172 173 |
| Parcours C | 97 163 | 78 166 | 56 86 169 | 101 106 174 |

## Exercices

### Objectif 1 Utiliser une équation de droite

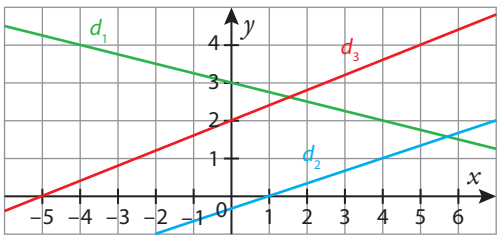
**161** Déterminer l'ordonnée du point d'abscisse 2 qui appartient à la droite d'équation cartésienne $-3x + 2y - 1 = 0$.

**162** Donner le coefficient directeur de la droite d'équation cartésienne $5x - 3y + 2 = 0$.

**163** Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite d'équation réduite $y = \frac{3}{4}x - 2$ avec les deux axes.

### Objectif 2 Déterminer graphiquement une équation de droite

Pour les exercices **164** à **166**, on considère les droites représentées dans le repère ci-dessous.




**164** Déterminer graphiquement l'équation réduite de la droite $d_1$ représentée ci-dessus.

**165** **1.** Donner graphiquement les coordonnées entières d'un vecteur directeur et d'un point de la droite $d_2$ représentée ci-dessus.
**2.** En déduire une équation cartésienne de cette droite.

**166** Déterminer graphiquement l'équation réduite de la droite $d_3$ représentée ci-dessus.

### Objectif 3 Déterminer une équation de droite par le calcul

**167** Déterminer l'équation réduite de la droite passant par A(−2 ; 2) et de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

**168** Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points M(4 ; −2) et N(4 ; 3).

**169** Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points :
**a)** A(−5 ; 1) et B(−3 ; 5). **b)** C(−3 ; 2) et D(1 ; −3).

**170** Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points :
**a)** $E\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{3}\right)$ et $F\left(-\frac{3}{4};\frac{5}{3}\right)$. **b)** $H\left(-\frac{3}{2};\frac{2}{5}\right)$ et $K\left(\frac{1}{3};-\frac{3}{5}\right)$.

### Objectif 4 Résoudre un système linéaire

**171** Soit le système $\begin{cases} 5x + y = 1 \\ -2x + 4y = -3 \end{cases}$.
**1.** Montrer que les deux droites d'équations $5x + y = 1$ et $-2x + 4y = -3$ se coupent.
**2.** Résoudre le système par substitution.
**3.** Interpréter le résultat obtenu.

**172** Résoudre le système $\begin{cases} -3x + 5y = 1 \\ 5x + 7y = -2 \end{cases}$ par combinaison.

**173** Déterminer le point d'intersection des droites d'équations respectives $y = \frac{2}{7}x - 2$ et $-7x + 5y + 1 = 0$.

**174** Pour sa rentrée, un professeur achète 5 stylos et 3 cahiers pour 10,30 €. Après un trimestre, il achète 3 stylos et 4 cahiers pour 10,80 €.
Quels sont les prix d'un stylo et d'un cahier ?

↪ Corrigés p. 390

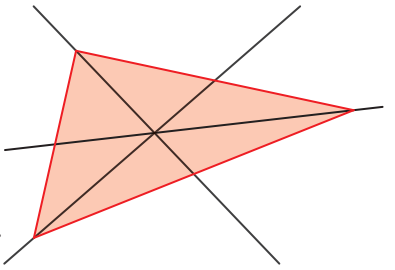
# Travaux pratiques

Géométrie dynamique — 20 min — Chercher — Calculer

## 1 Centre de gravité d'un triangle

On considère les points A(3 ; 5), B(–1 ; 1) et C(3 ; –1) dans un repère orthonormé.

### A ▸ Avec un logiciel de géométrie dynamique



**1.** Placer les points A, B et C.

**2.** Placer les milieux D et E des segments [AC] et [BC] respectivement.

**3.** Tracer les droites (AE) et (BD).

**4.** Construire leur point d'intersection G.

**5.** Tracer la droite (CG) et vérifier qu'elle coupe le segment [AB] en son milieu F.

**6.** Faire afficher les longueurs GB et GD, GA et GE, GC et GF.

**7.** Donner la relation entre ces longueurs deux à deux.

### B ▸ Par le calcul

**1.** Donner les coordonnées des milieux D et E.

**2.** Déterminer par le calcul une équation de la droite (AE).

**3.** De même, déterminer par le calcul une équation de la droite (BD).

**4.** Déterminer par le calcul les coordonnées de G.

**5.** Déterminer des équations des droites (CG) et (AB).

**6.** Déterminer par le calcul l'intersection F des droites (CG) et (AB).

**7.** Vérifier que le point F est le milieu du segment [AB].

**8.** Calculer les longueurs GA et GE. Quelle relation obtient-on ?

### C ▸ Généralisation

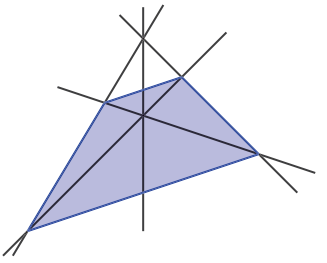
Le point G s'appelle le centre de gravité du triangle. Proposer une définition de ce point et une conjecture.

Pour aller plus loin Démontrer cette conjecture.

20 min — Chercher — Calculer

## 2 Trapèze complet

Placer les points A(–3 ; –1), B(6 ; 2), C(3 ; 5) et D(0 ; 4) dans un repère orthonormé.



**1.** Déterminer la position relative des droites (AB) et (CD).

**2.** Que peut-on en déduire pour le quadrilatère ABCD ?

**3.** Déterminer les coordonnées des milieux F et H des segments [CD] et [AB].

**4. a)** Déterminer les équations cartésiennes des droites (AD) et (BC).

**b)** Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection E de ces deux droites.

**5.** De même, déterminer les équations des droites (AC) et (BD), ainsi que leur point d'intersection G.

**6.** Montrer que les points E, F, G et H sont alignés.

Géométrie dynamique — 30 min — Chercher — Modéliser

## 3 Crible de Mattiassevitch

### A ▸ Construction à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique

**1.** À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire la parabole d'équation $y = x^2$ dans un repère avec $-4{,}5 < x < 4{,}5$ et $-1 < y < 25{,}5$ ainsi qu'une unité de 1 sur l'axe des abscisses (distance).

**2.** Construire deux curseurs $a$ et $b$ avec un pas de 1 (incrément) et avec $2 < a < 10$ et $-10 < b < -2$.

**3.** Placer les points A et B sur la parabole et d'abscisses respectives $a$ et $b$, puis tracer la droite (AB).

**4.** Étudier l'intersection de ces droites (AB) avec l'axe des ordonnées.
Faire varier les curseurs. Que peut-on conjecturer ?

### B ▸ Généralisation

**1.** On note $a$ et $b$ les abscisses des points A et B. Donner leurs ordonnées en fonction de $a$ et de $b$.

**2.** Déterminer l'équation réduite de la droite (AB), en fonction de $a$ et de $b$.

**3.** Donner son ordonnée à l'origine, en fonction de $a$ et de $b$.

**4.** Conclure.

TICE — 30 min — Modéliser — Représenter

## 4 Optimisation

On veut organiser un couloir aérien pour transporter un minimum de 1 600 personnes et au moins 90 tonnes de bagages. Les avions disponibles sont de deux types A et B. La compagnie dispose d'un maximum de 12 avions de type A et de 9 avions de type B.
Un avion de type A peut transporter un maximum de 200 personnes et de 6 tonnes de bagages. Un avion de type B peut, lui, transporter un maximum de 100 personnes et de 15 tonnes de bagages. On appelle $x$ le nombre d'avions de type A et $y$ le nombre d'avions de type B, où $x$ et $y$ sont des entiers naturels.

**1.** Montrer que la traduction de l'énoncé donne les inéquations suivantes :
$0 \leqslant x \leqslant 12$, $0 \leqslant y \leqslant 9$, $2x + y \geqslant 16$ et $2x + 5y \geqslant 30$.

**2.** Dans un repère orthonormé, représenter les droites d'équations :
**a)** $x = 0$ **b)** $x = 12$ **c)** $y = 0$ **d)** $y = 9$ **e)** $2x + y = 16$ **f)** $2x + 5y = 30$

**3.** Hachurer le polygone appelé « polygone des contraintes » qui représente l'ensemble des solutions de toutes les inéquations de la question **1.** On vérifiera que le point (9 ; 6) est solution mais que le point (6 ; 2) ne l'est pas.

**4.** La location d'un avion de type A coûte 400 000 € et celle d'un avion de type B coute 100 000 euros. Exprimer, en centaines de milliers d'euros, le coût, noté C, de la location pour $x$ avions de type A et $y$ avions de type B.

**5.** On cherche comment réaliser le transport à moindre coût, c'est-à-dire, parmi les couples solutions du polygone, un couple correspondant à la plus petite dépense possible.
**a)** Sur quelle droite se trouvent les couples correspondant à une dépense de 1 600 000 € ?
**b)** La tracer sur la figure précédente.
**c)** Le transport peut-il être réalisé avec cette somme ?

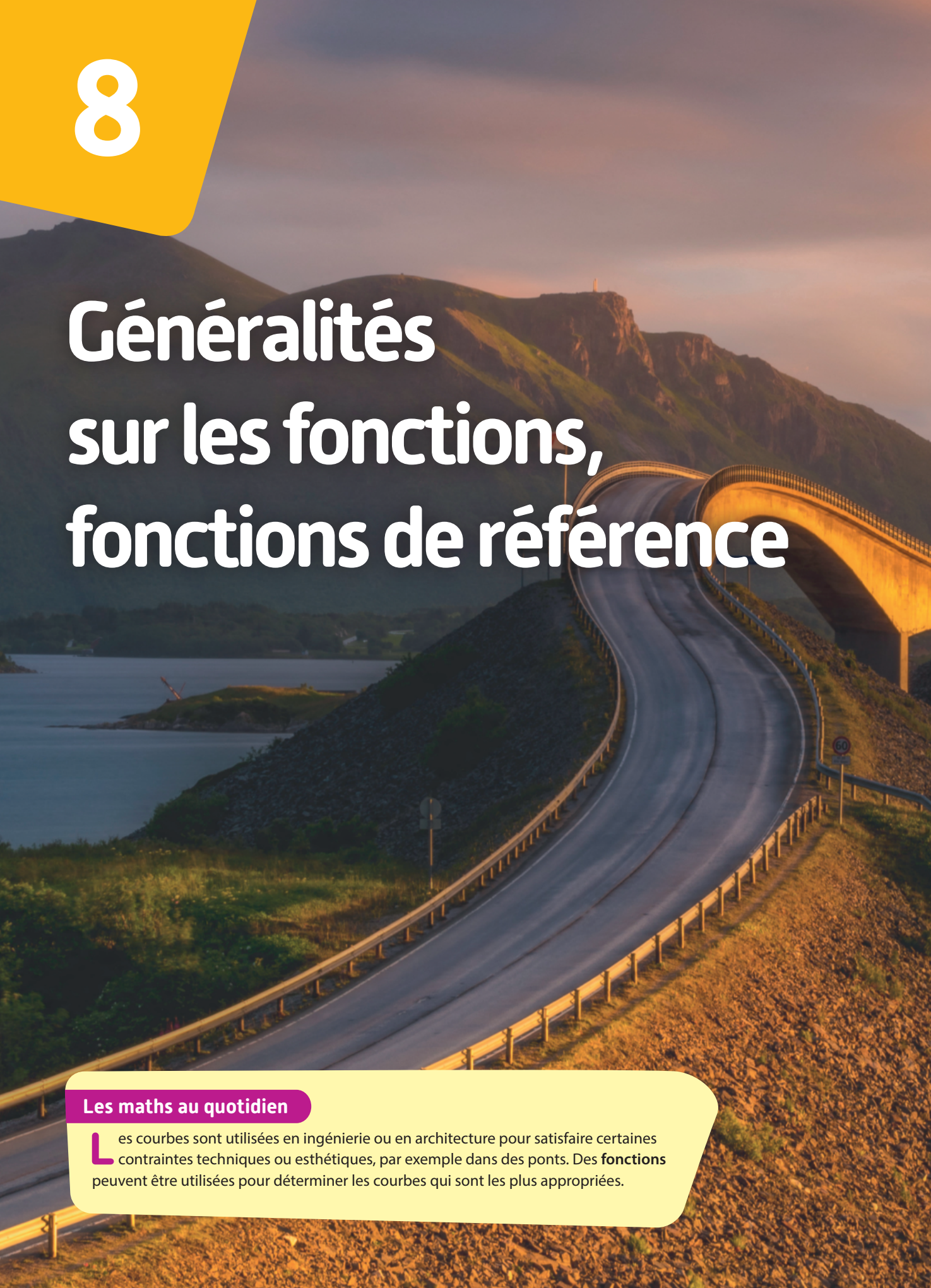
**6.** Répondre aux mêmes questions avec une dépense de 4 000 000 €.

**7.** Pour une dépense de $k$ centaines de milliers d'euros, comment sont les droites correspondant à la dépense ?

**8.** En déduire, à l'aide du graphique, le nombre d'avions de chaque type qu'il faut louer pour que le coût soit minimal. Quel est alors ce coût ?

8

# Généralités sur les fonctions, fonctions de référence



**Les maths au quotidien**

Les courbes sont utilisées en ingénierie ou en architecture pour satisfaire certaines contraintes techniques ou esthétiques, par exemple dans des ponts. Des **fonctions** peuvent être utilisées pour déterminer les courbes qui sont les plus appropriées.

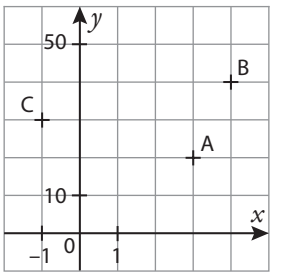
# Pour prendre un bon départ

EXERCICES Sésamath
Réviser ses acquis
www.lienmini.fr/8270-s16

## 1 Lire des coordonnées

Vu au collège

On considère le repère ci-contre.
Lire les coordonnées des points A, B et C.




## 2 Lire des images et des antécédents

Vu au collège

On considère une fonction $f$ dont on donne ci-contre la représentation graphique.
Lire graphiquement :
**a)** l'image de 8.
**b)** $f(4)$.
**c)** les antécédents éventuels de 1.

## 3 Résoudre des équations

Vu au chap 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

**a)** $2x - 4 = 7$ **b)** $(3x + 6)(x - 7) = 0$ **c)** $\dfrac{2x+1}{x+10} = 0$

**d)** $3x + 3 = 15 - x$ **e)** $\dfrac{1}{x} = 8$ **f)** $x^2 = 10$

## 4 Calculer des images et des antécédents

Vu au collège

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = 0{,}5x - 7$ pour tout réel $x$.

**1.** Calculer les images de :

**a)** 4 **b)** 0,5 **c)** –2 **d)** 21

**2.** Calculer les antécédents de :

**a)** 8 **b)** –5 **c)** 1,5 **d)** 0

## 5 Utiliser un programme de calcul

Vu au collège

On considère le programme de calcul ci-contre.

**1.** Quel sera le résultat final si l'on choisit 9 comme nombre de départ ?

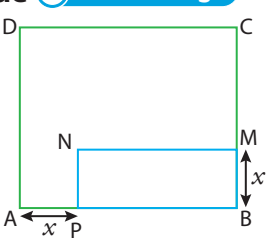
**2.** Donner l'expression du résultat en fonction de $x$ si l'on choisit $x$ comme nombre de départ.

```
▶ Choisir un nombre.
▶ Retrancher 5 à ce nombre.
▶ Mettre le résultat précédent au carré.
▶ Ajouter 3 au résultat précédent.
```

## 6 Modéliser avec une expression algébrique

Vu au collège

Sur la figure ci-contre, ABCD est un rectangle de côté AB = 6 et AD = 5.
M est un point de [BC], P le point de [AB] tel que AP = BM. BMNP est un rectangle.
On pose $x$ = BM.
Exprimer l'aire du rectangle BMNP en fonction de $x$.



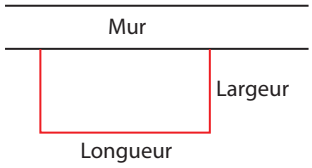

CORRIGÉS www.lienmini.fr/8270-23

# Activités

25 min

## 1 Modéliser une situation avec une fonction

Lou veut créer un espace arboré de forme rectangulaire le long d'un mur. Pour délimiter cet espace, elle a 60 m de bordures en bois à sa disposition. Cet espace aura la forme d'un rectangle comme le montre le schéma ci-contre (la bordure est en rouge).




### A ▸ Vers une formule

**1.** Quelles sont les valeurs possibles pour la largeur de cet espace ?

**2.** Quelle est l'aire de cet espace si la largeur mesure 4 mètres ?

**3.** En notant $x$ la largeur, exprimer l'aire de l'espace arboré en fonction de $x$.

### B ▸ Utilisation de la formule

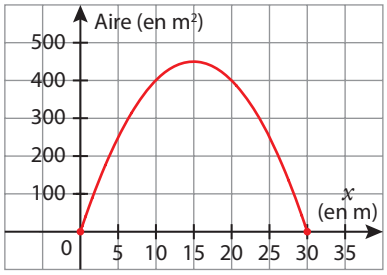
La formule trouvée à la question **3.** permet de définir une fonction $f$ pour tout $x \in [0 ; 30]$. Un tableur permet d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous et la courbe représentative de la fonction $f$ donnant l'aire en fonction de $x$.

Tableau 1

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | largeur x | aire f(x) |
| 2 | 0 | |
| 3 | 1 | |
| 4 | 2 | |
| 5 | 3 | |
| 6 | 4 | |
| 7 | 5 | |
| 8 | 6 | |

Tableau 2

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | largeur x | aire f(x) |
| 2 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 58 |
| 4 | 2 | 112 |
| 5 | 3 | 162 |
| 6 | 4 | 208 |
| 7 | 5 | 250 |
| 8 | 6 | 288 |




**1.** Quelle formule a-t-on saisie dans la cellule B2 du tableau 1 et recopiée vers le bas pour obtenir le tableau 2 ?

**2.** Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

**a)** L'aire de l'espace peut être égale à 200 m$^2$.

**b)** Si la largeur est inférieure à 5 mètres, alors l'aire est inférieure ou égale à 250 m$^2$.

**c)** L'aire de l'espace arboré peut être supérieure à 500 m$^2$.

**3.** Pour aller plus loin L'aire de l'espace arboré pourrait-elle atteindre 150 m$^2$ si Lou avait 30 m de bordure ?

↪ Cours 1 p. 208

20 min

## 2 Découvrir la notion d'équation de courbe

**1.** Tracer un repère orthonormé.

**2. a)** Représenter en rouge l'ensemble des points dont l'ordonnée est égale au double de l'abscisse.

Tous les points de cette droite ont des coordonnées qui vérifient l'équation $y = 2x$ pour tout réel $x$.

Il s'agit de la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 2x$.

**b)** Le point R(250 ; 501) appartient-il à cet ensemble ?

**3. a)** Dans le repère, placer dix points en vert dont l'ordonnée est égale au carré de l'abscisse.

**b)** Donner une équation de cet ensemble. De quelle fonction est-il la représentation graphique ?

**c)** Le point S(15 ; 225) appartient-il à cet ensemble ?

**4.** Pour aller plus loin Créer un programme en langage **Python** permettant, à partir des coordonnées d'un point, de savoir si celui-ci appartient ou non à l'ensemble ayant pour équation $y = x^2 + x - 3$ dans un repère.

↪ Cours 2 p. 208

20 min

## 3 Découvrir les fonctions de référence

**1.** On considère les fonctions suivantes ainsi que leurs courbes représentatives dans un repère :
• la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
• la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$.
• la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$.
• la fonction racine carrée définie sur $[0 ; +\infty[$ par $m(x) = \sqrt{x}$.
Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Expliquer.

**a)** La courbe représentative de la fonction cube passe par le point A(–10 ; –1 000).

**b)** La courbe représentative de la fonction carré est au-dessus de l'axe des abscisses sur $\mathbb{R}$.

**c)** La courbe représentative de la fonction racine carrée est en dessous de la courbe représentative de la fonction carré sur $[0 ; +\infty[$.

**d)** Les courbes représentatives de toutes ces fonctions dans un repère passent par un même point.

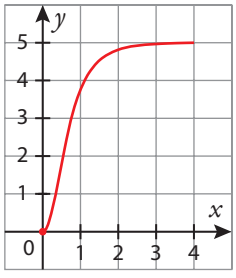
**2.** Pour aller plus loin On considère la propriété suivante où $f$ est une fonction.
« Pour tous nombres $x_1$ et $x_2$ de l'ensemble de définition, on a $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. »
La fonction carré vérifie-t-elle cette propriété ?

↪ Cours 4 p. 212

20 min

## 4 Découvrir la notion de parité

On considère la courbe représentative d'une fonction définie sur [0 ; 4].




**1. a)** Reproduire la courbe sur votre cahier en laissant de la place à gauche.

**b)** Construire la courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées de cette courbe. L'ensemble des deux courbes mises bout à bout est la courbe d'une fonction définie sur [–4 ; 4] que l'on notera $g$.

**c)** D'après-vous, quel lien y a-t-il entre $g(-x)$ et $g(x)$ pour tout nombre $x$ de [–4 ; 4] ?

On dit que la fonction $g$ est **paire**.

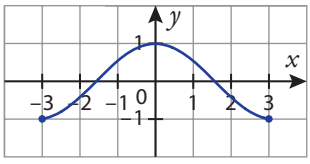
**2. a)** Reproduire la courbe de départ sur votre cahier dans un autre repère.

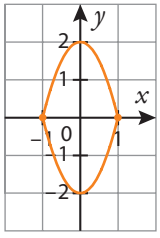
**b)** Construire la courbe symétrique par rapport à l'origine du repère. L'ensemble des deux courbes mises bout à bout est la courbe d'une fonction définie sur [–4 ; 4] que l'on notera $h$.

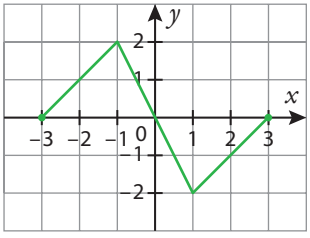
**c)** Comparer $h(-1)$ et $h(1)$ ; $h(-2)$ et $h(2)$ ; $h(-x)$ et $h(x)$.

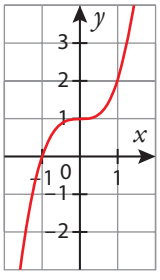
On dit que la fonction $h$ est **impaire**.

**3.** Parmi les courbes suivantes, dire lesquelles semblent être celles d'une fonction paire ou d'une fonction impaire.




**4.** Pour aller plus loin La courbe tracée à la question **1.** est celle de la fonction $g$ définie sur [–4 ; 4] par $g(x) = 5 - \dfrac{5}{(1+x^2)^2}$. Montrer que $g(-x) = g(x)$ pour tout nombre $x$ de [–4 ; 4].

↪ Cours 5 p. 214

# 1 Notion de fonction

**Définition** **Fonction et ensemble de définition**

**Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de nombres réels.**

**Définir une fonction $f$ sur $\mathcal{D}$ revient à associer à chaque réel $x$ de $\mathcal{D}$ un réel et un seul, appelé image de $x$ par $f$, notée $f(x)$.**

**$\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de la fonction : c'est l'ensemble des nombres pour lesquels il existe une image par la fonction.**

**Comment lit-on ?**

$f(x)$ se lit « $f$ de $x$ ».

**Remarques**

① $\mathcal{D}$ est souvent un intervalle ou une réunion d'intervalles.

② Une fonction peut être définie par une **expression algébrique**, qui permet de calculer directement des images.

③ S'il n'est pas donné, l'ensemble de définition d'une fonction peut être obtenu par analyse de son expression (en cherchant par exemple des valeurs que $x$ ne peut pas prendre) ou par analyse du contexte lié à cette fonction (comme des distances par exemple).

④ **Modéliser une situation** par une fonction, c'est mettre en lien deux grandeurs en choisissant une variable (notée en général $x$, $t$ ou $n$) dans un ensemble de définition, puis en associant une valeur $f(x)$ à chacune des valeurs prises par la variable (par exemple par une formule, un tableau ou une courbe).

↪ Résolution de problèmes p. 217

⑤ **Vocabulaire :** Si $b$ est **l'image** de $a$, on a l'égalité $f(a) = b$ et $a$ est appelé **un antécédent** de $b$ par la fonction $f$. Un nombre peut avoir 0, 1 ou plusieurs antécédents.

# 2 Courbe représentative d'une fonction

**Définition** **Courbe représentative d'une fonction**

**On considère une fonction $f$ définie sur son ensemble de définition $\mathcal{D}$.**

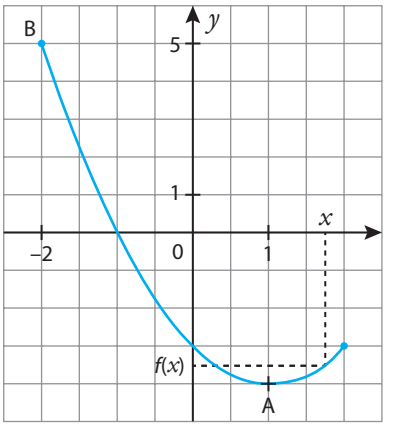
**Dans un repère, la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient l'égalité $y = f(x)$ avec $x$ appartenant à $\mathcal{D}$, c'est-à-dire l'ensemble des points dont l'ordonnée est l'image de l'abscisse.**

**Cette courbe est la courbe représentative de la fonction $f$.**

**Remarque** Autrement dit, un point de coordonnées $(x\,;y)$ appartient à la courbe représentative de $f$ si et seulement si $f(x) = y$. La courbe est donc l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;f(x))$ où $x$ parcourt l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $f$.

**Exemple**

On considère la fonction $f$ définie sur $[-2\,;2]$ par $f(x) = (x-1)^2 - 4$.
La courbe représentative de la fonction $f$ est la courbe d'équation $y = (x-1)^2 - 4$ tracée ci-contre. Cela veut dire que tout point de cette courbe a son ordonnée qui est égale à l'image de son abscisse.
Par exemple A(1 ; –4) semble appartenir à la courbe, et en effet $f(1) = (1-1)^2 - 4 = 0 - 4 = -4$. L'image de son abscisse est bien égale à son ordonnée, donc le point A appartient bien à la courbe.
Le point B a pour abscisse –2 et appartient à la courbe.
Son ordonnée vaut donc $f(-2) = (-2-1)^2 - 4 = 5$.



# Exercices résolus

## Méthode 1 Utiliser une équation de la courbe d'une fonction

### Énoncé

**On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.**
**1. Le point A(–2 ; 8) appartient-il à $\mathscr{C}_f$ ?**
**2. Le point B appartient à $\mathscr{C}_f$ et a pour abscisse 4. Quelle est l'ordonnée de B ?**

### Solution

1. Le point A appartient à $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $y_A = f(x_A)$. (1)
Or $f(x_A) = 3(x_A)^2 - 5 = 3 \times (-2)^2 - 5 = 7 \neq y_A$ car $y_A = 8$. (2)
Donc A $\notin \mathscr{C}_f$.
2. B appartient à $\mathscr{C}_f$ donc cela veut dire que $y_B = f(x_B)$. (3)
Or $f(x_B) = f(4) = 3 \times 4^2 - 5 = 43$. L'ordonnée de B est $y_B = 43$.

### Conseils & Méthodes

1. Une équation d'une courbe est une relation vérifiée par les coordonnées des points situés sur cette courbe et uniquement ceux-là : c'est une condition d'appartenance à la courbe.
2. On calcule l'image de l'abscisse de A et on la compare à l'ordonnée de A. Si elles sont égales, A appartient à la courbe, sinon il n'appartient pas.
3. On connaît ici l'abscisse d'un point de la courbe. Son ordonnée est égale à l'image de l'abscisse.

### À vous de jouer !

**1** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
1. Le point C(2 ; 4) appartient-il à $\mathscr{C}_f$ ?
2. Le point E appartient à $\mathscr{C}_f$ et a pour abscisse –3. Quelle est l'ordonnée de E ?

**2** On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 2x - 4$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative.
1. Le point A(1,5 ; 1,3) appartient-il à $\mathscr{C}_g$ ?
2. Donner l'ordonnée du point d'intersection de $\mathscr{C}_g$ et de l'axe des ordonnées.

↪ Exercices 58 à 70 p. 220

## Méthode 2 Tracer la courbe représentative d'une fonction

### Énoncé

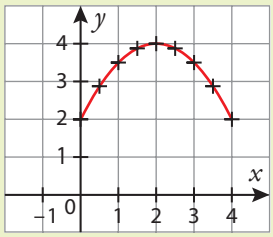
**On considère la fonction $f$ définie sur [0 ; 4] par $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 2$.**
**Tracer la courbe représentative de $f$ dans un repère.**

### Solution

On établit le tableau de valeurs suivant, arrondies à 0,01 près. (1)

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 2,88 | 3,5 | 3,88 | 4 | 3,88 | 3,5 | 2,88 | 2 |

On place les points de coordonnées (0 ; 2) ; (0,5 ; 2,88) ; etc. dans un repère. (2)




(3)

### Conseils & Méthodes

1. On a besoin de placer des points judicieusement répartis appartenant à cette courbe dans le repère. On peut utiliser la calculatrice (↪ TP 1 p. 232) pour obtenir ce tableau.
2. Chaque colonne du tableau donne un point dont $x$ est l'abscisse et $f(x)$ l'ordonnée.
3. Puis on trace à main levée une courbe passant par ces points.

### À vous de jouer !

**3** Tracer dans un repère la courbe de la fonction $f$ définie sur [–2 ; 2] par $f(x) = x^2 - x + 2$.

**4** Tracer dans un repère la courbe de la fonction $f$ définie sur [0 ; 3] par $f(x) = 6 - 2x$.

↪ Exercices 71 à 75 p. 221

# 3 Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations à l'aide d'une fonction

**Propriété** **Solutions de l'équation $f(x) = k$**

**On considère une fonction $f$ et $k$ un nombre réel.**

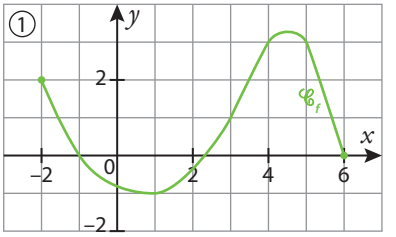
**Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les antécédents de $k$ par la fonction $f$.**

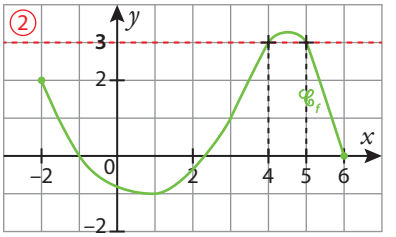
**Exemple**

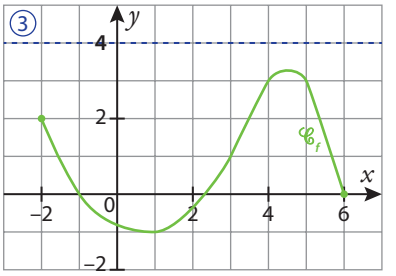
On considère une fonction $f$ définie sur $[-2 ; 6]$ dont on donne la courbe représentative ci-contre sur le graphique ①.

• Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$ revient à chercher graphiquement les antécédents de 3 par $f$.
Pour cela, on repère sur le graphique ② tous les points de la courbe d'ordonnée égale à 3 en traçant la droite horizontale d'équation $y = 3$.
Les abscisses de ces points sont les antécédents de 3 par $f$, ce sont donc les solutions de l'équation $f(x) = 3$.
Les solutions de $f(x) = 3$ sont 4 et 5.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{4 ; 5\}$.

• En traçant la droite d'équation $y = 4$ sur le graphique ③, on observe que celle-ci n'a pas de point d'intersection avec la courbe représentative de $f$.
L'équation $f(x) = 4$ n'a pas de solution : 4 n'a pas d'antécédent par $f$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \varnothing$.




**Comment lit-on ?**

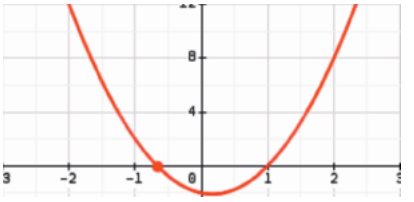
$\varnothing$ se lit « ensemble vide »

**Remarque**

On peut résoudre de manière approchée une équation en utilisant la courbe représentative ou de manière exacte si les points sont marqués.

**Exemple**

On peut par exemple résoudre de façon approchée l'équation $3x^2 - x - 2 = 0$ en combinant le tracé de la courbe représentative sur la calculatrice de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - x - 2$ et la lecture graphique des solutions de $f(x) = 0$.
Les solutions sont environ –0,7 et 1.

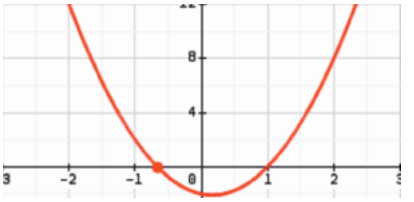



**Remarque** À partir de techniques assez similaires, on peut résoudre des inéquations du type $f(x) \geqslant k$, $f(x) > k$, … de manière graphique.

↪ Méthode 3 p. 211

**Exemple**

On peut par exemple résoudre de façon approchée l'inéquation $3x^2 - x - 2 \leqslant 0$ en traçant à la calculatrice la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - x - 2$. On regarde sur l'écran de la calculatrice la portion de courbe en dessous de l'axe des abscisses, pour lire graphiquement les solutions de $f(x) \leqslant 0$.
L'ensemble des solutions est environ $[-0,7 ; 1]$.



# Exercices résolus

Méthode 3

## Résoudre graphiquement une inéquation

VIDÉO ALL MATHS PARNAK
Comprendre une méthode
www.lienmini.fr/8270-24

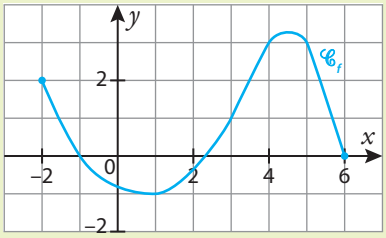
### Énoncé

**On considère une fonction *f* définie sur [–2 ; 6] dont voici la courbe représentative dans un repère.**

**À l'aide de la courbe représentative de *f*, résoudre graphiquement les inéquations suivantes :**

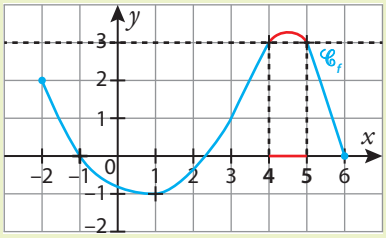
**a)** $f(x) \geqslant 3$

**b)** $f(x) < 2$



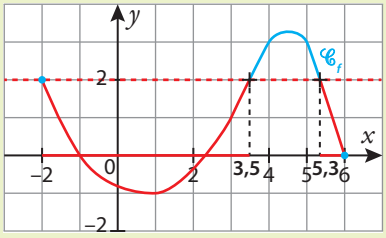

### Solution

**a)** On repère tous les points de la courbe qui se situent sur ou au-dessus de la droite d'équation $y = 3$. 1 2




On voit que c'est le cas quand $x$ se situe entre 4 (inclus) et 5 (inclus), c'est-à-dire dans l'intervalle [4 ; 5]. 3
L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = [4 ; 5]$.

**b)** On repère tous les points de la courbe qui se situent en dessous de la droite d'équation $y = 2$.




On voit que c'est le cas lorsque $x$ se situe entre –2 (exclu) et 3,5 (exclu) ou lorsque $x$ se situe entre 5,3 (exclu) et 6 (inclus), c'est-à-dire lorsque $x \in ]-2 ; 3,5[ \cup ]5,3 ; 6]$. 4

On en déduit que l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = ]-2 ; 3,5[ \cup ]5,3 ; 6]$.

#### Conseils & Méthodes

1 On commence par tracer la droite horizontale d'équation $y = 3$ pour repérer les points d'ordonnées supérieures ou égales à 3.

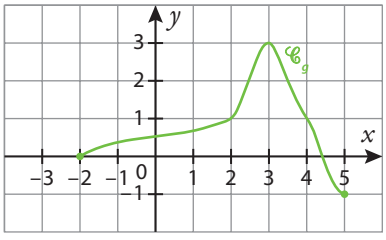
2 Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de la courbe sur ou au-dessus ou en dessous de la droite suivant l'inéquation. Ici l'inéquation est $f(x) \geqslant 3$, donc on cherche les points de la courbe sur et au-dessus de la droite.

3 Il faut bien prendre en considération chacune des bornes des intervalles pour savoir si elle appartient ou non à l'ensemble des solutions.

4 Si l'ensemble des solutions est composé d'intervalles disjoints, on utilise le symbole ∪.

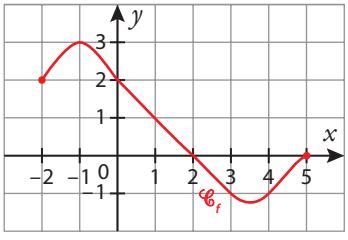
### À vous de jouer !

**5** On considère une fonction *g* définie sur [–2 ; 5] dont on donne ci-dessous la courbe représentative.




Résoudre :
**a)** $g(x) > 1$ **b)** $g(x) \leqslant 1$

**6** On considère une fonction *f* définie sur [–2 ; 5] dont on donne ci-dessous la courbe représentative.




Résoudre :
**a)** $f(x) \geqslant 2$ **b)** $f(x) < 0$ **c)** $f(x) \geqslant -1$

↪ Exercices 84 à 91 p. 222

# 4 Exemples de fonctions de référence

## Définition Fonction carré

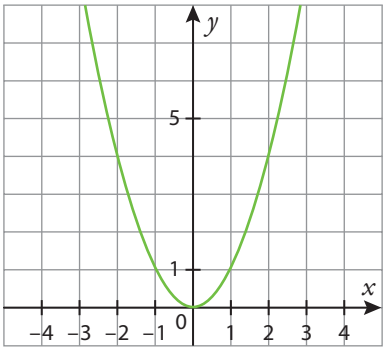
**La fonction carré est la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.**

**Elle associe à chaque réel son carré.**

Un tableau de valeurs de la fonction carré est :

| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |

Sa courbe représentative est tracée ci-dessous.




Sa courbe fait partie d'une famille de courbes appelées « paraboles ».

## Définition Fonction racine carrée

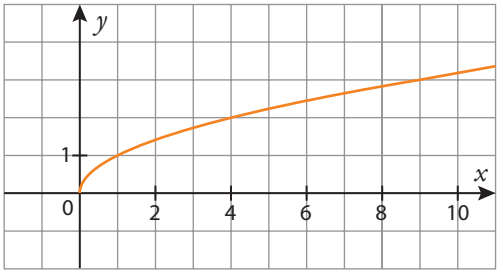
**La fonction racine carrée est la fonction $f$ définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.**

**Elle associe à chaque réel positif sa racine carrée.**

Un tableau de valeurs de la fonction racine carrée est :

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1 | $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ | $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ | 2 | 3 |

Sa courbe représentative est tracée ci-dessous.




Si $k \geqslant 0$, l'unique antécédent de $k$ par la fonction racine carrée est $k^2$ et si $k < 0$, $k$ n'a pas d'antécédent.

## Définition Fonction cube

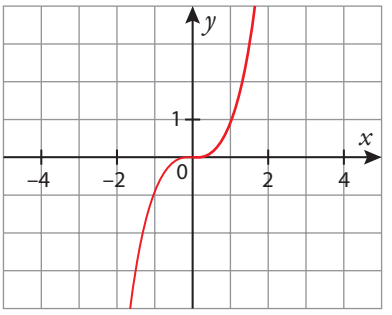
**La fonction cube est la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.**

**Elle associe à chaque réel son cube.**

Un tableau de valeurs de la fonction cube est :

| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −27 | −8 | −1 | 0 | 1 | 8 | 27 |

Sa courbe représentative est tracée ci-dessous.




L'antécédent d'un nombre réel $k$ par la fonction cube est la racine cubique de $k$ : elle se note $\sqrt[3]{k}$. Par exemple $\sqrt[3]{27} = 3$.

## Définition Fonction inverse

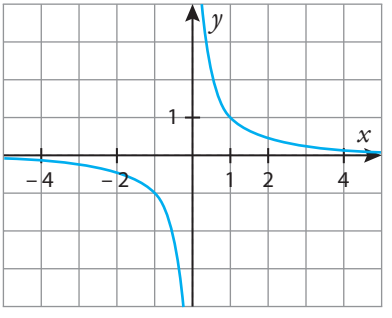
**La fonction inverse est la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.**

**Elle associe à chaque réel non nul son inverse.**

Un tableau de valeurs de la fonction inverse est :

| $x$ | −2 | −1 | −0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −0,5 | −1 | −2 | | 2 | 1 | 0,5 |

Sa courbe représentative est tracée ci-dessous.




Sa courbe fait partie d'une famille de courbes appelées « hyperboles ».

**Remarque** En combinant des méthodes de lecture graphique et des résultats du collège, on peut résoudre de manière graphique et algébrique des équations et inéquations utilisant les fonctions de référence.

Méthodes 4 et 5 p. 213

# Exercices résolus

## Méthode 4 Résoudre des équations avec les fonctions de référence

### Énoncé

**Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.**

**a)** $\sqrt{x} = 5$ **b)** $x^3 = 12$

### Solution

**a)** La solution de l'équation $\sqrt{x} = 5$ est $x = 5^2 = 25$. 1

**b)** La solution de $x^3 = 12$ est la racine cubique de 12 c'est-à-dire $\sqrt[3]{12} \approx 2{,}29$. Cette racine cubique, si elle n'est pas évidente, peut être approximée : 2 3

Avec Numworks, appuyer sur et choisir racine n-ieme.

Avec TI, appuyer sur la touche puis choisir $\sqrt[3]{\ }$.

Avec Casio, la racine n-ième est accessible en appuyant sur SHIFT puis .

### Conseils & Méthodes

1 Si $k > 0$, $\sqrt{x} = k \Leftrightarrow x = k^2$.

2 La racine cubique pourra être approximée si ce n'est pas un cube parfait simple : $1^3 = 1$ ; $2^3 = 8$ ; $3^3 = 27$ ; $10^3 = 1\,000$ … ou leurs opposés.

3 On peut calculer une racine cubique avec la calculatrice.

### À vous de jouer !

**7** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

**a)** $x^3 = 125$ **b)** $\sqrt{x} = 10$

**8** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

**a)** $x^3 = 25$ **b)** $\sqrt{x} = -2$

Exercices 92 à 98 p. 223

## Méthode 5 Résoudre graphiquement des inéquations avec les fonctions de référence

### Énoncé

**Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.**

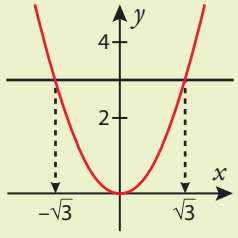
**a)** $x^2 > 3$ **b)** $\sqrt{x} \leqslant 2$

### Solution

**a)** Les solutions de $x^2 = 3$ sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$. 1

On repère les points d'ordonnée supérieure à 3, c'est-à-dire au-dessus de la droite d'équation $y = 3$. 2

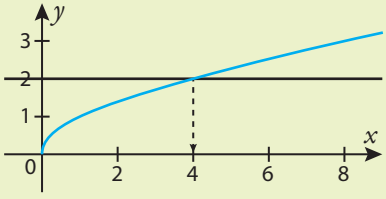
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = ]-\infty ; -\sqrt{3}[ \cup ]\sqrt{3} ; +\infty[$. 3




**b)** La solution de $\sqrt{x} = 2$ est $x = 4$. 1

On repère les points sur et en dessous de la droite d'équation $y = 2$. 2

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [0 ; 4]$. 3




### Conseils & Méthodes

1 On résout algébriquement l'équation associée à l'inéquation.

2 On trace l'allure de la courbe de la fonction de référence en jeu.

3 On donne l'ensemble des solutions à l'aide des éléments des points 1 et 2.

### À vous de jouer !

**9** Résoudre dans $\mathbb{R}$.

**a)** $x^2 \leqslant 2$ **b)** $\sqrt{x} > 5$ **c)** $x^3 > 8$

**10** Résoudre dans $\mathbb{R}$.

**a)** $x^2 \geqslant 4$ **b)** $x^3 \leqslant 1\,000$ **c)** $\sqrt{x} \leqslant 100$

Exercices 99 à 103 p. 224

# 5 Parité

**Définition** **Fonction paire**

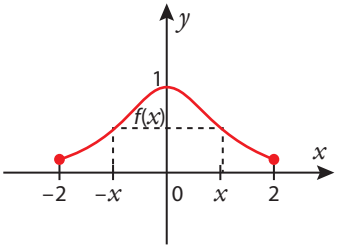
**Une fonction *f*, d'ensemble de définition $\mathcal{D}$, est dite paire si pour tout réel $x$ de $\mathcal{D}$ on a $-x \in \mathcal{D}$ et $f(-x) = f(x)$.**

**Propriété** **Symétrie de la courbe d'une fonction paire**

**Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.**

**Démonstration**

Considérons un point de la courbe. On considère $x$ son abscisse (un nombre de l'ensemble de définition) et les coordonnées $(x ; f(x))$ de ce point de la courbe représentative de $f$.
On veut montrer que son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées qui a pour coordonnées $(-x ; f(x))$ appartient aussi à la courbe de $f$.
$f$ étant paire, $-x$ appartient à l'ensemble de définition. Comme $f(-x) = f(x)$ pour tout $x$, le point de coordonnées $(-x ; f(-x))$ est le même que le point de coordonnées $(-x ; f(x))$. Or le point de coordonnées $(-x ; f(-x))$ est un point de la courbe de $f$ car l'ordonnée est égale à l'image de l'abscisse.
Donc le point de coordonnées $(-x ; f(x))$ appartient à la courbe de $f$.




**Remarque** Si la courbe d'une fonction semble symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on peut conjecturer que la fonction est paire.

↪ Méthode 6 p. 215

**Propriété** **Parité de la fonction carré**

**La fonction carré est paire.**

**Démonstration**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ pour tout réel $x$.
Donc la fonction carré est paire.

**Remarque**

On en déduit que la courbe de la fonction carré est une parabole symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

**Définition** **Fonction impaire**

**Une fonction *f*, d'ensemble de définition $\mathcal{D}$, est dite impaire si pour tout réel $x$ de $\mathcal{D}$ on a $-x \in \mathcal{D}$ et $f(-x) = -f(x)$.**

**Propriété** **Symétrie de la courbe d'une fonction impaire**

**Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.**

**Remarque** Si la courbe d'une fonction semble symétrique par rapport à l'origine du repère, on peut conjecturer que la fonction est impaire.

↪ Méthode 6 p. 215

**Propriété** **Parité des fonctions cube et inverse**

**La fonction cube et la fonction inverse sont impaires.**

**Remarque**

On en déduit que les courbes des fonctions cube et inverse sont symétriques par rapport à l'origine.

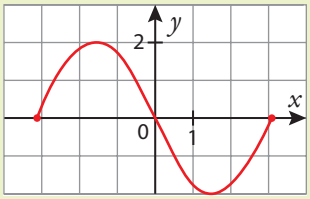
# Exercices résolus

## Méthode 6 Conjecturer la parité d'une fonction

### Énoncé

**On considère une fonction *f* dont on donne ci-contre la courbe représentative.**

**Conjecturer la parité de la fonction *f*.**




### Solution

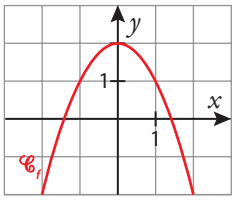
D'après la symétrie de la courbe par rapport à l'origine, on peut conjecturer que la fonction *f* est impaire. 1

### Conseils & Méthodes

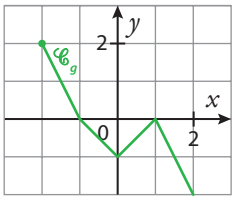
1 Une symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées permet de supposer que la fonction est paire, une symétrie de la courbe par rapport à l'origine permet de supposer que la fonction est impaire.

### À vous de jouer !

**11** On considère une fonction *f* dont on donne ci-contre la courbe représentative.
Conjecturer la parité de *f*.




**12** On considère une fonction *g* dont on donne ci-contre la courbe représentative.
La fonction *g* semble-t-elle paire ? impaire ?




↪ Exercices 104 à 110 p. 224

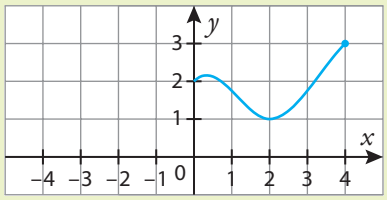
## Méthode 7 Utiliser la parité d'une fonction

### Énoncé

**1. Une fonction *h* paire et définie sur [–4 ; 4] a pour tableau de valeurs :**

| $x$ | –4 | –2 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | 3 | | 1 | |

**Recopier et compléter ce tableau de valeurs.**




**2. Voici ci-contre une partie de la courbe représentative de *h*.**

**La reproduire et la compléter.**

### Solution

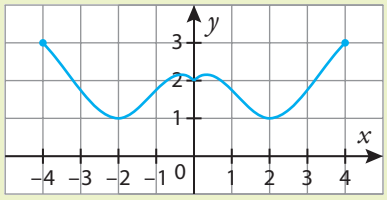
**1.** Comme la fonction est paire, on a : 1

| $x$ | –4 | –2 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | 3 | 1 | 1 | 3 |

### Conseils & Méthodes

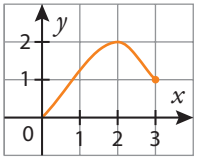
1 Comme la fonction est paire, $f(-x) = f(x)$ donc par exemple $f(-2) = f(2)$.

**2.** La fonction *h* étant paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et donc on obtient :

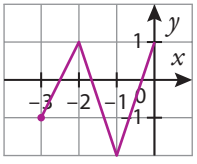



### À vous de jouer !

**13** *f* est une fonction définie sur [–3 ; 3] et est impaire.
Reproduire et compléter sa courbe représentative.




**14** *g* est une fonction définie sur [–3 ; 3] et est paire.
Reproduire et compléter sa courbe représentative.




↪ Exercices 111 à 114 p. 225

Méthode 8

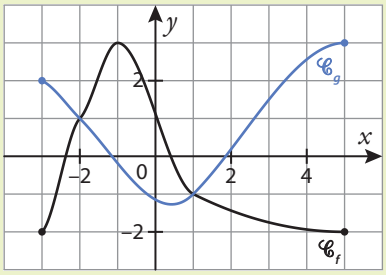
## Résoudre $f(x) = g(x)$ ; $f(x) > g(x)$...

### Énoncé

**On considère deux fonctions $f$ et $g$ définies sur $[-3 ; 5]$ dont voici ci-contre les courbes représentatives.**

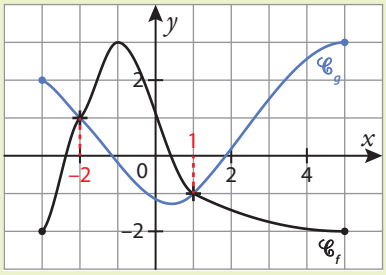
**Résoudre graphiquement :**

**a)** $f(x) = g(x)$ **b)** $f(x) \geqslant g(x)$ **c)** $f(x) < g(x)$




### Solution

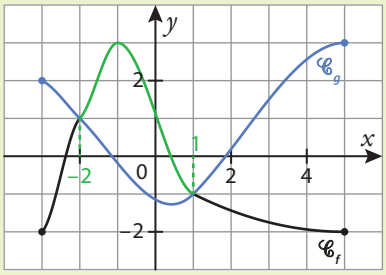
**a)** Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes. 1




Donc l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{-2 ; 1\}$.

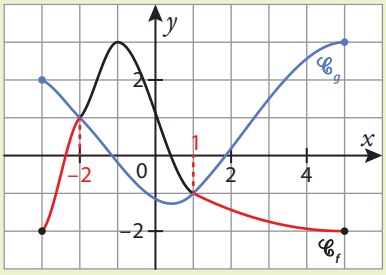
**b)** La courbe de $f$ (en vert) est au-dessus ou sur celle de $g$ quand $x$ se situe entre $-2$ (inclus) et 1 (inclus). 2

Donc l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = [-2 ; 1]$.




**c)** La courbe de $f$ (en rouge) est en dessous de celle de $g$ quand $x$ se situe entre $-3$ (inclus) et $-2$ (exclu) puis entre 1 (exclu) et 5 (inclus). 3

Donc l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = [-3 ; -2[ \cup ]1 ; 5]$.

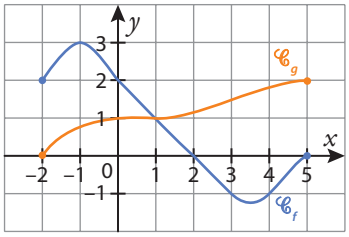



### Conseils & Méthodes

1. Pour résoudre $f(x) = g(x)$, on repère les points d'intersection des courbes de $f$ et $g$ et on lit leurs abscisses.
2. Pour résoudre $f(x) \geqslant g(x)$, on repère les points de la courbe de la fonction $f$ situés au-dessus ou sur la courbe de $g$.
3. Pour résoudre $f(x) < g(x)$, on repère les points de la courbe de la fonction $f$ situés en dessous de la courbe de $g$.

## À vous de jouer !

**15** On considère ci-dessous les courbes représentatives de deux fonctions $f$ et $g$ définies sur $[-2 ; 5]$.

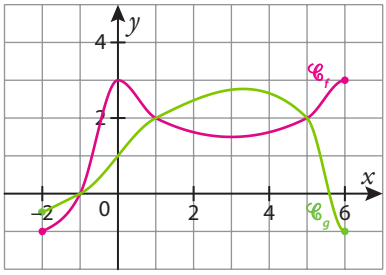



Résoudre graphiquement :

**a)** $f(x) = g(x)$

**b)** $f(x) \leqslant g(x)$

**16** On considère ci-dessous les courbes représentatives de deux fonctions $f$ et $g$ définies sur $[-2 ; 6]$.




Résoudre graphiquement :

**a)** $f(x) = g(x)$ **b)** $f(x) > g(x)$

↪ Exercices 115 à 119 p. 225

## J'apprends à modéliser à l'aide d'une fonction

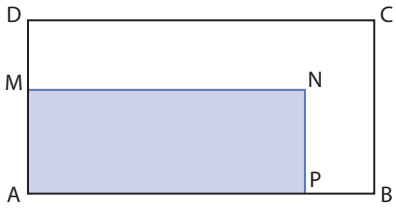
**Réflexe 1**
Identifier l'indéterminée et sa nature.

**Réflexe 2**
Traduire l'énoncé à l'aide de cette indéterminée.

### Énoncé

On considère la figure ci-contre. ABCD est un rectangle tel que AB = 10 cm et AD = 5 cm. M est un point mobile du segment [AD]. On place sur [AB] le point P tel que BP = DM.

**Construire une fonction permettant d'étudier l'aire du rectangle AMNP.**

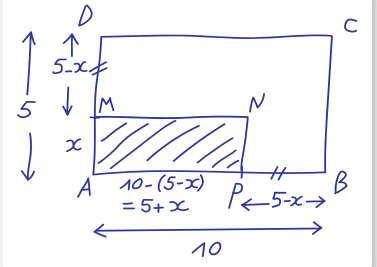



### Solution

**Étape 1** Je repère que l'aire dépend de la position de M sur [AD]. Elle dépend donc de la longueur AM. Je pose $x$ = AM, $x$ est une « variable » **Réflexe 1**

Je remarque aussi que AM varie entre 0 et 5 cm car M ∈ [AD].

*Brouillon de l'étape 2*




**Étape 2** Je cherche une expression contenant $x$ permettant d'exprimer la fonction. L'aire du rectangle est le produit de la « largeur » AM par la « longueur » AP.

Je représente la situation au brouillon.

Je remarque que l'aire est donc $x \times (5 + x)$. **Réflexe 2**

*Réponse rédigée*

On pose la variable $x$ = AM.
Comme M ∈ [AD], alors $x \in [0 ; 5]$.
On pose $f(x)$ l'aire de AMNP en fonction de $x$.
On a $f(x) = AM \times AP = x \times (10 - PB) = x \times (10 - MD)$
$= x \times (10 - (5 - x)) = x \times (5 + x) = 5x + x^2$
Ainsi l'aire du rectangle AMNP peut être modélisée en fonction de AM = $x$ par la fonction $f$ définie sur $[0 ; 5]$ par $f(x) = 5x + x^2$.

## Je m'entraîne à modéliser à l'aide d'une fonction

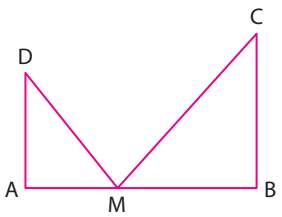
### 17 Des bénéfices

Dans une entreprise de fabrication et de ventes de jouets, le coût de production de $n$ peluches est égal à $100 + n^2 + 4n$ euros.
Chaque peluche est ensuite vendue individuellement 26 euros.

Construire une fonction permettant d'étudier les bénéfices de l'entreprise.

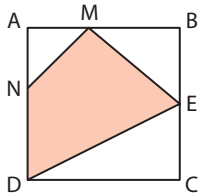
### 18 Une longueur

[AB] est un segment mesurant 6 cm. Le point D est sur la perpendiculaire à (AB) passant par A et tel que AD = 3.
Le point C est sur la perpendiculaire à (AB) passant par B et tel que BC = 4.
M est un point mobile sur [AB]
Construire une fonction pour étudier la longueur MC.




### 19 Une aire

ABCD est un carré de côté 6.
E est le milieu de [BC].
M est un point du segment [AB] et N est le point du segment [AD] tel que AN = AM.
Construire une fonction pour étudier l'aire de la surface colorée.



# Exercices automatismes

**CARTES FLASH**
Acquérir des automatismes
www.lienmini.fr/8270-6

## Rituel 1

### Résoudre une équation du 1er degré

**20** Résoudre $2x + 4 = x - 5$.

**21** Résoudre $3x + 6 = 6$.

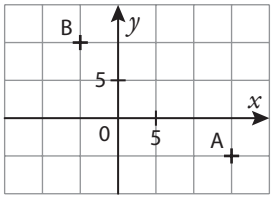
### Appliquer un pourcentage

**22** Augmenter 30 de 50 %.

**23** Le prix d'une plante valant 20 € diminue de 10 %. Quel est son nouveau prix ?

### Repérer un point dans le plan

On considère le repère ci-dessous.

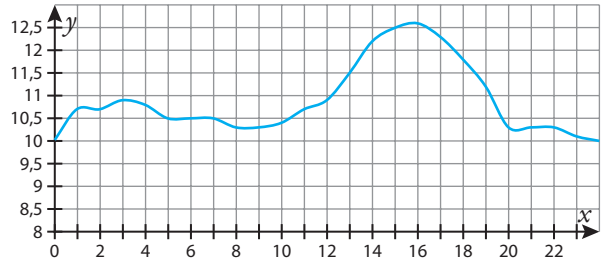



**24** Lire graphiquement les coordonnées de A.

**25** Lire graphiquement les coordonnées de B.

## Rituel 2

La courbe suivante représente la température en fonction de l'heure le 25 décembre 2022 dans une station météo de Rennes.




### Préciser les grandeurs en jeu

**26** Sur quel axe lit-on l'heure sur ce graphique ?

**27** Sur quel axe lit-on la température ?

### Préciser les unités sur un graphique

**28** Quelle est l'unité utilisée sur l'axe des abscisses ?

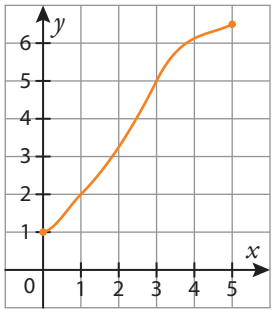
**29** Quelle est l'unité utilisée sur l'axe des ordonnées ?

### Lire graphiquement un seuil

**30** À partir de quelle heure la température dépasse-t-elle 12 °C pour la première fois ?

## Rituel 3

On considère une fonction $f$ dont on donne ci-contre la courbe représentative.




### Estimer des antécédents

**31** Lire l'antécédent de 2 par la fonction $f$.

**32** Donner un nombre qui n'admet pas d'antécédent par la fonction $f$.

### Estimer graphiquement un seuil

**33** À partir de quelle valeur de $x$ $f(x)$ devient-il supérieur ou égal à 5 ?

**34** À partir de quelle valeur environ de $x$ $f(x)$ devient-il supérieur ou égal à 6 ?

### Calculer des volumes, des périmètres

**35** Calculer le périmètre d'un rectangle de largeur 4,2 et de longueur 10.

**36** Calculer le volume en $cm^3$ d'un pavé droit ayant pour dimensions 10 cm × 5 cm × 7 cm.

## Rituel 4

### Résoudre une équation du 1er degré

**37** Résoudre $2x + 7 = 8 - 4x$.

**38** Résoudre $5x + 2 = x + 10$.

### Préciser les grandeurs en jeu

**39** Un rectangle a pour largeur 0,5 mètre et pour longueur $x$ mètres. On souhaite étudier l'aire en $cm^2$ de ce rectangle en fonction de $x$.
Si on représente graphiquement par une courbe l'aire en fonction de $x$, sur quel axe lira-t-on l'aire ?

### Préciser l'échelle sur un graphique

**40** Sur un graphique, on a tracé un carré de côté 10 cm pour représenter un carré de côté 1 mètre.
Quelle est l'échelle utilisée ?

**41** Sur un graphique, on a tracé un segment de 10 cm pour représenter un segment de 10 km.
Quelle est l'échelle utilisée ?



↪ Travaillez les méthodes des automatismes p. 8

## Je consolide mes acquis

### 42 Équations du 1er degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

**a)** $2(x+4)-5=8$ **b)** $-0{,}5x+9=10$

**c)** $3x+1=5x-19$ **d)** $5-6x=3(2+2x)$

### 43 Calculs d'images et d'antécédents

La fonction $f$ est définie par $f(x)=4x+3$ pour tout nombre $x$.

**1.** Calculer et donner à l'oral les images des nombres suivants par la fonction $f$ :

**a)** 5 **b)** $-2$ **c)** 0,5 **d)** 1 000

**2.** Déterminer l'antécédent de 20 par $f$.

### 44 Calculs d'images

On considère la fonction $f$ définie par $f(x)=x^2+2x+3$ pour tout nombre $x$.

Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

| $x$ | 3 | 1 | 0 | $-2$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | |

### 45 Oral Images, antécédents et tableaux

Voici un tableau de valeurs d'une fonction $f$.

| $x$ | $-3$ | $-1$ | 0 | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 6 | 4 | 3 | 5 | 3 | 1 |

**1.** Donner, si possible, à l'oral les images de :

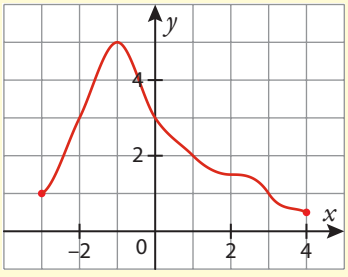
**a)** 0 **b)** 6 **c)** 5

**2.** Donner, si possible, à l'oral le (ou les) antécédent(s) de :

**a)** 6 **b)** 3 **c)** $-1$

### 46 Oral Lecture graphique

On considère une fonction $f$ dont on donne ci-dessous la représentation graphique.




**1.** Lire et donner à l'oral les images des nombres suivants :

**a)** 3 **b)** 0 **c)** $-1$

**2.** Lire et donner à l'oral les antécédents éventuels des nombres suivants :

**a)** 1 **b)** 3 **c)** 6

### 47 Fonctions affines, fonctions linéaires

**1.** Parmi les expressions ci-dessous, donner celles qui définissent des fonctions affines.

**a)** $f(x)=3x+7$ **b)** $g(x)=x^2$

**c)** $h(x)=5-8x$ **d)** $l(x)=36x$

**2.** Parmi les expressions ci-dessus, une seule est celle d'une fonction linéaire. Laquelle ?

**3.** Comment sont représentées graphiquement les fonctions affines et les fonctions linéaires ?

### 48 Modélisation avec une fonction

Samia veut louer une voiture. L'agence qu'elle a contactée lui propose un forfait de location de 35 euros avec 100 km inclus puis 15 centimes par km supplémentaires.

**1.** Exprimer le montant de la location $M(x)$ en euros, en fonction de $x$ le nombre de km supplémentaires qu'elle effectuera.

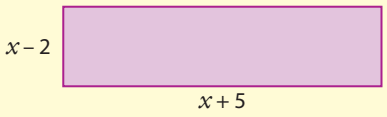
On considère ainsi une fonction $M$ définie pour tout nombre positif.

**2.** De quelle nature est la fonction $M$ ?

**3.** Le montant de la location peut-il être égal à 320 euros ? Si oui, pour combien de km supplémentaires ?

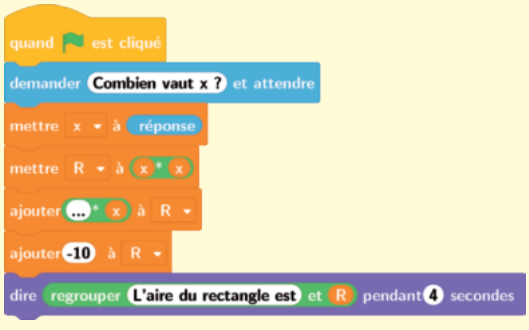
### 49 Scratch et fonction

Un rectangle a pour longueur $x+5$ et pour largeur $x-2$, sachant que $x$ est un nombre supérieur ou égal à 3.




**1.** Montrer que l'aire du rectangle est égale à $x^2+3x-10$.

**2.** On considère le programme Scratch ci-dessous qui doit afficher à la fin de son exécution l'aire du rectangle. Écrire le contenu de la case vide de la ligne 5 de ce programme afin qu'il fonctionne.



# Exercices d'entraînement

## Questions de cours

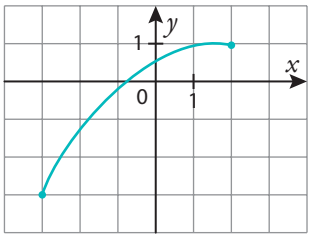
**50** **1.** Donner une équation de la courbe représentative de la fonction carré.
**2.** Comment appelle-t-on la famille de courbes à laquelle appartient la courbe représentative de la fonction carré ?
**3.** Citer les quatre fonctions de référence vues en cours, donner leur ensemble de définition puis faire un schéma de leur courbe représentative.

**51** **1.** Donner la définition de « fonction paire ».
**2.** Donner deux exemples de fonctions paires (on pourra donner une expression ou faire une courbe pour la représenter).

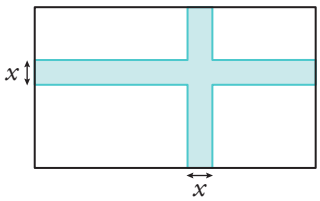
## Ensemble de définition

**52** On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = 3x^2 + 7x$ pour tout $x \in [0 ; 10]$.
Calculer, lorsque c'est possible, l'image de :
**a)** 0 **b)** 2 **c)** –2 **d)** 20,31

**53** Voici la courbe représentative d'une fonction $f$. Par lecture graphique, déterminer l'ensemble de définition de $f$.




**54** On considère un rectangle de longueur 7 et de largeur 5. On trace à l'intérieur de celui-ci une croix de largeur $x$ variable comme indiqué ci-contre.
On s'intéresse à la fonction $A$ donnant l'aire de la croix bleue en fonction de $x$.
Quel est l'ensemble de définition de $A$ ? Préciser $A(x)$.




**55** On considère le programme ci-dessous écrit en langage **Python**.

Python

```
x=float(input("Saisir une valeur de x."))
if x>=2:
    y=3*x*x-2*x+12
    print("L'image de",x,"par g est :",y)
else:
    print("Pas définie en",x)
```

Ce programme permet d'afficher l'image d'un nombre par une fonction $g$.
Donner l'ensemble de définition de $g$ puis l'expression $g(x)$.

**56** On considère la fonction $g$ définie par $g(x) = 3 + 2\sqrt{x}$ et dont l'ensemble de définition est le plus grand possible.
**1.** Qu'est-ce qui pourrait éventuellement poser un problème dans le calcul d'une image par cette fonction ?
**2.** En déduire l'ensemble de définition de $g$.

**57** Pour chacune des fonctions $f$ dont on donne les expressions ci-dessous, établir le plus grand ensemble de définition possible.

**a)** $f(x) = \dfrac{5+x}{10-x}$ **b)** $f(x) = 4\sqrt{x} - 5$
**c)** $f(x) = \sqrt{x-2}$ **d)** $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$

## Utilisation de l'équation d'une courbe

Méthode 1 p. 209

**58** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
**1.** **a)** Calculer l'image de 10 par $f$.
**b)** Le point A(10 ; 1 005) appartient-il à $\mathscr{C}_f$ ?
**2.** Calculer l'ordonnée du point B d'abscisse –2 qui appartient à la courbe représentative de $f$.

**59** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3x$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
**1.** Écrire l'équation de la courbe $\mathscr{C}_f$.
**2.** Les points suivants appartiennent-ils à $\mathscr{C}_f$ ?
**a)** A(1 ; 1) **b)** $B\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$
**c)** C(–3 ; –30) **d)** $D(-10^2 ; -170)$

**60** On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5x + 2$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère.
**1.** Le point R a pour abscisse 2 et appartient à $\mathscr{C}_g$. Quelle est son ordonnée ?
**2.** Calculer l'abscisse du point T appartenant à $\mathscr{C}_g$ tel que l'ordonnée de T soit nulle.

**61** On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{2x+4}{x+1}$ pour tout réel $x \neq -1$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
**1.** Donner une équation de $\mathscr{C}_f$.
**2.** Le point A(0 ; 5) appartient-il à $\mathscr{C}_f$ ?
**3.** Calculer l'abscisse du point B de la courbe $\mathscr{C}_f$ tel que l'ordonnée de B soit nulle.

**62** On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $g(x) = \dfrac{4x+6}{1+x}$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère.
B($x_B$ ; 5) appartient à $\mathscr{C}_g$. Déterminer l'abscisse $x_B$ du point B.

**63** On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (6x - 2)(3x + 5)$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère.
**1.** Le point $M\left(\frac{2}{3} ; 5\right)$ appartient-il à $\mathscr{C}_g$ ?
**2.** Le point R a pour abscisse 2 et appartient à $\mathscr{C}_g$. Quelle est son ordonnée ?
**3.** Calculer les abscisses des points S et T appartenant à $\mathscr{C}_g$ tels que leurs ordonnées soient nulles.

**64** Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant.
**a)** La courbe d'équation $y = x^2 + 1$ admet un unique point ayant pour ordonnée 10.
**b)** La courbe d'équation $y = x^2 + 3x + 1$ n'admet pas de point ayant une ordonnée négative.

**65** On considère une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + p$ où $p$ est un nombre réel.
Trouver $p$ sachant que A(5 ; 22) appartient à la courbe de $f$.

**66** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 15$. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative de $f$ avec les axes du repère.

**67** On considère la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x - 2)(2x - 30)$.
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative de $h$ avec les axes du repère.

**68** **1.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 1)^2 - 5$.
Déterminer les abscisses des points d'ordonnée égale à 31 appartenant à la courbe de $f$.
**2.** Même question avec $f(x) = x^2 - 7x + 31$.

**69** Dans un repère, on considère l'ensemble d'équation $3x^2 + 2y - 4 = 0$.
**1.** Montrer que le point A(–2 ; –4) appartient à cet ensemble.
**2.** B appartient à cet ensemble et son abscisse est égale à 0. Calculer l'ordonnée de B.
**3.** Montrer que cet ensemble est la courbe d'une fonction $f$ puis préciser $f(x)$.

**70** Montrer que l'ensemble d'équation $yx^2 + y - 1 = 0$ est la courbe d'une fonction $h$ puis préciser $h(x)$.

## Tracés de courbes

Méthode 2 p. 209

**71** Recopier et compléter à l'aide de la calculatrice le tableau de valeurs de la fonction h définie sur [–2 ; 2] par $h(x) = (3x + 1)(5 - x)$.

| $x$ | –2 | –1,5 | –1 | –0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | | | | | | | | |

**72** **1.** Soit la fonction $h$ définie sur [0 ; 5] par $h(x) = 4 - (x - 3)^2$.
**a)** Construire un tableau de valeurs de la fonction $h$ avec un pas de 0,5.
**b)** Tracer un repère. On prendra comme unité 1 cm pour l'axe des abscisses et 1 cm pour l'axe des ordonnées.
**c)** Tracer la courbe de la fonction $h$.
**2.** Reprendre la question **1.** avec la fonction $h : x \mapsto \dfrac{3}{x+1}$ sur [0 ; 5].

**73** On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ et dont l'ensemble de définition est le plus grand possible.
**1.** De quel nombre ne peut-on pas calculer l'image par $f$ ?
**2.** En déduire l'ensemble de définition de $f$.
**3.** Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant.

| $x$ | –5 | –3 | –2 | –1 | 0 | 2 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | |

**4.** Pour affiner ce qu'il se passe quand $x$ est proche de 1, recopier et compléter le tableau de valeurs suivant.

| $x$ | 0,5 | 0,7 | 0,9 | 1,1 | 1,3 | 1,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

**5.** Tracer la courbe de la fonction $f$ avec les points obtenus.

**74** Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction définie sur $[-4 ; -2[ \cup ]-2 ; 3]$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$.

**75** Dans un repère, on considère l'ensemble d'équation $xy = 5$.
**1.** Le point Z(2 ; 1,5) appartient-il à cet ensemble ?
**2.** Existe-il un point d'abscisse nulle appartenant à cet ensemble ?
**3.** Montrer que cet ensemble est la courbe d'une fonction $f$ puis préciser son ensemble de définition et son expression.
**4.** Tracer la courbe d'équation $xy = 5$.

## Modélisation avec une fonction

**76** Le prix de l'essence sans plomb est de 1,80 euro le litre. Marius veut faire le plein de sa voiture. Il compte mettre $x$ litres dans son réservoir vide qui peut contenir 40 litres. La station dans laquelle il se sert ne délivre pas moins de 5 litres.

On considère la fonction $P$ qui à chaque valeur de $x$ associe le prix payé par Marius.
**1.** D'après le contexte de l'exercice, à quel intervalle $x$ appartient-il ?
**2.** Quel est l'ensemble de définition de la fonction $P$ ?
**3.** Déterminer l'expression algébrique de la fonction $P$.

**77** Une fonction $f$ donne le résultat $f(n)$ en fonction du nombre de départ $n$ pour ce programme de calcul.

```
▶ Je choisis un nombre entier naturel.
▶ J'y ajoute 5.
▶ Je multiplie le résultat par le nombre
  choisi au départ.
▶ J'ajoute 3.
```

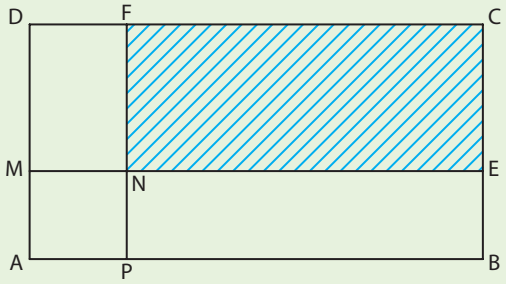
**1.** Quel est l'ensemble de définition de $f$ ?
**2.** Donner l'expression $f(n)$.

**78** Alma a 150 euros sur un compte en banque le 1er janvier 2022. Tous les ans, au 1er janvier, elle rajoute 20 euros sur celui-ci. On note $u(n)$ la somme qu'elle a sur son compte au 2 janvier 2022 + $n$.
Ainsi $u(0) = 150$ et $u(1) = 170$.
**1.** Calculer $u(3)$.
**2.** Trouver une formule pour $u(n)$ et préciser les valeurs de $n$ possibles.
**3.** Déterminer en quelle année elle pourra acheter avec l'argent de son compte une console de jeu qui coûte 350 euros.

**79** Esprit critique Eva a allumé le chauffage dans sa chambre. Au départ, la température était de 16 °C.
Eva constate que toutes les heures, la température semble augmenter de 0,7 °C.
$T$ est la fonction donnant la température de la chambre d'Eva en fonction de $n$ le nombre d'heures écoulées depuis la mise en route du chauffage.
**1.** Donner $T(0)$, $T(1)$ puis l'expression $T(n)$ d'après les constatations d'Eva.
**2.** Cette expression $T(n)$ a-t-elle du sens pour tout nombre d'heures écoulées $n$ ?

## 80 Modéliser une situation

ABCD est un rectangle tel que AB = 7 cm et AD = 4 cm. M est un point mobile du segment [AD]. AMNP est un carré et NECF est un rectangle.




**1.** Définir une fonction $h$ modélisant l'aire hachurée en fonction de la distance AM. On donnera l'ensemble de définition et l'expression algébrique de la fonction.
**2.** Construire à la calculatrice un tableau de valeurs de la fonction $h$ avec un pas de 0,5 sur l'ensemble de définition.
**3.** À quelle distance du point A peut-on placer le point M pour que l'aire hachurée soit égale à 13,75 cm² ?

↪ Résolution de problèmes p. 217

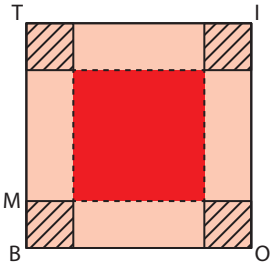
**81** Chimie La concentration massique $C_m$ d'un soluté est égale à la masse en g de soluté par litre de solution (elle s'exprime donc en gramme par litre). Elle se calcule avec la formule $C_m = \frac{m}{V}$ où $m$ est la masse en grammes de soluté et $V$ le volume en litres de la solution.
On dissout 10 g de chlorure de sodium (sel) dans un volume $V$ en litres d'eau avec $V \in [0{,}2 ; 0{,}5]$.
**1.** Écrire la formule donnant la concentration massique $C_m(V)$ du chlorure de sodium en fonction du volume $V$ de la solution.
**2.** Résoudre $C_m(V) = 30$.
**3.** Traduire le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

## 82 Décomposer un problème

ABC est un triangle rectangle en A dont les trois côtés ont pour longueurs en cm des nombres entiers. On sait que AB mesure moins de 50 cm et AC = AB + 2. Déterminer les mesures des deux triangles satisfaisant ces conditions.

↪ Résolution de problèmes p. 31

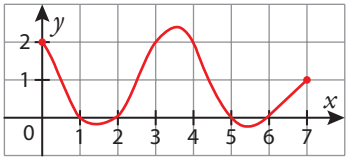
**83** Problème ouvert On considère un carré de côté 15 cm. Dans chaque coin, on découpe un même carré pour obtenir un patron d'une boîte sans couvercle.
**1.** Construire le patron de la boîte en choisissant BM = 3 cm.
**2.** En utilisant une fonction, montrer que le volume de la boîte construite peut être égal à 100 cm³ et donner les valeurs approchées des dimensions des carrés à découper permettant d'obtenir ce volume.




## Résolution d'équations et d'inéquations

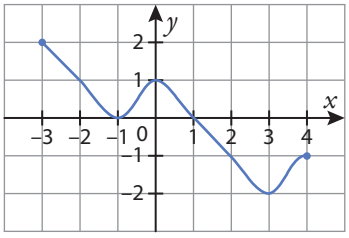
Méthode 3 p. 211

**84** Voici la courbe représentative d'une fonction $f$ définie sur [0 ; 7]. Estimer les solutions des équations :



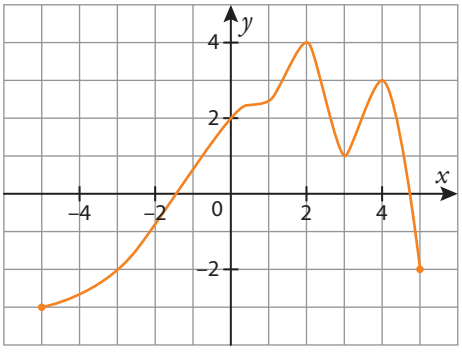

**a)** $f(x) = 2$ **b)** $f(x) = 0$ **c)** $f(x) = -1$ **d)** $f(x) = 1$

**85** Voici la courbe représentative d'une fonction $k$ définie sur [−3 ; 4]. Estimer les solutions des équations et inéquations suivantes.




**a)** $k(x) = 1$ **b)** $k(x) = 0$ **c)** $k(x) > -1$
**d)** $k(x) < 0$ **e)** $k(x) \geqslant -2$ **f)** $k(x) \geqslant 2$

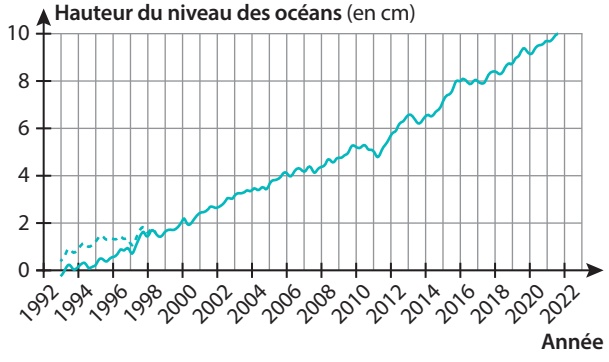
**86** Voici la courbe représentative d'une fonction $h$ définie sur [−5 ; 5]. Résoudre graphiquement :
**a)** $h(x) \geqslant 0$ **b)** $h(x) < -4$ **c)** $h(x) < -2$ **d)** $h(x) > 2$



**87** Une fonction $f$ a les propriétés suivantes :
• elle est définie sur [0 ; 8] ;
• l'équation $f(x) = 3$ a deux solutions : 1 et 3 ;
• l'image de 0 est 1 ;
• l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ a pour ensemble de solution [5 ; 7].
Tracer dans un repère une courbe possible pour la fonction $f$.

**88** Développement durable

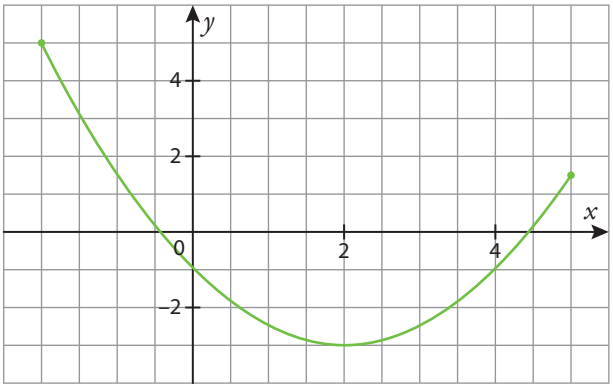
La courbe ci-dessous représente la fonction donnant la hauteur du niveau des océans par rapport à un niveau de référence en fonction du temps.




(*Source* : Copernicus Marine Service)

**1.** À partir des données mentionnées, estimer graphiquement l'année lors de laquelle le niveau des océans a dépassé 8 cm à partir de son niveau d'origine.
**2.** Pourquoi pourrait-on affirmer que ce niveau va dépasser 11 cm ?

**89** On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur [–2 ; 5] par $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 1$.




**1.** Estimer graphiquement les deux solutions de l'équation $f(x) = 1$.
**2.** Voici un tableau de valeurs de la fonction $f$.

| $x$ | 4,5 | 4,6 | 4,7 | 4,8 | 4,9 | 5,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0,125 | 0,38 | 0,645 | 0,92 | 1,205 | 1,5 |

**a)** Donner un encadrement d'une des solutions de l'équation $f(x) = 1$.
**b)** Quelle est la précision de cette approximation ?
**3.** À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au dixième près, puis au centième près de l'autre solution.

**90** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}5(x + 1)(2x - 3)$.
**1.** Construire un tableau de valeurs de $f$ pour $x$ allant de –3 à 3 avec un pas de 1.
**2.** Tracer dans un repère la courbe représentative de $f$. Prendre comme unité 1 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.
**3.** Résoudre $f(x) = 0$ graphiquement.
**4.** Résoudre $f(x) = 0$ par le calcul.

**91** Sandra a tracé à l'aide de sa calculatrice la courbe représentative de la fonction $f$ définie par $f(x) = -1{,}5x^2 + 4x + 3$ sur l'intervalle [–2 ; 4].
Elle a trouvé deux solutions à l'équation $-1{,}5x^2 + 4x + 3 = 3$, c'est-à-dire $f(x) = 3$.
**1.** À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au dixième près de ces deux solutions.
**2.** Résoudre algébriquement $f(x) = 3$ et vérifier les résultats précédents.

## Résolution d'équations avec les fonctions de référence

Méthode 4 p. 213

**92** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

**1.** **a)** $x^2 = 36$ **b)** $x^2 = -4$ **c)** $x^2 = 363$
**2.** **a)** $x^3 = -8$ **b)** $x^3 = 1\,000$ **c)** $x^3 = 34$
**3.** **a)** $\sqrt{x} = 6$ **b)** $\sqrt{x} = -4$ **c)** $\sqrt{x} = 10^4$
**4.** **a)** $\frac{1}{x} = 10$ **b)** $\frac{1}{x} = -4$ **c)** $\frac{1}{x} = 0$

**93** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
**a)** $2x^2 - 14 = 22$ **b)** $x^3 - 13 = 102$
**c)** $3\sqrt{x} = 60$ **d)** $2x^3 + 15 = 71$

**94** **1.** Déterminer les images des nombres suivants par la fonction carré.
**a)** 4 **b)** –3 **c)** $10^3$ **d)** $\frac{1}{2}$
**2.** Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants par la fonction carré.
**a)** 6 **b)** 64 **c)** –2 **d)** $10^6$

**95** **1.** Déterminer les images des nombres suivants par la fonction inverse.
**a)** 5 **b)** $10^2$ **c)** –3 **d)** $\frac{1}{4}$
**2.** Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants par la fonction inverse.
**a)** 6 **b)** 1 **c)** –2 **d)** $10^4$

**96** **1.** Déterminer si possible les images des nombres suivants par la fonction racine carrée.
**a)** 4 **b)** 18 **c)** $10^8$ **d)** –3
**2.** Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants par la fonction racine carrée.
**a)** 6 **b)** $\sqrt{5}$ **c)** –5 **d)** $10^2$

**97** **1.** Déterminer les images des nombres suivants par la fonction cube.

**a)** 2 **b)** $-3$ **c)** $10^4$ **d)** $\frac{1}{2}$

**2.** Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants par la fonction cube.

**a)** 1 **b)** 8 **c)** $10^{12}$ **d)** $-12$

**98** On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x-5)^3 = 27$.

**1.** Résoudre $X^3 = 27$.

**2.** Recopier et compléter : $(x-5)^3 = 27 \Leftrightarrow x - 5 = \ldots$.

**3.** En déduire la solution de cette équation.

## Résolution d'inéquations avec les fonctions de référence

Méthode 5 p. 213

**99** **1. a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{1}{x} = 8$.

**b)** En s'aidant d'un schéma de la courbe de la fonction inverse, résoudre $\frac{1}{x} \geqslant 8$.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

**a)** $\frac{1}{x} < 1$ **b)** $\frac{1}{x} \leqslant -2$ **c)** $\frac{1}{x} \geqslant -0{,}2$

**100** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

**a)** $x^2 \geqslant 9$ **b)** $x^2 < 5$

**c)** $x^3 < 27$ **d)** $x^3 \geqslant 8$

**e)** $\sqrt{x} \leqslant 3$ **f)** $\sqrt{x} > 9$

**101** On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^2 + 6 < 8$.

**1.** Montrer que c'est équivalent à résoudre $x^2 < 1$.

**2.** En déduire l'ensemble des solutions de $2x^2 + 6 < 8$.

**102** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

**a)** $x^2 - 5 \geqslant 3$ **b)** $4\sqrt{x} < 100$

**c)** $4x^3 + 11 < 43$ **d)** $\frac{1}{x} + 9 \geqslant -1$

**e)** $3x^2 + 1 \leqslant x^2 + 4$ **f)** $2\sqrt{x} - 1 > 17$

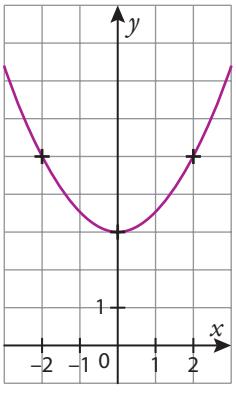
**103** On considère une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne la courbe ci-contre.

Les points de coordonnées (0 ; 3), (2 ; 5) et (−2 ; 5) appartiennent à la courbe représentative de $f$.

**1.** La fonction $f$ a une expression de la forme $f(x) = ax^2 + b$. Déterminer $a$ et $b$.

**2.** Déterminer les antécédents de 10 par $f$.

**3.** Résoudre graphiquement $f(x) \leqslant 10$.

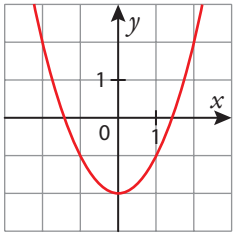



## Conjectures sur la parité d'une fonction

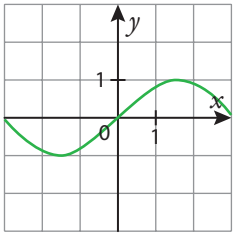
Méthode 6 p. 215

**104** Pour chacune des courbes ci-dessous, dire si elle semble être la courbe représentative d'une fonction paire, d'une fonction impaire ou d'une fonction qui n'est ni paire ni impaire.

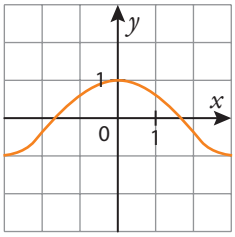
**a)**



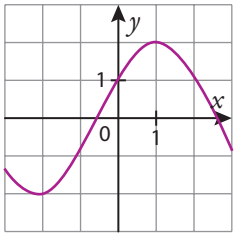

**b)**




**c)**




**d)**




**105** À l'aide de la calculatrice, conjecturer la parité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

**a)** $f(x) = x^2 + 4x + 5$ **b)** $g(x) = \frac{4}{2 + x^2}$

**106** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)(x+3)$.

**1.** Calculer les images de 4 et $-4$ par $f$.

**2.** La fonction $f$ est-elle paire ? impaire ?

**107** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - 2x^2$.

Dans un tableur on a obtenu le tableau de valeurs ci-contre.

**1.** Quelle formule a-t-on saisie en B2 et recopiée vers le bas pour obtenir cette feuille de calcul ?

**2.** Conjecturer la parité de $f$.

**3.** Justifier le résultat précédent.

Tableur

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | x | f(x) |
| 2 | -3 | -14 |
| 3 | -2 | -4 |
| 4 | -1 | 2 |
| 5 | 0 | 4 |
| 6 | 1 | 2 |
| 7 | 2 | -4 |
| 8 | 3 | -14 |

**108** Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 4x$.

**1.** Calculer les images de 1 et $-1$ par $g$.

**2.** La fonction $g$ est-elle paire ?

**3.** Le résultat de la question **1.** suffit-il à justifier que la fonction $g$ est impaire ?

**4.** Justifier que $g$ est impaire.

**109** Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3x^4 - 5$.

**1.** Conjecturer un axe de symétrie pour la courbe de la fonction $h$.

**2.** Justifier votre conjecture.

**110** Expliquer pourquoi la courbe représentative de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ admet un centre de symétrie.

## Utilisation de la parité d'une fonction

Méthode 7 p. 215

**111** On considère une fonction $f$ définie sur $[-3 ; 3]$. On sait que $f(1) = 3$, $f(2{,}5) = 4$, $f(3) = 1$ et que $f$ est paire. Tracer l'allure d'une courbe possible pour $f$.

**112** On considère une fonction $f$ définie sur $[-4 ; 4]$. On sait que $f(1) = -3$, $f(-2) = 2$, que l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0 ; –4 et 4 et que $f$ est impaire. Tracer l'allure d'une courbe possible pour $f$.

**113** **1.** Compléter le tableau suivant sachant que $g$ est une fonction impaire.

| $x$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | –1 | 0 | | 14 |

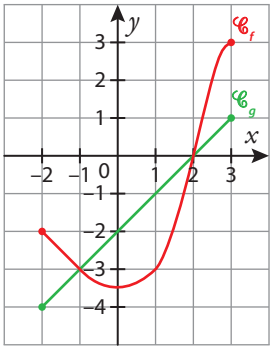
**2.** Déterminer $a$ sachant que $g(x) = ax^3 - x$ pour tout réel $x$.

**114** On considère une fonction impaire $f$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f(0) = 0$. Démo

## Résolution de $f(x) = g(x)$, $f(x) \geqslant g(x)$

Méthode 8 p. 216

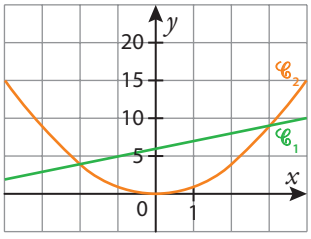
**115** Voici les courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$ définies sur $[-2 ; 3]$. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.




**a)** $g(x) = f(x)$
**b)** $g(x) \leqslant f(x)$
**c)** $g(x) > f(x)$

**116** On considère les deux fonctions affines $g$ et $h$ définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3x + 4$ et $h(x) = 6x + 1$ ainsi que leurs courbes représentatives dans un repère.
**1.** De quelle nature sont les courbes représentatives des fonctions $g$ et $h$ ? Les tracer dans un repère.
**2.** Trouver les coordonnées du point d'intersection M des courbes représentatives.
**3.** Résoudre algébriquement $g(x) > h(x)$.

**117** On considère les courbes représentatives de la fonction carré, notée $f$, et de la fonction affine $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + 6$. Elles sont tracées dans le repère ci-contre.




**1.** Repérer les courbes associées aux deux fonctions.
**2.** Résoudre graphiquement l'équation $x^2 = x + 6$.
**3.** **a)** Développer l'expression $(x - 3)(x + 2)$.
**b)** Retrouver algébriquement les résultats obtenus à la question **2.**
**4.** Résoudre graphiquement $f(x) \geqslant g(x)$.

**118** **1.** Trouver les coordonnées du ou des points d'intersection des courbes d'équations $y = 2x^2 + 2x + 6$ et $y = 2x^2 - 3x + 7$.
**2.** Même question pour les courbes d'équations $y = \dfrac{1}{x}$ et $y = \dfrac{2 + 3x}{x}$.

**119** Histoire des sciences

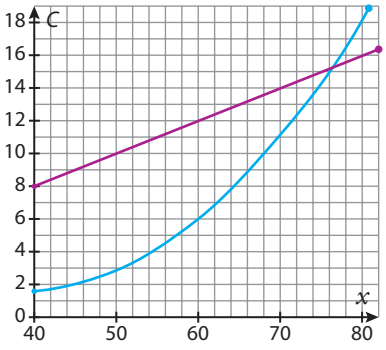
Omar Khayyam (~ 1048 ; ~ 1131)

Omar Khayyam est un savant et poète perse du XI[e] siècle. Il a pu résoudre de manière graphique certaines équations du 3[e] degré.
Considérons l'équation $x^3 - 2x - 3 = 0$.
**1.** Montrer que 0 n'est pas solution de cette équation.
**2.** Montrer que cette équation est équivalente à $x^2 - 2 = \dfrac{3}{x}$.
**3.** Tracer à la calculatrice ou à la main les courbes d'équations $y = x^2 - 2$ et $y = \dfrac{3}{x}$.
**4.** Vérifier que l'équation $x^3 - 2x - 3 = 0$ a une unique solution et en donner une valeur approchée.

## Fonctions et problèmes

**120** SES

Une entreprise fabrique des pièces détachées pour automobiles. On note $x$ le nombre de pièces fabriquées au cours d'une journée. Le coût de production, en centaines d'euros, de $x$ pièces est noté $C$. On a représenté en bleu la courbe de la fonction $C$ sur l'intervalle $[40 ; 80]$.




**1.** Répondre à l'aide du graphique.
**a)** Quel est le coût de production de 50 pièces ?
**b)** Pour un coût de production de 1 400 €, combien l'entreprise va-t-elle fabriquer de pièces ?
**2.** Chaque pièce est vendue 20 euros.
Déterminer la recette $R(x)$ en centaines d'euros de l'entreprise pour $x$ pièces fabriquées.
**3.** Vérifier que la droite tracée en violet est bien la représentation graphique de la fonction $R$.
**4.** Le bénéfice réalisé par l'entreprise, en fonction du nombre $x$ de pièces vendues, est la différence entre la recette et le coût de production.
Quel nombre de pièces l'entreprise doit-elle fabriquer et vendre pour réaliser un bénéfice positif ?

# Exercices d'entraînement

**121** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 2)(x + 3)$.

**1.** Développer $f(x)$.

**2.** Montrer que $f(x) = 2(x + 1)^2 - 8$ pour tout réel $x$.

**3.** Répondre aux questions suivantes en choisissant à chaque fois la forme la plus adaptée de $f(x)$.

**a)** Chercher les éventuels antécédents de 0 par $f$.

**b)** Chercher les éventuels antécédents de –6 par $f$.

**c)** Calculer les images de 0, de 1 et de $\sqrt{3} - 1$.

**d)** Trouver les abscisses des points de $f$ d'ordonnée égale à 8 appartenant à la courbe de $f$.

**122** Dans le cadre d'un projet, **Physique** un groupe a lancé un petit prototype de fusée. La hauteur $h$ en mètres du projectile en fonction du temps $t$ en secondes a pu être modélisée par la fonction h définie par $h(t) = 25t - 5t^2$.

**1.** Quelle est la hauteur du projectile au bout de 3 secondes ?

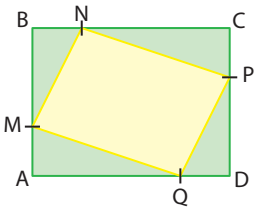
**2.** Construire un tableau de valeurs avec un pas de 0,5.

**3.** Trouver à l'aide de la calculatrice une valeur approchée, au centième de seconde près, de la durée pendant laquelle la fusée reste à une altitude supérieure ou égale à 10 m.

**4.** Au bout de combien de temps la fusée retombe-t-elle au sol ? Sur quel intervalle cette modélisation a-t-elle du sens ?

**123** On considère un rectangle ABCD de dimensions AB = 6 cm et BC = 8 cm.

Sur le côté [AB], on place un point M quelconque. On considère ensuite les points N sur [BC], P sur [CD] et Q sur [DA] tels que AM = BN = CP = DQ.

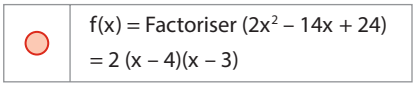



On pose AM = $x$. On appelle $f$ la fonction qui à $x$ associe la valeur de l'aire de MNPQ.

**1.** AM peut-elle prendre la valeur 7 ?
Quel est l'ensemble de définition de $f$ ?

**2.** Démontrer que $f(x) = 2x^2 - 14x + 48$.

**3.** On donne la capture d'écran ci-dessous :

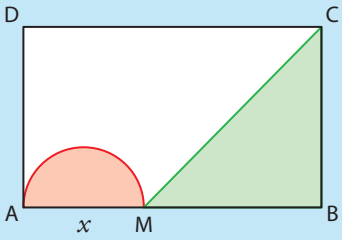



Pour quelle(s) valeur(s) de $x$ l'aire de MNPQ est-elle égale à 24 cm$^2$ ?

## À chacun son rythme

**124** Soit ABCD un rectangle. On place un point M libre sur le segment [AB]. Comme sur le schéma ci-contre, on trace un demi-cercle de diamètre [AM] et le triangle MBC. On note $x$ la distance AM.

On considère les fonctions $f$ et $g$ donnant respectivement les aires du triangle MBC et du demi-disque en fonction de $x$.




### Énoncé A

Pour l'énoncé A, on considère que AD = 4 cm et AB = 8 cm.

**1.** Calculer $f(4)$ et $g(4)$.

**2.** Donner l'ensemble de définition de $f$ et donner l'expression $f(x)$.

**3.** L'aire du triangle MBC peut-elle être égale à 10 cm$^2$ ? Si oui, pour quelle valeur de $x$ ?

### Énoncé B

Pour l'énoncé B, on considère que AD = 5 cm et AB = 10 cm.

**1.** Donner l'ensemble de définition de $f$ et $g$ puis donner les expressions $f(x)$ et $g(x)$.

**2.** Tracer à la calculatrice les courbes des fonctions $f$ et $g$.

**3.** Déterminer graphiquement la valeur de $x$ pour laquelle l'aire de MBC est égale à l'aire du demi-disque.

### Énoncé C

Le graphique ci-contre représente les aires $f(x)$ et $g(x)$ du triangle MBC et du demi-disque en fonction de $x$.

**1.** **a)** Quel est l'ensemble de définition de $f$ ? En déduire AB.

**b)** À l'aide de $f(0)$, déterminer BC.

**2.** Déterminer les expressions $f(x)$ et $g(x)$.

**3.** Donner une valeur approchée à 0,01 près de la valeur de $x$ à partir de laquelle l'aire du demi-disque devient supérieure ou égale à l'aire du triangle.

## 125 Oral Vrai ou faux ?

Dans chaque cas, $f$ désigne une fonction. À l'oral, dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

**a)** L'ensemble des nombres qui ont une image par $f$ s'appelle l'ensemble de définition de $f$.

**b)** Si la fonction $f$ a pour ensemble de définition $[0 ; +\infty[$ alors $-5$ a une image par $f$.

**c)** Si A(3 ; −7) appartient à $\mathscr{C}_f$, cela signifie que $f(3) = -7$.

**d)** Rechercher les solutions de $f(x) = k$ revient à chercher les éventuels antécédents de $k$ par $f$.

**e)** Les courbes des fonctions impaires sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

## 126 Point, courbe, inéquation

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 6$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

**1.** Le point A(−1 ; 9) appartient-il à $\mathscr{C}_f$ ?

**2.** Calculer l'ordonnée du point B d'abscisse 4 qui appartient à la courbe représentative de $f$.

**3.** Existe-il des points de $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est égale à 33 ? Si oui, donner leurs coordonnées.

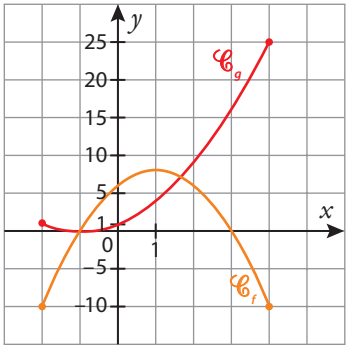
**4.** On considère la fonction $g$ définie par $g(x) = x^3 + 3x^2 - 21$ pour tout réel $x$.

**a)** Montrer que résoudre $f(x) \leqslant g(x)$ revient à résoudre $27 \leqslant x^3$.

**b)** Résoudre $f(x) \leqslant g(x)$.

## 127 Lecture et calcul

On donne les courbes représentatives de deux fonctions $f$ et $g$ sur $[-2 ; 4]$.




**A ▶ Lecture graphique**

Résoudre graphiquement :

**a)** $f(x) = -10$ **b)** $f(x) > 5$

**c)** $f(x) \leqslant 0$ **d)** $f(x) = g(x)$

**e)** $f(x) = 15$ **f)** $f(x) \leqslant g(x)$

**B ▶ Calcul algébrique**

Dans cette partie, on admet que la fonction $f$ est définie sur $[-2 ; 4]$ par $f(x) = (x + 1)(6 - 2x)$ et $g(x) = x^2 + 2x + 1$.

**1.** Développer $f(x)$.

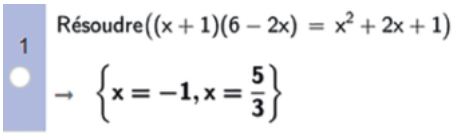
**2.** Montrer que $f(x) = -2(x - 1)^2 + 8$ pour tout réel $x$.

**3.** En utilisant la forme la plus adaptée, répondre aux questions suivantes.

**a)** Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection de la courbe de $f$ avec l'axe des abscisses.

**b)** Déterminer les antécédents de 4 par la fonction $f$.

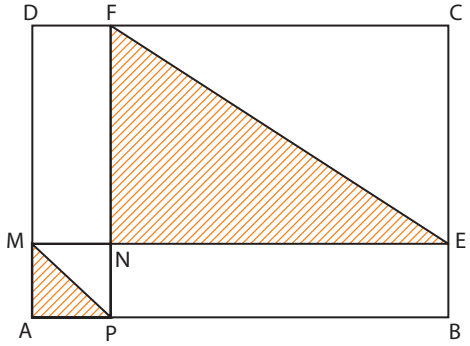
**4.** On donne la capture d'écran ci-dessous.




Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes des fonctions $f$ et $g$.

## 128 Courbe et modélisation

On considère la figure ci-dessous.




ABCD est un rectangle tel que AB = 8 cm et AD = 6 cm.

M est un point mobile du segment [AD].

AMNP est un carré et NECF est un rectangle.

$f$ est la fonction donnant l'aire de la surface hachurée en fonction de AM.

**1.** Donner l'ensemble de définition de $f$ et montrer qu'en posant $x$ = AM, on a $f(x) = x^2 - 7x + 24$.

**2.** Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant.

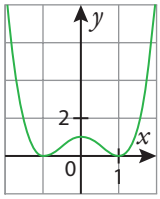
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

**3.** Tracer la courbe représentative de $f$ dans un repère. On prendra pour unité 2 cm pour 1 en abscisse et 0,5 cm pour 1 en ordonnée.

**4.** À quelle(s) distance(s) du point A peut-on placer le point M pour que l'aire hachurée soit égale à 14 cm$^2$ ?

## 129 Parité et courbe

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$.




**1.** Conjecturer la parité de $h$.

**2.** La fonction $h$ est définie par $h(x) = (x^2 - a)^2$ où $a$ est un réel.

Sachant que la courbe de $h$ passe par le point de coordonnées (1 ; 0), déterminer la valeur de $a$.

**3.** Le point B(1,5 ; 2) appartient-il à la courbe de $h$ ?

## 130 Fonction de référence et parité

**1.** On considère la fonction cube $f$.

**a)** Montrer que pour tout réel $x$, $f(-x) = -f(x)$.

**b)** Qu'en déduit-on pour la fonction cube ?

**2.** On considère la fonction $g$ telle que $g(x) = x^3$ pour tout réel positif $x$ et $g$ est paire.

Tracer la courbe de $g$ dans un repère.

# Exercices d'approfondissement

## 131 Symétrie et fonction impaire

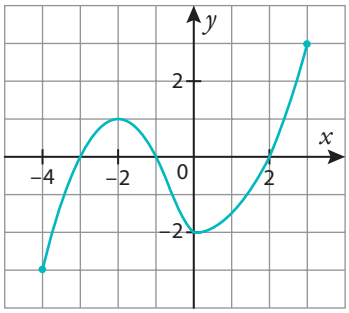
Démo

Démontrer que dans un repère orthonormé la courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

**Coup de pouce** On pourra s'appuyer sur la démonstration de la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées de la courbe d'une fonction paire (↪ Cours 5 p. 214 ).

## 132 Avec un paramètre

On considère une fonction $f$ définie sur $[-4 ; 3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.




1. Résoudre $f(x) = 0$.
2. Résoudre $f(x) = 2$.
3. Donner un nombre réel $t$, différent de 2, tel que l'équation $f(x) = t$ a une seule solution.
4. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ suivant les valeurs de $m$.

## 133 Parabole

Soit un point $A(x_A ; y_A)$ fixé avec $y_A \neq 0$ et $M(x ; y)$ dans un repère orthonormé.

1. Montrer que M est à égale distance de A et $(Ox)$ si et seulement si $y^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2$.
2. En déduire que M appartient à la courbe d'une fonction $f$ dont on donnera l'expression en fonction de $x_A$ et $y_A$.

## 134 Équation à trouver

Défi

Dans un repère, une courbe a une équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$ où $a$, $b$ et $c$ sont trois nombres réels.
Trouver les trois nombres $a$, $b$ et $c$ sachant que la courbe passe par les points A(0 ; 4) ; B(2 ; 9) et C(−4 ; 42).

## 135 Analyser un problème

On considère la fonction $f$ qui à tout nombre entier naturel associe la somme de ses chiffres.

1. Déterminer $f(13\,717)$.
2. Proposer un antécédent de 22 par $f$.
3. Combien de nombres de l'intervalle $]0 ; 10\,000]$ sont des antécédents de 3 par $f$ ? Expliquer.
4. Est-ce que tout entier naturel peut être le résultat de ce processus ?

↪ Résolution de problèmes p. 274

## 136 Vrai ou faux ?

Logique

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - a)^2 + 4$ où $a$ est un paramètre ($a$ un nombre réel quelconque).
Pour chacune des propositions ci-dessous, dire, en justifiant, si elle est vraie.

**a)** Si $f(x) = 4$ alors $x = a$.
**b)** Pour toute valeur de $a$, l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions.
**c)** Pour toute valeur de $a$, le point de coordonnées $(3a ; 4(1 + a^2))$ appartient à la courbe de $f$.
**d)** Il existe une valeur de $a$ pour laquelle la fonction $f$ est paire.

## 137 Lien des fonctions carré et racine carrée

1. Dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, tracer la représentation de la fonction racine carrée sur $[0 ; 9]$.
2. Tracer la droite $\Delta$ d'équation $y = x$.
3. Tracer la courbe symétrique par rapport à la droite $\Delta$ de la représentation graphique de la fonction racine carrée.
4. Cette courbe est une portion de la courbe d'une fonction connue. Laquelle ?
5. **a)** Pour tout réel $x$ positif, que vaut $\sqrt{x^2}$ ?
**b)** Pour tout réel $x$ positif, que vaut $\left(\sqrt{x}\right)^2$ ?

**Remarque** On dit que les fonctions carré et racine carrée sur $[0 ; +\infty[$ sont réciproques. Graphiquement, cela se traduit par la symétrie observée dans l'exercice.

## 138 Équation avec une racine carrée

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3x + 1} = 2$.

# Vers la 1re

## 139 Vers la Spécialité Maths

**Point cours**

Pour $h \neq 0$, le taux d'accroissement d'une fonction $f$ entre $a$ et $a + h$ est donné par $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

On considère la fonction carré $f$.

1. Calculer $f(a + h)$ en fonction de $a$ et $h$.
2. Montrer que le taux d'accroissement de $f$ entre $a$ et $a + h$ est égal à $2a + h$.

## 140 Vers STMG STL STID

Soit $u$ la fonction qui à tout entier naturel $n$ associe $u(n) = 3 \times 2^n$.

1. Calculer $u(1)$ et $u(2)$.
2. Exprimer $u(n + 1)$ en fonction de $n$.
3. Trouver à l'aide de la calculatrice la valeur de $n$ pour laquelle on a $u(n) = 96$.
4. Édith dit que $u(n)$ ne peut pas être supérieur à 1 000. Que peut-on en penser ?

# Préparer le contrôle — Je révise

Objectif

## 1 Utiliser la courbe d'une fonction

On considère une fonction $f$ définie sur un ensemble de définition $\mathcal{D}$.

### Courbe et équation d'une courbe

- Dans un repère, la **courbe représentative** de $f$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;y)$ tels que $x \in \mathcal{D}$ et $y = f(x)$.
- On dit que la courbe a pour équation $\boldsymbol{y = f(x)}$.

### Appartenance d'un point à une courbe

- On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$.

$A(x_A\,;y_A)$ appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si $\boldsymbol{y_A = f(x_A)}$.

- L'équation $y = f(x)$ de la courbe est une condition d'appartenance à cette courbe.

Cela permet de tracer les courbes de fonctions.

### Résolution graphique

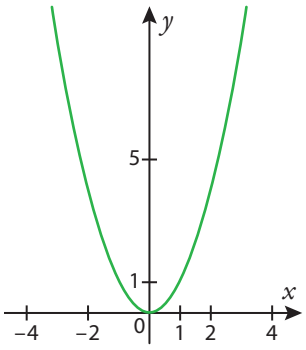
On peut **résoudre graphiquement des équations et inéquations** avec les courbes représentatives des fonctions.

Objectif

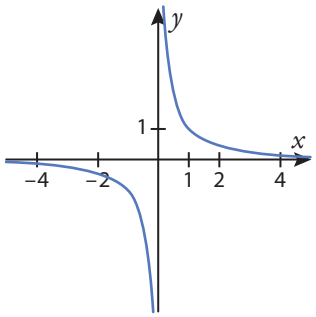
## 2 Connaître et utiliser les fonctions de référence

### Quatre fonctions de référence

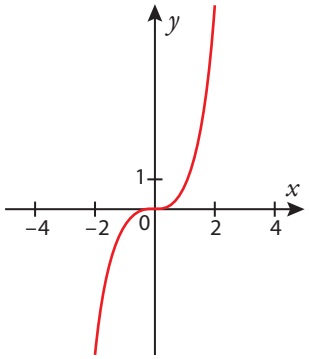
- **Fonction carré** définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = x^2}$.




- **Fonction inverse** définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{x}}$.

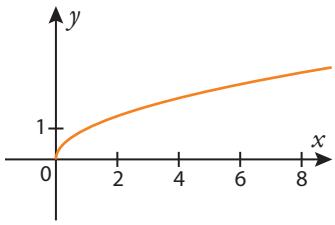



- Fonction **cube** définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = x^3}$.




Pour tout nombre réel $k$, la solution de $x^3 = k$ est la racine cubique de $k$.

- Fonction **racine carrée** définie sur $[0\,;+\infty[$ par $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$.




Pour tout réel $k \geqslant 0$, la solution de $\sqrt{x} = k$ est $x = k^2$.

Il n'y a pas de solution si $k < 0$.

### Résolution d'équations et inéquations

En combinant les résultats sur les équations et les lectures graphiques, on peut résoudre des équations et inéquations de la forme $x^2 \leqslant 4$, etc.

Objectif

## 3 Reconnaître et utiliser la parité

### Fonction paire

- Une fonction $f$ d'ensemble de définition $\mathcal{D}$ est **paire** si pour tout réel $x$ de $\mathcal{D}$ on a $-x \in \mathcal{D}$ et $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$.
- La courbe représentative d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

### Fonction impaire

- Une fonction $f$ d'ensemble de définition $\mathcal{D}$ est **impaire** si pour tout réel $x$ de $\mathcal{D}$ on a $-x \in \mathcal{D}$ et $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$.
- La courbe représentative d'une fonction impaire est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

Objectif

## 4 Modéliser avec une fonction

Lorsqu'une grandeur dépend d'une autre, on peut **modéliser** la situation à l'aide d'une **variable** et d'une **fonction** qui associe un nombre à chaque valeur prise par la variable.

# Préparer le contrôle — Je me teste

**QCM INTERACTIF**
Tester ses connaissances
www.lienmini.fr/8270-25

## QCM Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Objectif 1

### 1 Utiliser la courbe d'une fonction

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **141** Soit $f : x \mapsto 2x^2 + 3x$ définie sur $\mathbb{R}$. Parmi les points suivants, lesquels appartiennent à la courbe représentative de $f$ ? | A(–1 ; –1) | B(0 ; 3) | C(–2 ; –14) | D(1,5 ; 9) |
| **142** Soit $g : x \mapsto 2(x-1)^2 - 5$ définie sur $\mathbb{R}$. Quelle est l'ordonnée du point A d'abscisse 3 qui appartient à $\mathscr{C}_g$ ? | 11 | 3 | –5 | 2 |
| **143** Soit $f : x \mapsto ax^2$ définie sur $\mathbb{R}$ où $a$ est un nombre réel. Sachant que C(1 ; 3) appartient à $\mathscr{C}_f$, la valeur de $a$ est : | –3 | 1 | –1 | 3 |

Objectif 2

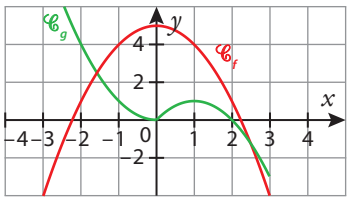
### 2 Connaître et utiliser les fonctions de référence

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **144** La ou les solutions de $x^3 = -27$ sont : | 3 | –3 | 81 | –81 |
| **145** L'antécédent de 5 par la fonction racine carrée est : | –5 | $\sqrt{5}$ | 25 | 2,5 |
| **146** L'ensemble des solutions de $x^3 < 125$ est : | $]-\infty ; 5[$ | $]-\infty ; 5]$ | $]-\infty ; \sqrt[3]{125}[$ | $]5 ; +\infty[$ |

Objectif 3

### 3 Reconnaître et utiliser la parité

**Pour les exercices 147 et 148, on considère les deux courbes ci-contre.**

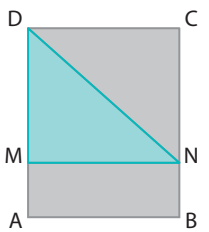



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **147** Quelle(s) proposition(s) semble(nt) vraie(s) ? | $f$ est paire. | $f$ est impaire. | $f$ est ni paire, ni impaire. | $\mathscr{C}_f$ a un axe de symétrie. |
| **148** Quelle(s) proposition(s) semble(nt) vraie(s) ? | $g$ est paire. | $g$ est impaire. | $g$ est ni paire, ni impaire. | $\mathscr{C}_g$ a un axe de symétrie. |
| **149** $g$ est une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$ telle que $g(-3) = 5$. Alors : | $g(0) = 0$ | $g(3) = 5$ | $g(3) = -5$ | la courbe de $g$ passe par l'origine |

Objectif 4

### 4 Modéliser avec une fonction

**Pour les exercices 150 et 151, ABCD est un rectangle tel que AB = 4 et AD = 5. M est un point du segment [AD] et N est le point de [BC] tel que ABNM soit un rectangle. On pose $x$ = AM. On modélise l'aire du triangle DMN en fonction de $x$ par une fonction $f$.**




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **150** L'ensemble de définition de $f$ est : | [0 ; 4] | [0 ; 5] | 5 | [AD] |
| **151** Une expression algébrique de $f$ est : | $4x$ | $(5-x)x$ | $10-2x$ | $20-4x$ |

↪ Corrigés p. 390

# Préparer le contrôle — Je m'entraîne

## Parcours différenciés

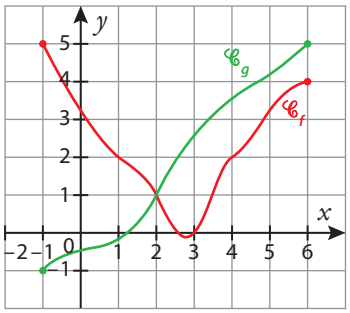
| | Objectif 1 | Objectif 2 | Objectif 3 | Objectif 4 |
|---|---|---|---|---|
| Parcours A | 1 3 85 152 | 7 155 | 11 158 | 54 161 |
| Parcours B | 5 61 74 153 | 9 93 156 | 13 106 159 | 80 162 |
| Parcours C | 15 85 116 154 | 101 157 | 106 113 160 | 80 163 |

## Exercices

### Objectif 1 Utiliser la courbe d'une fonction

**152** On considère la fonction $f$ définie sur $[0 ; 3]$ par $f(x) = x^2 - 2x$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
**1.** Tracer la courbe de $f$ dans un repère.
**2.** Le point A(1,2 ; –0,9) appartient-il à $\mathscr{C}_f$ ?

**153** On considère deux fonctions $f$ et $g$ définies sur $[-1 ; 6]$. Voici leurs courbes représentatives dans un repère.
Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.




**a)** $f(x) = 2$ **b)** $f(x) = 4$ **c)** $f(x) < 2$
**d)** $f(x) \geqslant 1$ **e)** $f(x) = g(x)$ **f)** $g(x) > f(x)$

**154** Trouver les coordonnées du ou des points d'intersection des courbes d'équation $y = \dfrac{2x}{x-5}$ et $y = \dfrac{4x+2}{2x+3}$.

### Objectif 2 Connaître et utiliser les fonctions de référence

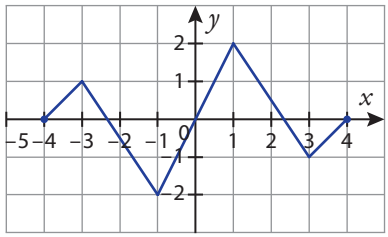
**155** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
**a)** $x^3 = -8$ **b)** $\dfrac{1}{x} = 6$ **c)** $\sqrt{x} = 8$

**156** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
**a)** $x^2 < 10$ **b)** $\dfrac{1}{x} < 10$ **c)** $x^3 > 10$

**157** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
**a)** $8x^3 - 12 > 15$ **b)** $4\sqrt{x} - 2 > 0$

### Objectif 3 Reconnaître et utiliser la parité

**158** Conjecturer la parité de la fonction dont on donne ci-contre la représentation graphique.




**159** Tracer la courbe possible d'une fonction $f$ sachant que $f$ est définie sur $[-4 ; 4]$, que $f$ est impaire et que $f(-1) = 1$.

**160** Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 + (x^3 + 1)^2$.
**1.** Calculer les images de 1 et –1 par $f$.
**2.** La fonction $f$ est-elle paire ?

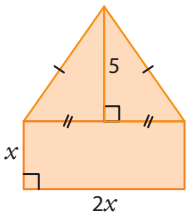
### Objectif 4 Modéliser avec une fonction

**161** On considère le programme de calcul suivant qui donne le résultat $f(x)$ en fonction de $x$.

```
▶ Je choisis un nombre x entre 0 et 10.
▶ J'y ajoute 5.
▶ Je mets le résultat au carré.
```

Donner l'ensemble de définition de $f$ puis l'expression $f(x)$.

**162** $f$ est la fonction donnant l'aire de la figure ci-contre en fonction de $x$.
Donner son ensemble de définition et l'expression $f(x)$.




**163** ABCD est un rectangle tel que AB = 9 – AD.
En utilisant une fonction, déterminer les valeurs de AD pour lesquelles l'aire de ABCD est supérieure ou égale à 18.

↪ Corrigés p. 390

# Travaux pratiques

30 min — Chercher — Calculer

## 1 Tableaux de valeurs, courbes et calculatrices

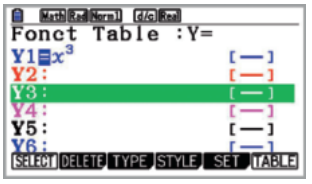
On considère la fonction $f$ définie sur [0 ; 10] par $f(x) = x^3$.
On souhaite donner un encadrement entre deux entiers consécutifs de la (ou des) solution(s) de l'équation $f(x) = 100$.

### A ▸ Construction d'un tableau de valeurs

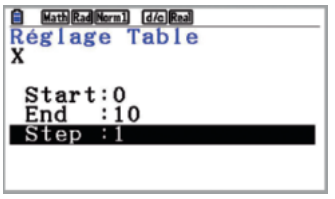
Dans cette partie, on va construire avec la calculatrice un tableau de valeurs de la fonction $f$ pour $x$ entre 0 et 10 avec un pas de 1 (ce qui signifie que les valeurs de $x$ vont de 1 en 1).

#### Casio Graph 90+E

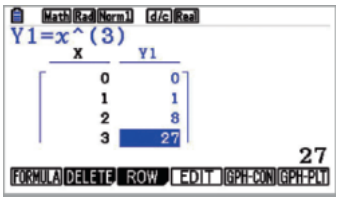
On appuie sur la touche MENU et on choisit **Table**.
On saisit l'expression de la fonction. $x$ est obtenu avec la touche X,θ,T. On valide avec la touche EXE.




On donne les caractéristiques de $x$ pour le tableau en choisissant **SET** avec la touche F5.
**Start** correspond à la plus petite valeur de $x$, **End** à la plus grande et **Step** au pas.

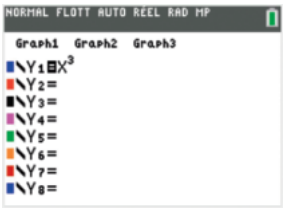



On ressort avec la touche EXIT puis on choisit **Table** avec la touche F6 pour obtenir le tableau de valeurs.



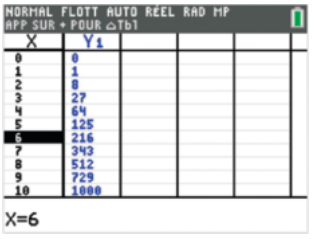

#### TI-83 Premium CE

On appuie sur la touche f(x).
On saisit l'expression de la fonction. X est obtenu avec la touche X,T,θ,n. On valide avec la touche entrer.



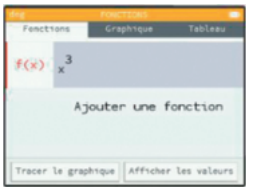

On donne les caractéristiques de $x$ pour le tableau en choisissant **déf table** avec les touches 2nde puis fenêtre (déf table f2).
**DébutTbl** correspond à la plus petite valeur de $x$ et **ΔTbl** au pas.

On choisit **Table** avec les touches 2nde puis graphe (table f5) pour obtenir le tableau de valeurs.



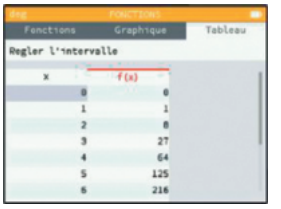

#### Numworks

On appuie sur la touche maison puis on choisit l'application **Fonctions**.
On saisit l'expression de la fonction. $x$ est obtenu avec la touche cut x,n,t. On valide avec la touche EXE.




On choisit ensuite la rubrique **Tableau** à l'aide des flèches.
On donne les caractéristiques de $x$ pour le tableau dans la rubrique **Régler l'intervalle**.
**X début** correspond à la plus petite valeur de $x$ et **X fin** à la plus grande.

On valide pour obtenir le tableau.



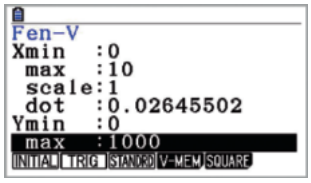

Dans un premier temps, on peut observer grâce au tableau de valeurs que les images semblent avoir 0 comme valeur minimale (pour $x = 0$) et 1 000 comme valeur maximale (pour $x = 10$).
**Attention :** Ce n'est pas forcément à partir des valeurs de Xmin et Xmax que les valeurs de Ymin et Ymax sont déterminées. Il faut parcourir le tableau pour les évaluer.

## B ▸ Affichage d'une courbe

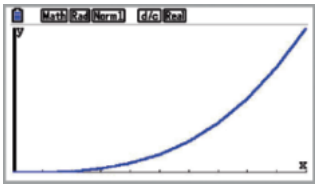
Pour afficher la courbe sur l'écran de la calculatrice, suivre les instructions suivantes selon le modèle de calculatrice.

### Casio Graph 90+E

On appuie sur la touche MENU et on choisit **Graphe**.
Si elle n'est pas présente, on saisit l'expression de la fonction.
On règle la fenêtre graphique en choisissant **V-Window** avec la touche SHIFT puis F3.
On choisit les valeurs minimales et maximales de $x$ : Xmin = 0 et Xmax = 10. Xscale = 1 est la graduation sur l'axe des abscisses.
On choisit les valeurs minimales et maximales de $y$ : on peut prendre Ymin = 0 et Ymax = 1 000 (voir la remarque ci-dessous).
On choisit Yscale = 100 pour avoir une graduation adaptée sur l'axe des ordonnées.

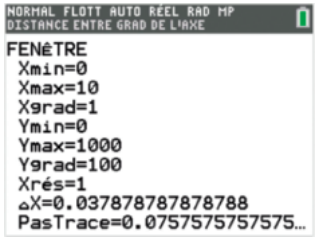



On ressort avec la touche EXIT puis on choisit DRAW avec la touche F6 pour obtenir la courbe.

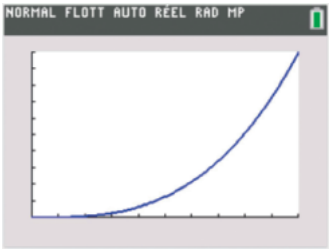



### TI-83 Premium CE

On appuie sur la touche f(x).
Si elle n'est pas présente, on saisit l'expression de la fonction.
On règle la fenêtre graphique en appuyant la touche fenêtre.
On choisit les valeurs minimales et maximales de $x$ : Xmin = 0 et Xmax = 10. Xgrad = 1 est la graduation sur l'axe des abscisses.
On choisit les valeurs minimale et maximale de $y$ : on peut prendre Ymin = 0 et Ymax = 1 000 (voir la remarque ci-dessous).
On choisit Ygrad = 100 pour avoir une graduation adaptée sur l'axe des ordonnées.

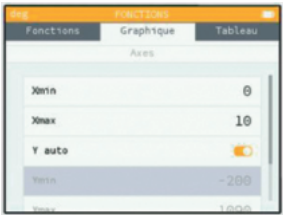



On appuie sur la touche graphe pour obtenir la courbe.




### Numworks

On utilise l'application **Fonctions**.
Si elle n'est pas présente, on saisit l'expression de la fonction.
On choisit ensuite la rubrique **Graphique** à l'aide des flèches.
On donne les caractéristiques de la fenêtre graphique en sélectionnant **Axes**.
On choisit les valeurs minimales et maximales de $x$ : Xmin = 0 et Xmax = 10.
Puis on choisit Y auto.




On valide pour obtenir la courbe.

## C ▸ Bilan

**1.** D'après la courbe obtenue avec la calculatrice, combien de solution(s) a l'équation $f(x) = 100$ ?

**2.** Donner un encadrement de cette (ou ces) solution(s) entre deux entiers consécutifs.

**3.** Modifier le tableau de valeurs de la fonction avec un pas de 0,5.
Que peut-on en déduire pour la solution de l'équation $f(x) = 100$ ?

**Remarque**

• En général, pour régler la fenêtre des courbes représentatives, on prend une valeur plus petite que la plus petite des images et une valeur plus grande que la plus grande des images pour mieux observer la courbe. C'est pourquoi on peut par exemple choisir Ymin = –100 au lieu de 0 et Ymax = 1 100 au lieu de 1 000.

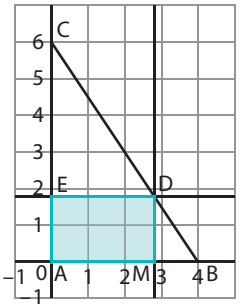
**4.** Pour aller plus loin Conjecturer à l'aide de la calculatrice le nombre de solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

# Travaux pratiques

Géométrie dynamique — 45 min — Chercher — Modéliser

## 2 Étude d'une aire

On considère la figure ci-contre. ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 et AC = 6.
M est un point mobile du segment [AB].
D est le point d'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par M et de la droite (BC).
E est le point d'intersection de la perpendiculaire à (AC) passant par D et de la droite (AC).




### A ▸ Avec GeoGebra

**1.** Construire la figure ci-contre avec GeoGebra en tenant compte des indications précédentes.

**2.** À quelles distances du point A peut-on placer le point M afin que l'aire du rectangle AMDE soit inférieure ou égale à 4,5 ?

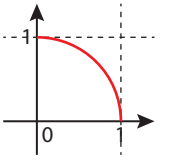
### B ▸ Avec des fonctions

En utilisant la représentation graphique d'une fonction bien construite, déterminer à quelles distances du point A on peut placer le point M afin que l'aire du rectangle AMDE soit inférieure ou égale à 4,5.

Python — 40 min — Représenter — Calculer

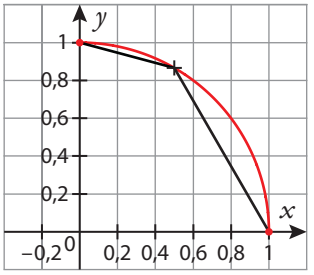
## 3 Longueur d'une portion de courbe

On considère la fonction $f$ définie sur [0 ; 1] par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ dont on donne la courbe représentative ci-contre.

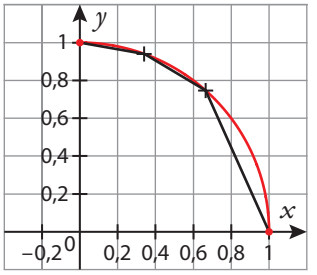


On souhaite déterminer une valeur approchée de la longueur de cette courbe. La méthode proposée consiste à approcher la courbe de la fonction par des petits segments dont les extrémités sont des points de la courbe puis à sommer les longueurs de ces segments.
Pour cela, on divise l'ensemble de définition [0 ;1] en $n$ intervalles (d'amplitude $\frac{1}{n}$) et on place les points de la courbe dont les abscisses sont les bornes de ces intervalles. On calcule la somme des longueurs de ces segments.
Plus $n$ augmente, plus il y a de segments, qui se rapprochent de la courbe, plus la somme des longueurs va s'approcher de la longueur de la courbe.

Pour $n = 2$



Pour $n = 3$



**1.** Ouvrir le programme en langage **Python** dans la console Python.

**2.** Que fait la fonction `distance` ?

**3.** À quoi sert la ligne 16 du programme ? On pourra faire un schéma en s'appuyant sur le graphique ci-dessus où $n = 2$.

**CONSOLE PYTHON**
**Longueur d'une portion de courbes**
www.lienmini.fr/8270-py7

**4.** Modifier ce programme pour qu'il affiche le résultat si on traçait 1 000 segments.

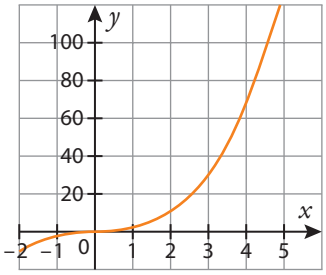
**5.** Sachant que la courbe de la fonction $f$ est un quart de cercle de rayon 1, de quel nombre l'ordinateur affiche-t-il une valeur approchée ?

**6.** Pour aller plus loin Modifier le programme précédent pour qu'il affiche une valeur approchée de la longueur de la portion de la parabole d'équation $y = x^2$ pour $x$ compris entre –1 et 1.

60 min Raisonner Chercher

# 4 Méthode par balayage et par dichotomie

L'objectif de ce TP est d'utiliser deux méthodes de recherche de solutions approchées : la méthode par balayage et la méthode par dichotomie.
Dans les parties A et B, on cherche une valeur approchée de la solution de l'équation (E) $x^3 + x = 100$.
On pourra observer et admettre que l'unique solution $\alpha$ de l'équation (E) se trouve dans l'intervalle [4 ; 5].




## A ▸ Méthode par balayage

**1. a)** Du tableau de valeurs ci-dessous, quel encadrement déduit-on pour $\alpha$ ?

| $x$ | 4 | 4,1 | 4,2 | 4,3 | 4,4 | 4,5 | 4,6 | 4,7 | 4,8 | 4,9 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^3 + x$ | 68 | 73,02 | 78,29 | 83,81 | 89,58 | 95,63 | 101,94 | 108,52 | 115,39 | 122,55 | 130 |

**b)** Quelle est la précision obtenue ?

**2.** Réaliser un tableau de valeurs de $x^3 + x$ sur l'intervalle trouvé à la question **1.** avec un pas de 0,01.
Quel encadrement de $\alpha$ trouve-t-on? Quelle est la précision obtenue ?

**3.** Poursuivre la méthode pour donner un encadrement à $10^{-3}$ près de $\alpha$.

## B ▸ Méthode par dichotomie Python

La méthode de la dichotomie suit le principe suivant : au lieu d'établir un tableau de valeurs avec un pas fixe sur un intervalle $[a\,;\,b]$ qui contient la solution, il s'agit de partager l'intervalle en deux intervalles de moindre amplitude : $[a\,;\,c]$ et $[c\,;\,b]$, de repérer celui des deux qui contient la solution puis de recommencer avec cet intervalle qui contient la solution.

En général, on choisit $c$ au milieu de $a$ et $b$, c'est-à-dire $c = \dfrac{a+b}{2}$.

**1.** On considère le programme en langage **Python** ci-dessous.

```
a=4
b=5
while b-a>10**(-1):
    c=(a+b)/2
    if c**3+c>100:
        b=c
    else:
        a=c
print(a)
print(b)
```

| | Initialisation | | | |
|---|---|---|---|---|
| $c$ | X | 4,5 | 4,75 | ... |
| $c^3 + c$ | X | 95,625 | ... | ... |
| $a$ | 4 | 4,5 | ... | ... |
| $b$ | 5 | 5 | ... | ... |
| $b - a$ | 1 | 0,5 | ... | |
| Condition $b - a > 10^{-1}$ | Vérifiée | Vérifiée | | |

Recopier le tableau ci-dessus. Faire fonctionner le programme pas à pas, à la main sans l'écrire, vérifier les premières valeurs et compléter le tableau d'états des variables en rajoutant des colonnes si nécessaire.

**2.** Combien de tests « $b - a > 10^{-1}$ » ont été effectués pour obtenir un encadrement à $10^{-1}$ près de $\alpha$ ?

**3. a)** Que faut-il modifier dans ce programme pour obtenir un encadrement de la solution de l'équation (E) à $10^{-3}$ près ?
**b)** Écrire ce programme dans la console Python et donner un encadrement de la solution à $10^{-3}$ près.

**4.** Pour aller plus loin **a)** Combien de tests « $b - a > 10^{-3}$ » ont été effectués pour obtenir un encadrement à $10^{-3}$ près de $\alpha$ ?

**b)** Oral Présenter à l'oral des avantages et des inconvénients de chacune des deux méthodes.

# 9

# Variations et extremums

## Les maths au quotidien

L'étude des **variations et des extremums** de fonctions permet de suivre l'évolution de populations animales. On peut ainsi réaliser des prédictions concernant la croissance ou la décroissance pour protéger certaines espèces.

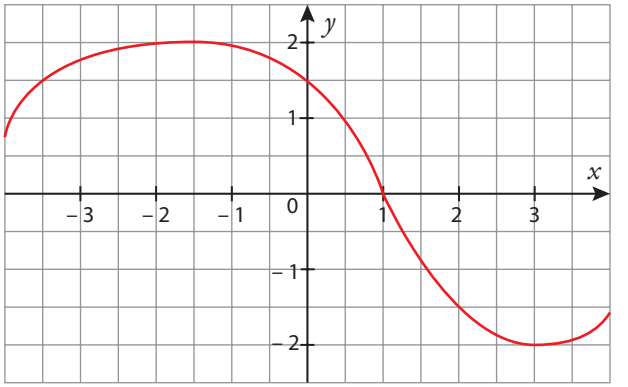
# Pour prendre un bon départ

EXERCICES Sésamath
Réviser ses acquis
www.lienmini.fr/8270-s18

## 1 Lectures graphiques

Vu au collège · Vu au chap 8

La représentation graphique d'une fonction est donnée ci-dessous.




**1.** Déterminer les images de 2 et de –3,5 par la fonction *f*.
**2.** Déterminer les éventuels antécédents de 1,5 et de 2 par *f*.

## 2 Calculer une image par une fonction

Vu au collège · Vu au chap 8

*g* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 1$.
**1.** Déterminer $g(2)$ et $g(-3)$.
**2.** Déterminer les éventuels antécédents de 0 et de 1 par *g*.

## 3 Reconnaître une fonction

Vu au chap 8

Associer à chaque fonction sa courbe représentative dans un repère.

$f : x \mapsto x^2$

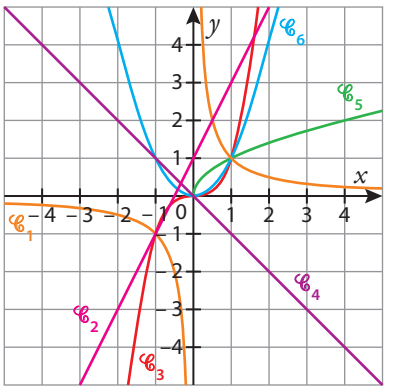
$g : x \mapsto 2x + 1$

$h : x \mapsto -x$

$k : x \mapsto x^3$

$m : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

$n : x \mapsto \sqrt{x}$




## 4 Travailler avec les inégalités

Vu au chap 8

**1.** Résoudre les inéquations suivantes.
**a)** $2x + 4 \geqslant 0$ **b)** $-4x + 6 > -x + 18$
**2.** Donner un encadrement de $-2x + 3$ lorsque :
**a)** $0 < x < 5$ **b)** $x \in ]-2 ; 5]$

CORRIGÉS www.lienmini.fr/8270-26

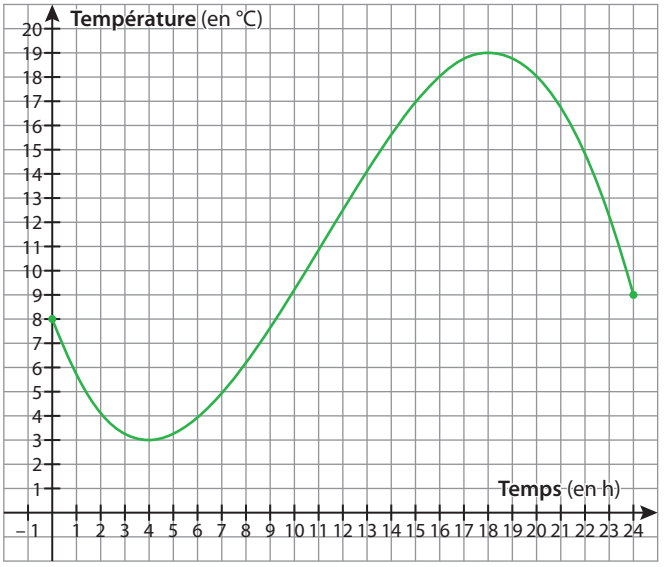
# Activités

20 min

## 1 Étude des variations d'une fonction

### A ▸ Description

On étudie l'évolution de la température au cours d'une journée.




**1.** Sur quel(s) moment(s) de la journée la température :
**a)** augmente-elle ? **b)** diminue-t-elle ?

**2.** Soit $f$ la fonction définie sur [0 ; 24] qui donne la température au moment $t$ donné en heure. Recopier et compléter :
« Sur l'intervalle ..., la fonction $f$ est croissante.
Sur les intervalles [0 ; 4] et [18 ; 24], la fonction $f$ est .... »

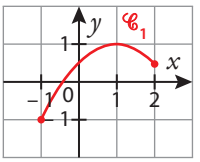
### B ▸ Tableau de variations

Les variations de la fonction définie dans la partie précédente peuvent se résumer dans le tableau ci-contre.

| $x$ | 0 | | 4 | | 18 | | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 8 | ↘ | 3 | ↗ | 19 | ↘ | 9 |

**1.** Associer à chaque courbe de gauche sa fonction dont on donne le tableau de variations à droite.

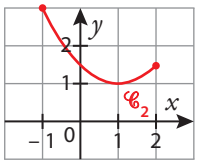
**a)**




①

| $x$ | −1 | | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | 3 | ↘ | 1 | ↗ | 1,5 |

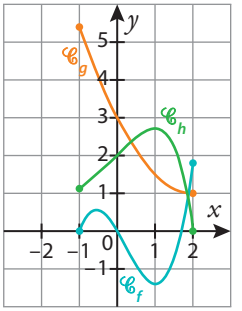
**b)**




②

| $x$ | −1 | | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | −1 | ↗ | 1 | ↘ | 0,5 |

**2.** Dresser le tableau de variations des trois fonctions $f$, $g$ et $h$ dont voici les courbes représentatives.




### C ▸ Pour aller plus loin

Pour une fonction $f$ croissante sur un intervalle I, comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$ pour $x_1$ et $x_2$ deux réels de I tels que $x_1 \leqslant x_2$. Faire de même pour une fonction $f$ décroissante.

↪ Cours 1 p. 240

15 min

## 2 Variations des fonctions affines

On considère les fonctions affines $f$, $g$ et $h$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = -0{,}5x + 2$ et $h(x) = 4$.

**1.** Tracer dans un repère leur droite représentative et conjecturer leur sens de variation.

**2.** Soit $x \mapsto ax + b$ une fonction affine. Généraliser les conjectures précédentes en distinguant les cas selon le signe de $a$.

**3.** Pour aller plus loin Démontrer les énoncés de la question **2.**

↪ Cours 2 p. 242

Géométrie dynamique 25 min

## 3 Variations des fonctions de référence

Le but de cette activité est de tracer les tableaux de variations de fonctions de référence.

**1. a)** On considère la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

À l'aide d'un logiciel, ou d'une calculatrice, tracer la courbe de la fonction carré.

**b)** Compléter le tableau de variations ci-contre.

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x \mapsto x^2$ | … | … | |

**2.** En procédant de la même manière, dresser le tableau de variations des fonctions suivantes.

**a)** La fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}+$ par $x \mapsto \sqrt{x}$.

**b)** La fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$.

**c)** La fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

**3.** **Pour aller plus loin** Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $0 \leqslant a < b$.

**a)** Montrer que $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \dfrac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$.

**b)** Démontrer que la fonction racine carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

↪ Cours 4 p. 244

Géométrie dynamique 30 min

## 4 Extremum d'une fonction

Une entreprise produit et vend des bonnets de bain. Le prix de vente unitaire peut être fixé entre 1 € et 10 €. En fonction de celui-ci, le nombre de ventes et la recette journalière varient.

Le gérant modélise l'évolution de la recette journalière, en milliers d'euros, en fonction du prix de vente par une fonction $f$ définie sur $[1 ; 10]$ par : $f(x) = -x^2 + 10x$.

**1. a)** Tracer sa courbe représentative à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ou d'une calculatrice.

**b)** En déduire la plus grande image par la fonction $f$. Préciser pour quelle valeur de $x$ cette image maximale est atteinte.

**2. a)** Montrer que $f(x) = -(x-5)^2 + 25$ pour tout $x$ de $[1 ; 10]$.

**b)** Montrer que $f(x) \leqslant 25$ pour tout $x$ de $[1 ; 10]$.

**c)** Calculer $f(5)$.

**d)** Que vient-on de justifier ?

**3.** Proposer une définition du maximum d'une fonction.

**4.** **Pour aller plus loin**

**a)** Donner la définition du minimum d'une fonction, sur le modèle de la question **3.**

**b)** Déterminer le minimum de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 6x + 15$.

**Coup de pouce** Montrer que $g(x) = (x-3)^2 + 6$.

↪ Cours 3 p. 242

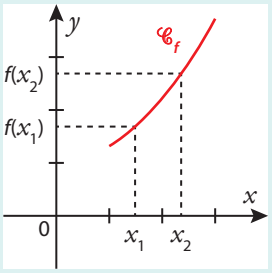
# 1 Variations d'une fonction

**Définition** **Fonction croissante et fonction décroissante**

**Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I.**

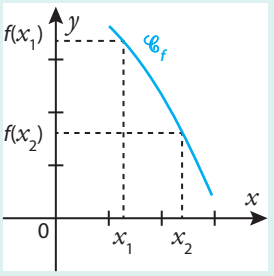
**• On dit que $f$ est croissante sur I si lorsque $x$ augmente sur I, alors $f(x)$ augmente.**

**Autrement dit, pour tous réels $x_1$ et $x_2$ de I, si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.**




**• On dit que $f$ est décroissante sur I si lorsque $x$ augmente sur I, alors $f(x)$ diminue.**

**Autrement dit, pour tous réels $x_1$ et $x_2$ de I, si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.**




**Remarques**

• Si $f$ est une fonction croissante sur un intervalle I, alors sa courbe représentative « monte », et réciproquement.

Si $f$ est une fonction décroissante sur un intervalle I, alors sa courbe représentative « descend », et réciproquement.

• Si une fonction $f$ garde la même valeur sur un intervalle I, on dit que $f$ est constante sur cet intervalle. Alors sa courbe représentative est parallèle à l'axe des abscisses sur cet intervalle.

**Définition** **Fonction monotone**

**On dit qu'une fonction est monotone sur un intervalle I si $f$ ne change pas de sens de variation sur cet intervalle.**

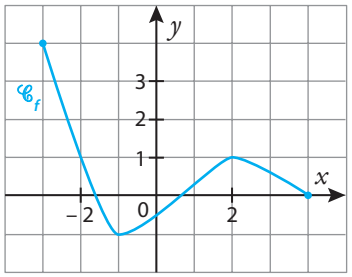
**Remarque** Si une fonction $f$ est croissante sur un intervalle I sans être constante sur une partie de cet intervalle, on dit que $f$ est strictement croissante. On définit de la même manière une fonction strictement décroissante.

**Définition** **Tableau de variations**

**Un tableau de variations regroupe les informations concernant les variations d'une fonction sur son ensemble de définition.**

**Exemple**

$f$ est une fonction définie sur [–3 ; 4] dont voici la courbe et le tableau de variations.




| $x$ | –3 | | –1 | | 2 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 4 | ↘ | –1 | ↗ | 1 | ↘ | 0 |

On peut lire que $f$ est décroissante sur [–3 ; –1], croissante sur [–1 ; 2] et décroissante sur [2 ; 4]

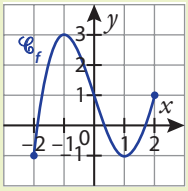
# Exercices résolus

VIDÉO ALL MATHS PARNAK
Comprendre une méthode
www.lienmini.fr/8270-27

## Méthode 1 Décrire les variations d'une fonction

### Énoncé

**$f$ est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.**
**1. Décrire ses variations avec des phrases.**
**2. Dresser son tableau de variations.**




### Solution

**1.** La fonction $f$ est : croissante sur $[-2 ; -1]$ (1)
décroissante sur $[-1 ; 1]$, croissante sur $[1 ; 2]$.
**2.** Le tableau de variations de la fonction $f$ est le suivant.

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $-1$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $1$ |

### Conseils & Méthodes

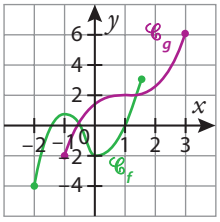
(1) En parcourant l'axe des abscisses de gauche à droite, on repère sur quel(s) intervalle(s) la courbe représentative de la fonction $f$ « monte » ou « descend ».
(2) La première ligne contient les informations à lire sur l'axe des abscisses
(3) La deuxième ligne donne les variations.
(4) Il ne faut pas oublier d'indiquer les images au bout des flèches si la courbe le permet.

### À vous de jouer !

**On considère les fonctions $f$ et $g$ dont voici les courbes représentatives dans un repère.**

**1** Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

**2** Dresser le tableau de variations de la fonction $g$.




↪ Exercices 47 à 57 p. 248

## Méthode 2 Interpréter les variations d'une fonction

### Énoncé

**$f$ est une fonction dont voici le tableau de variations.**
**1. Comparer les nombres $f(0)$ et $f(1)$ en justifiant.**
**2. Comparer les nombres $f(3)$ et $f(4)$ en justifiant.**

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $4$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $4$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $6$ | ↘ | $0$ |

### Solution

**1.** 0 et 1 appartiennent à l'intervalle $[0 ; 2]$. (1)
$f$ est décroissante sur $[0 ; 2]$ et $0 \leqslant 1$
donc $f(0) \geqslant f(1)$. (2)

**2.** 3 et 4 appartiennent à l'intervalle $[2 ; 4]$. (1)
$f$ est croissante sur $[2 ; 4]$ et $3 \leqslant 4$
donc $f(3) \leqslant f(4)$. (2)

### Conseils & Méthodes

(1) Identifier l'intervalle contenant 0 et 1 dans le tableau de variation.
(2) Utiliser la variation correspondante si f est croissante, les réels de l'intervalle et leurs images sont rangés dans le même ordre. Si $f$ est décroissante les images des réels de l'intervalle sont rangées dans l'ordre inverse.

### À vous de jouer !

**3** $f$ est une fonction dont voici le tableau de variations

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $5$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $4$ |

**1.** Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f$ ?
**2.** Comparer $f(0)$ et $f(2)$.
**3.** Comparer $f(-2)$ et $f(-1{,}5)$.

**4** $f$ est une fonction dont voici le tableau de variations On sait que $f(0) = 1$ et $f(0{,}5) = 4$. Résoudre :

| $x$ | $-4$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $1$ | ↗ | $5$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $4$ |

**a)** $f(x) = 4$ **b)** $f(x) > 4$ **c)** $f(x) \leqslant 1$ **d)** $f(x) > 1$

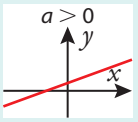
↪ Exercices 65 à 69 p. 250

# 2 Variations des fonctions affines

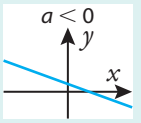
**Propriété** **Variation des fonctions affines**

Soit $f$ une fonction affine avec $f(x) = ax + b$ pour $x \in \mathbb{R}$.

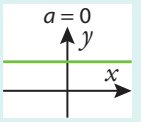
- Si $a > 0$ alors $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.




- Si $a < 0$ alors $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.




- Si $a = 0$ alors $f$ est constante sur $\mathbb{R}$.




**Exemples**

- La fonction $x \mapsto 3x - 5$ est croissante sur $\mathbb{R}$ car $a = 3 > 0$.
- La fonction $x \mapsto -5x + 1$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ car $a = -5 < 0$.

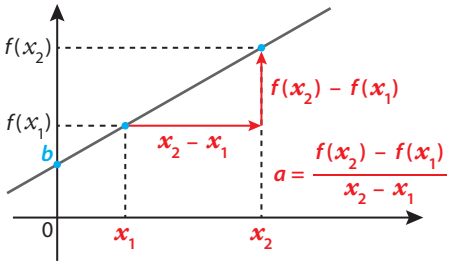
**Démonstration** Soit $f$ une fonction affine avec $f(x) = ax + b$ où $a$ et $b$ sont des réels.

- On suppose que $a > 0$. Soit $x_1$ et $x_2$ deux réels tels que $x_1 \leqslant x_2$.
$a > 0$ donc $ax_1 \leqslant ax_2$ puis $ax_1 + b \leqslant ax_2 + b$. Cela veut dire que $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ et $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- On suppose que $a < 0$. Soit $x_1$ et $x_2$ deux réels tels que $x_1 \leqslant x_2$.
$a < 0$ donc $ax_1 \geqslant ax_2$ puis $ax_1 + b \geqslant ax_2 + b$. Cela veut dire que $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ et $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

**Propriété** **Taux d'accroissement des fonctions affines**

Soit $f$ une fonction affine, avec $f(x) = ax + b$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x_1$ et $x_2$ deux réels tels que $x_1 \neq x_2$. Alors le taux d'accroissement de la fonction $f$ entre $x_1$ et $x_2$ est : $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$. Les accroissements d'une fonction affine sont donc constants et égaux à $a$.




**Remarque** $a$ est le coefficient directeur de la droite représentative de $f$, c'est bien son signe qui dirige la pente de la droite et donc le sens de variation de la fonction.

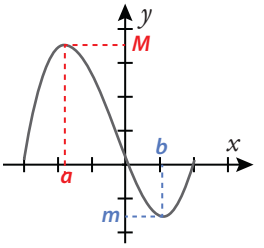
# 3 Maximum et minimum d'une fonction

**Définition** **Extremum d'une fonction**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I.

- S'il existe $M \in \mathbb{R}$ et $a \in$ I tels que $f(a) = M$ et $f(x) \leqslant M$ pour tout $x$ de I, on dit que $f$ admet un **maximum** sur I. Ce maximum vaut $M$ et est atteint en $x = a$.
- S'il existe $m \in \mathbb{R}$ et $b \in$ I tels que $f(b) = m$ et $f(x) \geqslant m$ pour tout $x$ de I, on dit que $f$ admet un minimum sur I. Ce **minimum** vaut $m$ et est atteint en $x = b$

Un maximum ou un minimum est appelé **extremum**.

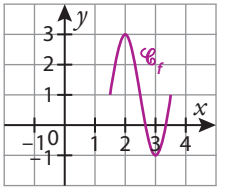



**Remarques**

- Une fonction peut ne pas avoir de maximum ni de minimum sur un intervalle.
- S'il existe, un maximum correspond à l'ordonnée du point le plus haut de la courbe.
- S'il existe, un minimum correspond à l'ordonnée du point le plus bas de la courbe $f$.

**Exemple**

$f$ est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.
$f$ a pour maximum 3 atteint en $x = 2$ et pour minimum $-1$ atteint en $x = 3$.



# Exercices résolus

## Méthode 3 Déterminer les variations de fonctions affines

### Énoncé

**1. Déterminer les variations de la fonction $f : x \mapsto 4 - 5x$ sur $\mathbb{R}$.**
**2. Soit $g$ définie par $g(x) = (x + 1)^2 - x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.**
**a) Développer et simplifier son expression.**
**b) En déduire les variations de la fonction $g$.**

**Conseils & Méthodes**

1. Identifier les coefficients $a$ et $b$ de la fonction affine.
2. Établir le sens de variation en fonction du signe de $a$.

### Solution

1. $f$ est une fonction affine (1) avec $a = -5$ et $b = 4$. Or $a = -5 < 0$ donc $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. (2)
2. **a)** $g(x) = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 - x^2 = 2x + 1$.
**b)** $g$ est donc une fonction affine avec $a = 2$ et $b = 1$. (1) Or $a = 2 > 0$ donc $g$ est croissante sur $\mathbb{R}$. (2)

### À vous de jouer !

**5** 1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ définie sur $[0 ; 5]$ par $f(x) = -8x + 1$.

2. Soit $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x(-x - 1) + 3(x^2 + 7)$.

**a)** Développer et réduire $g(x)$.

**b)** En déduire les variations de la fonction $g$.

**6** 1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ définie sur $[0 ; 5]$ par $f(x) = \dfrac{x}{2}$.

2. Soit $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x(4x + 1) - (2x + 1)^2$.

**a)** Développer et réduire $g(x)$.

**b)** En déduire les variations de la fonction $g$.

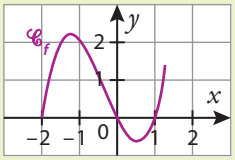
↪ Exercices 70 à 82 p. 251

## Méthode 4 Déterminer le maximum ou le minimum d'une fonction

### Énoncé

**$f$ et $g$ sont deux fonctions dont on donne ci-contre respectivement la courbe représentative dans un repère et le tableau de variations.**
**1. Déterminer le minimum de $f$ et en quelle(s) valeur(s) il est atteint.**
**2. $g$ admet-elle un maximum sur $[-1 ; 7]$ ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de $x$ est-il atteint ?**

| $x$ | $-1$ | | $3$ | | $5$ | | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | $4$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $4$ | ↘ | $3$ |




### Solution

1. $f$ admet un minimum qui vaut $-0{,}6$, atteint en $x = 0{,}5$. (1) (2)

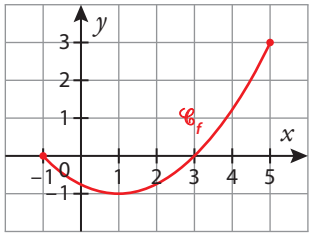
2. $g$ a un maximum qui vaut 4, atteint pour $x = -1$ et pour $x = 5$. (3)

**Conseils & Méthodes**

1. On repère le(s) point(s) de la courbe dont l'ordonnée est la plus petite possible.
2. L'ordonnée correspond au maximum ou au minimum, l'abscisse correspond à la valeur de $x$ pour lequel il est atteint.
3. On lit dans le tableau l'image la plus grande possible.

### À vous de jouer !

**7** $f$ est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.




1. $f$ admet-elle un maximum ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de $x$ est-il atteint ?

2. $f$ admet-elle un minimum ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de $x$ est-il atteint ?

**8** $g$ est une fonction dont voici le tableau de variations.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | $2$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

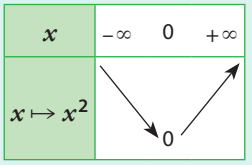
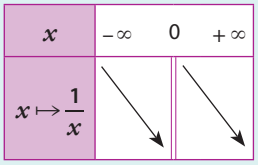
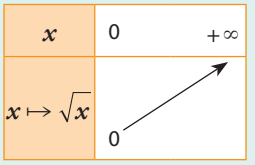
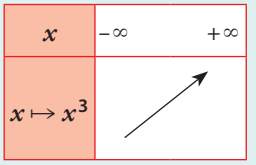
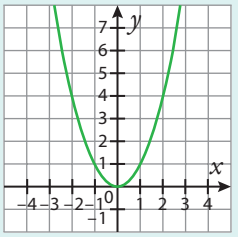
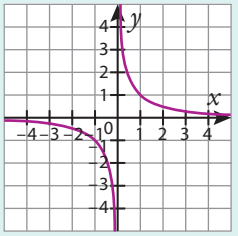
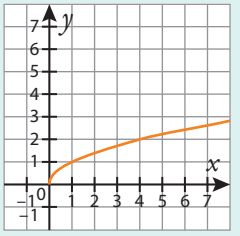
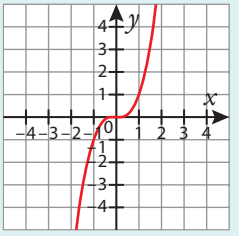
1. $g$ admet-elle un maximum ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de $x$ est-il atteint ?

2. $g$ admet-elle un minimum ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de $x$ est-il atteint ?

↪ Exercices 83 à 89 p. 252

# 4 Variations des fonctions de référence

**Propriétés** Fonctions de référence

| Fonction carré $x \mapsto x^2$ | Fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ | Fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ | Fonction cube $x \mapsto x^3$ |
|---|---|---|---|
| La fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}-$ et croissante sur $\mathbb{R}+$. | La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^*+$. | La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$. | La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$. |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
| La fonction carré a pour minimum 0, atteint en $x = 0$, et n'a pas de maximum. | La fonction inverse n'a ni minimum, ni maximum. | La fonction racine carrée a pour minimum 0, atteint en $x = 0$, et n'a pas de maximum. | La fonction cube n'a ni minimum ni maximum. |

## Démonstrations

① Pour la fonction carré : soit $x_1$ et $x_2$ deux réels. Alors $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$.

• Sur $]-\infty ; 0]$, si $x_1 \leqslant x_2 \leqslant 0$, alors $x_2 - x_1 \geqslant 0$ et $x_2 + x_1 \leqslant 0$ (somme de réels négatifs),
donc $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \leqslant 0$ par la règle des signes. On en déduit que $x_2^2 - x_1^2 \leqslant 0$ et donc que $x_1^2 \leqslant x_2^2$ :
la fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

• Sur $[0 ; +\infty[$, si $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$, alors $x_2 - x_1 \geqslant 0$ et $x_2 + x_1 \geqslant 0$ (somme de réels positifs),
donc $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \geqslant 0$ par la règle des signes. On en déduit que $x_2^2 - x_1^2 \geqslant 0$ et donc que $x_1^2 \leqslant x_2^2$ :
la fonction carré est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

② Pour la fonction inverse : soit $x_1$ et $x_2$ deux réels non nuls. Alors $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1}{x_1 x_2} - \frac{x_2}{x_1 x_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$.

• Sur $]-\infty ; 0[$, si $x_1 \leqslant x_2 < 0$, alors $x_1 - x_2 \leqslant 0$ et $x_2 x_1 > 0$ (produit de réels strictement négatifs),
donc $\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \leqslant 0$. On en déduit que $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \leqslant 0$ et donc que $\frac{1}{x_2} \leqslant \frac{1}{x_1}$ :
la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty ; 0[$.

• Sur $]0 ; +\infty[$, si $0 < x_1 \leqslant x_2$, alors $x_1 - x_2 \leqslant 0$ et $x_2 x_1 > 0$ (produit de réels strictement positifs),
donc $\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \leqslant 0$. On en déduit que $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \leqslant 0$ et donc que $\frac{1}{x_2} \leqslant \frac{1}{x_1}$ :
la fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

③ Pour la fonction racine carrée : soit $x_1$ et $x_2$ tels que $0 \leqslant x_1 < x_2$.
On a $\left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right) \times \left(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}\right) = \sqrt{x_2}^2 - \sqrt{x_1}^2 = x_2 - x_1$ donc $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}$.
Or $\sqrt{x_1}$ et $\sqrt{x_2}$ sont positifs donc $\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}$ aussi et comme $x_2 > x_1$ on déduit que $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$.
Dans le cas où $x_1 = x_2$, on a également $\sqrt{x_1} \leqslant \sqrt{x_2}$ :
la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$.

# Exercices résolus

## Méthode 5 Comparer les images de fonctions de référence

### Énoncé

**1. Comparer les nombres $\sqrt{2,1}$ et $\sqrt{3,4}$.**

**2. Comparer les nombres $(-3,4)^2$ et $(-3,67)^2$.**

### Solution

**1.** 2,1 et 3,4 appartiennent à $[0 ; +\infty[$.

La fonction racine carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$ et $2,1 < 3,4$ donc $\sqrt{2,1} \leqslant \sqrt{3,4}$. (1) (2)

**2.** $-3,67$ et $-3,4$ appartiennent à $]-\infty ; 0]$.

On a $-3,67 \leqslant -3,4$ et la fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ donc $(-3,4)^2 \leqslant (-3,67)^2$. (3)

**Conseils & Méthodes**

(1) Identifier la fonction utilisée : ici, il s'agit de la fonction racine carrée.

(2) Utiliser les variations.

(3) Identifier un intervalle où la fonction est monotone et dans lequel se situent les deux nombres à comparer.

### À vous de jouer !

**9** Comparer les nombres suivants.

**a)** $2^3$ et $5^3$.

**b)** $(-3)^3$ et $11^3$.

**c)** $(-2,4)^3$ et $\left(-\frac{5}{2}\right)^3$.

**10** Comparer les nombres suivants.

**a)** $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2,5}$.

**b)** $\sqrt{4,2}$ et $\sqrt{\pi}$.

**c)** $\sqrt{0,4}$ et $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

↪ Exercices 94 à 101 p. 253

## Méthode 6 Utiliser les variations de fonctions de référence

### Énoncé

**1. Déterminer les variations de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 4$.**

**2. Même question pour la fonction $g$ définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = -3\sqrt{x} + 1$.**

### Solution

**1.** La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$. (1)

Si $x_1$ et $x_2$ sont deux réels tels que $x_1 \leqslant x_2$, on a alors $x_1^3 \leqslant x_2^3$. (2)

Puis $2x_1^3 \leqslant 2x_2^3$ (3) et $2x_1^3 - 4 \leqslant 2x_2^3 - 4$. (3)

Soit $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Cela signifie exactement que $f$ est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

**2.** La fonction racine carrée (1) est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Soit $x_1$ et $x_2$ tels que $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$. Alors $\sqrt{x_1} \leqslant \sqrt{x_2}$

puis $-3\sqrt{x_1} \geqslant -3\sqrt{x_2}$ et $-3\sqrt{x_1} + 1 \geqslant -3\sqrt{x_2} + 1$. (3)

Soit $g(x_1) \geqslant g(x_2)$. Cela signifie exactement que $g$ est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

**Conseils & Méthodes**

(1) On repère la fonction de référence qui apparaît dans la fonction étudiée.

(2) On utilise les variations de la fonction cube.

(3) On compare alors les images de $x_1$ et de $x_2$ par la fonction en travaillant avec les inégalités.

### À vous de jouer !

**11** Déterminer les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{x} - 2$ sur $]0 ; +\infty[$.

**12** Étudier les variations de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 + 1$.

↪ Exercices 102 à 105 p. 254

# Exercices résolution de problèmes

## J'apprends à rédiger une solution

**Réflexe 1**
Vérifier les conditions d'application d'une propriété ou les éléments d'une définition.

**Réflexe 2**
S'assurer dans la rédaction que ces conditions sont vérifiées.

**Réflexe 3**
Utiliser les bonnes implications logiques pour lier les différents éléments de la réponse dans la rédaction finale.

### Énoncé

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Étudier les variations de la fonction $f$.

### Solution commentée

**Étape 1** Je commence par analyser la conclusion ↪ Résolution de problèmes p. 134. Il s'agit d'étudier le sens de variation d'une fonction et on ne connaît que la définition. Il faut donc comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$ en sachant que $x_1 < x_2$.
Je passe de $x$ à $f(x)$ en élevant $x$ au carré, puis en ajoutant 1, puis en appliquant la fonction inverse.

$$x \to x^2 \to x^2+1 \to \frac{1}{x^2+1}$$

**Étape 2** Le sens de variation de la fonction carré dépend de l'intervalle étudié : elle est croissante sur $[0 ; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty ; 0]$. **Réflexe 1**
Je raisonne donc par disjonction de cas : d'une part $x_1 \leqslant x_2 \leqslant 0$ et d'autre part $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$. **Réflexe 2**

De même, la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$, il faudra donc vérifier à quel intervalle appartient $x_1 + 1$ et $x_2 + 1$. **Réflexe 1**

*Brouillon*

Si $x_1 \leqslant x_2 \leqslant 0$, alors $x_1^2 \geqslant x_2^2$ car $x_1$ et $x_2$ sont négatifs **Réflexe 2**
$x_1^2+1 \geqslant x_2^2+1$ et ces nombres sont supérieurs ou égaux à 1. Donc $\dfrac{1}{x_1^2+1} \leqslant \dfrac{1}{x_2^2+1}$ car $x_1^2+1$ et $x_2^2+1$ sont deux nombres de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ **Réflexe 2**
donc $f$ est croissante sur $]-\infty ; 0]$.

*Réponse rédigée*

Je raisonne par disjonction de cas.
• Soit $x_1$ et $x_2$ tels que $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$.
Alors par croissance de la fonction carré sur $[0 ; +\infty[$, on a $x_1^2 \leqslant x_2^2$ puis $x_1^2+1 \leqslant x_2^2+1$.
Or le carré d'un nombre étant toujours positif, ces nombres appartiennent à l'intervalle $[1 ; +\infty[$ sur lequel la fonction inverse est décroissante.
J'en déduis que :

$$\frac{1}{x_1^2+1} \geqslant \frac{1}{x_2^2+1} \text{ soit } f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

et $f$ est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.
• Soit $x_1$ et $x_2$ tels que $x_1 \leqslant x_2 < 0$.
Alors par décroissance de la fonction carré sur $]-\infty ; 0[$, on a $x_1^2 \geqslant x_2^2$ puis $x_1^2+1 \geqslant x_2^2+1$.
Ces deux nombres appartiennent à $[1 ; +\infty[$ sur lequel la fonction inverse est décroissante.
J'en déduis que :

$$\frac{1}{x_1^2+1} \leqslant \frac{1}{x_2^2+1} \text{ soit } f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

et $f$ est croissante sur $]-\infty ; 0[$.
• Les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ sont :
– croissante sur $]-\infty ; 0[$,
– décroissante sur $[0 ; +\infty[$

## Je m'entraîne à rédiger une solution

### 13 Variations de fonctions de référence

Étudier les variations de la fonction $f$ définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^3$.

### 14 Inéquations

Résoudre les inéquations suivantes en appliquant des fonctions de référence.

**a)** $\sqrt{x} \geqslant 3$

**b)** $\sqrt{x} \leqslant 5$

**c)** $x^2 \leqslant 8$

### 15 Variations de fonctions enchaînées

$f$ est une fonction définie sur $[-1 ; 4]$ dont le tableau de variations est donné ci-contre.

| $x$ | $-1$ | | $1$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $4$ | ↗ | $16$ | ↘ | $1$ |

**1.** Justifier que les fonctions $u = \sqrt{f}$ et $v = \dfrac{1}{f}$ sont bien définies sur $[-1 ; 4]$.

**2.** Dresser leur tableau de variations.

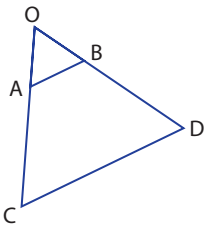
CARTES FLASH
Acquérir des automatismes
www.lienmini.fr/8270-6

# Exercices automatismes

## Rituel 1

### Appliquer le théorème de Thalès

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles. On sait que OA = AB = 3, OC = 7 et OD = 6.




**16** Déterminer OB.

**17** Déterminer CD.

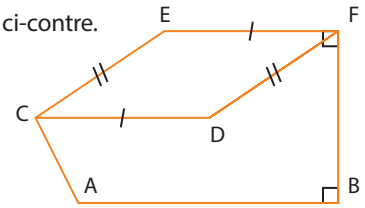
### Calculer un périmètre

**18** Déterminer le périmètre d'un cercle de rayon 5.

**19** Déterminer le périmètre d'un rectangle de largeur 3 et de longueur 5.

### Nommer des quadrilatères à partir d'un graphique

On considère la figure ci-contre.




**20** Donner la nature de EFDC.

**21** Donner la nature de ABFE.

## Rituel 3

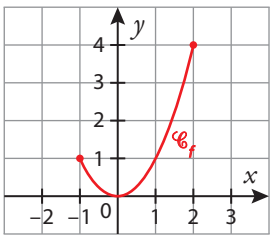
### Résoudre une équation du premier degré

**26** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x - 4 = 24$.

**27** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-3x + 1 = 5x - 3$.

### Estimer graphiquement une valeur atteinte

On donne ci-contre la courbe d'une fonction $f$.




**28** Déterminer les images de –1 et de 0 par $f$.

**29** À partir de quelle valeur a-t-on $f(x) > 1$ ?

### Calculer un volume

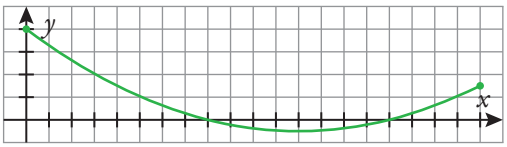
**30** Déterminer le volume d'un cube de côté 4.

**31** Déterminer le volume d'un cylindre de rayon 2 et de hauteur 5.

## Rituel 2

### Préciser sur un graphique les valeurs en jeu

On considère la courbe suivante donnant la température en °C en fonction de l'heure de la journée.




**22** Donner les grandeurs correspondant à chaque axe

**23** Ces températures ont été relevées entre 0 et 10 h et la température était de 4 °C à 0 h.
Écrire les valeurs correspondant à chaque graduation sur les axes du repère.

### Calculer une aire

**24** Déterminer l'aire d'un disque de rayon 4.

**25** Déterminer l'aire d'un carré de côté $3\sqrt{2}$.

## Rituel 4

### Effectuer des calculs simples avec les fractions

**32** Écrire sous la forme d'une seule fraction simplifiée au maximum $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{7}{9}$.

**33** Écrire sous la forme d'une seule fraction simplifiée au maximum $\dfrac{\frac{21}{35}}{\frac{3}{5}}$.

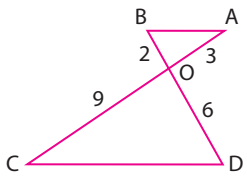
### Calculer une aire

**34** Déterminer l'aire d'un demi-disque de rayon 10.

**35** Déterminer l'aire d'un rectangle de longueur 4 et de largeur $\frac{7}{2}$.

### Appliquer le théorème de Thalès

**36** Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?




↪ Travaillez les méthodes des automatismes p. 8

# Exercices d'entraînement

## Je consolide mes acquis

### 37 Calculer une image

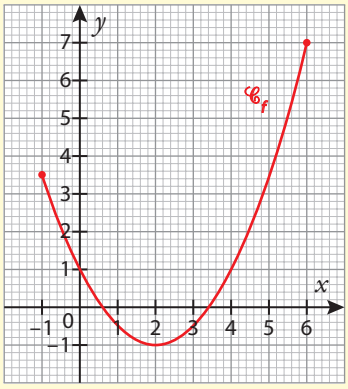
Soit $f$ la fonction définie sur $[-3 ; 3]$ par $f(x) = x^2 + 5x + 1$.

Calculer $f(0)$, $f(-2)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

### 38 Lire des images

On considère une fonction dont on donne ci-contre la courbe représentative dans un repère.

1. Lire $f(2)$.
2. Donner l'image de 6 par la fonction $f$.

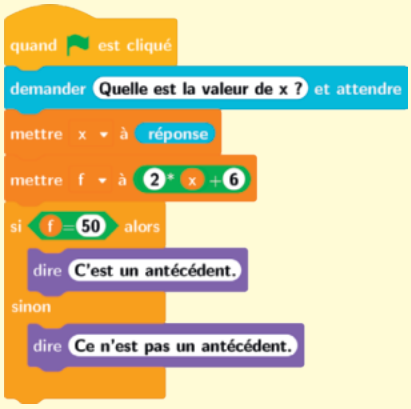



### 39 Lire des antécédents

On considère la fonction $f$ de l'exercice précédent.

Déterminer les éventuels antécédents de 1 et de $-2$ par la fonction $f$.

### 40 Scratch




Que fait ce programme ?

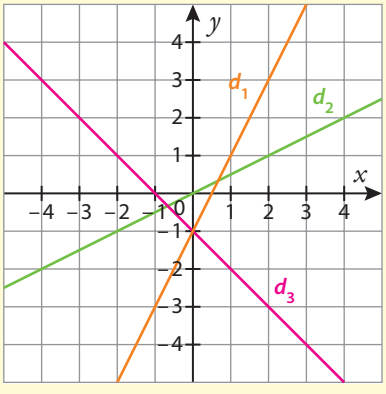
### 41 Associer droite et fonction

Associer à chaque fonction affine sa droite représentative dans le repère ci-contre.

$f : x \mapsto 2x - 1$

$g : x \mapsto -x - 1$

$h : x \mapsto \frac{x}{2}$




## Questions de cours

**42** Soit $f$ une fonction affine, avec $f(x) = ax + b$. Quel est son sens de variation en fonction de ses paramètres ?

**43** Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes.

**a)** $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.

**b)** $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

**c)** $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$.

**d)** $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0 ; +\infty[$.

**44** Rappeler la définition d'une fonction croissante sur un intervalle I.

**45** Comment dresser un tableau de variations à partir d'une courbe ?

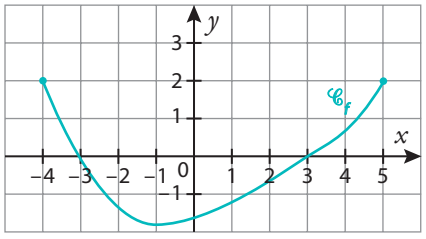
**46** Rappeler la définition d'une fonction dont le maximum est $M$ sur un intervalle I.

## Dresser un tableau de variations

Méthode 1 p. 241

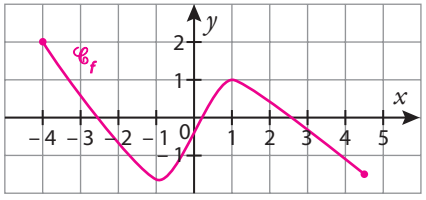
**47** Recopier et compléter le tableau de variations proposé à partir de la représentation graphique suivante.

| $x$ | $-4$ | … | $5$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $2$ | … | $2$ |



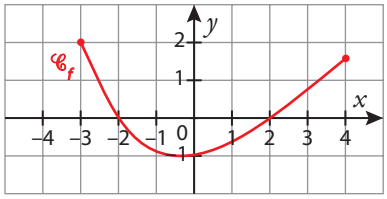

**48** Recopier et compléter le tableau de variations proposé à partir de la représentation graphique suivante.

| $x$ | $-4$ | … | … | … |
|---|---|---|---|---|
| $f$ | … | … | 1 | $-1,5$ |

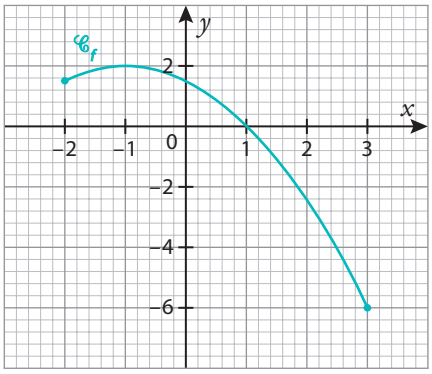


**49** Recopier et compléter le tableau de variations proposé à partir de la représentation graphique suivante.

| $x$ | $-3$ | ... | ... |
|---|---|---|---|
| $f$ | 2 | ... | ... |

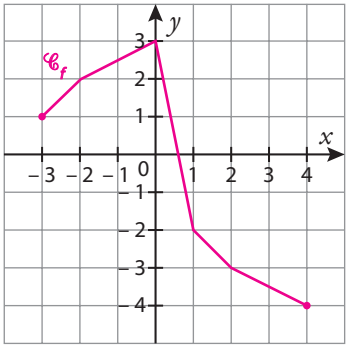



**50** $f$ est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.



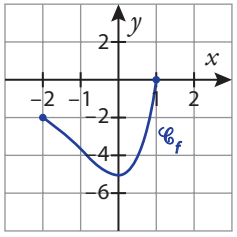

**1.** Décrire ses variations à l'aide de phrases.
**2.** Dresser son tableau de variations.

**51** $f$ est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.

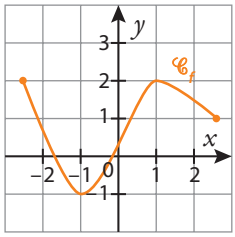


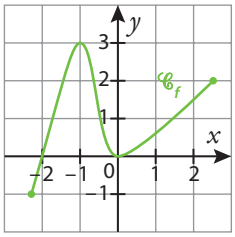

**1.** Décrire ses variations à l'aide de phrases.
**2.** Dresser son tableau de variations.

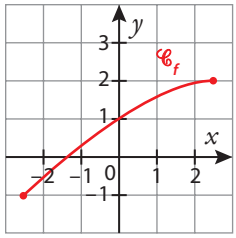
**52** $f$ est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.
Dresser son tableau de variations.

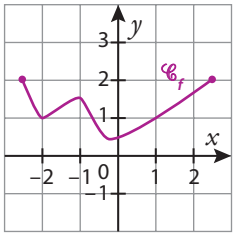


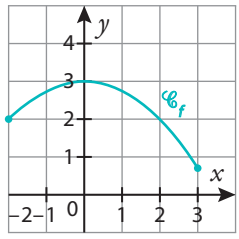

**53** Pour chacune des courbes suivantes, établir le tableau de variations des fonctions $f$ représentées.

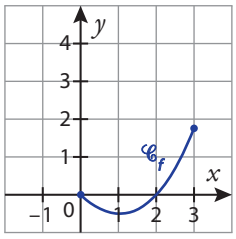
**a)**



**b)**



**c)**



**d)**



**e)**



**f)**



**54** $f$ est une fonction croissante sur $[-2\,;\,6]$, décroissante sur $[6\,;\,10]$, avec $f(-2) = 0$ ; $f(6) = 2$ et $f(10) = -7$.
Dresser son tableau de variations.

**55** À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de géométrie dynamique, dresser le tableau de variations des fonctions suivantes.
**Géométrie dynamique**
**a)** $f$ définie par $f(x) = x^2 - 5x + 1$ pour $x \in [0\,;\,3]$.
**b)** $g$ définie par $g(x) = \dfrac{1}{x} - 2x$ pour $x \in [1\,;\,5]$.
**c)** $h$ définie par $h(x) = x^3 + 2$ pour $x \in [-3\,;\,3]$.

**56** Pour chacune des fonctions suivantes, tracer sa courbe représentative à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de géométrie dynamique puis dresser son tableau de variations avec la précision permise par le graphique.
**Géométrie dynamique**
**a)** $f$ définie sur $[-1\,;\,2]$ par $f(x) = 4x^3 - 5x + 2{,}5$.
**b)** $g$ définie sur $[0\,;\,6]$ par $g(x) = \dfrac{3x - 6}{x + 2}$.
**c)** $h$ définie sur $[-2\,;\,2]$ par $h(x) = x^4 - 2x^2$.

**57** Donner le sens de variation des fonctions suivantes.
**a)** $\mathscr{V}$ représente le volume d'eau dans une baignoire qui se vide.
**b)** $g$ représente le montant collecté pour une tombola au fil du temps.
**c)** $h(x)$ représente l'aire d'un disque en fonction de son rayon $x$.

# Exercices d'entraînement

## Courbes et variations

**58** Dans un repère, tracer une courbe pouvant représenter chaque fonction $f$ et $g$ dont voici les tableaux de variations.

| $x$ | 0 | | 3 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 0 | ↗ | 2 | ↘ | −1 |

| $x$ | −3 | | −1 | | 2 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | 1 | ↘ | 0 | ↗ | 4 | ↘ | −3 |

**59** $f$ est une fonction définie sur $[-4 ; 5]$ telle que :
- $f$ est croissante sur $[-4 ; 1]$,
- $f$ est décroissante sur $[1 ; 5]$,
- $f(-4) = f(5) = -1$,
- $f(1) = 6$.

Tracer une courbe représentative possible pour $f$.

**60** $f$ est une fonction définie sur $[-2 ; 6]$ telle que :
- $f$ est décroissante sur $[-2 ; 1]$,
- $f$ est croissante sur $[1 ; 4]$,
- $f$ est constante sur $[4 ; 6]$,
- $f(-2) = 0$ et $f(4) = 2$.

Tracer une courbe représentative possible pour $f$.

## Parité et variations

**61** $f$ est une fonction définie sur $[-2 ; 2]$ dont voici une ébauche du tableau de variations.

| $x$ | −2 | | −1 | | 0 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 2 | ↘ | −1 | ↗ | … | |

**1.** On suppose que la fonction est paire.
Dresser son tableau de variations complet.
**2.** On suppose que la fonction est impaire.
Dresser son tableau de variations complet.

**62** $f$ est une fonction définie sur $[-4 ; 4]$, impaire, croissante sur $[0 ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; 4]$.

On sait, de plus, que $f(2) = 3$ et $f(4) = \frac{1}{2}$.
**1.** Donner les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-4 ; 0]$.
**2.** Dresser le tableau de variations complet de la fonction $f$.

**63** **1.** $f$ est une fonction paire croissante sur $[0 ; 5]$.
Quel est son sens de variation sur $[-5 ; 0]$ ?
**2.** $g$ est une fonction impaire croissante sur $[0 ; 5]$.
Quel est son sens de variation sur $[-5 ; 0]$ ?

**64** Le tableau de variations suivant peut-il être :
**a)** celui d'une fonction paire ?
**b)** celui d'une fonction impaire ?

| $x$ | −4 | | 0 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 2 | ↗ | 3 | ↘ | −2 |

## Interpréter les variations d'une fonction

Méthode 2 p. 241

**65** $f$ est une fonction dont voici le tableau de variations.

| $x$ | −1 | | 0 | | 2 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | −4 | ↘ | −5 | ↗ | 2 | ↘ | 1 |

**1. a)** Donner ses variations sur l'intervalle $[2 ; 4]$.
**b)** En déduire quel est le nombre le plus grand entre $f(2{,}5)$ et $f(3)$.
**2.** Comparer de même les nombres suivants.
**a)** $f(0)$ et $f(1)$.
**b)** $f(3)$ et $f(4)$.
**c)** $f(-0{,}5)$ et $f(-0{,}75)$.

**66** $f$ est une fonction dont on donne le tableau de variations.

| $x$ | −5 | | 3 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 4 | ↘ | −2 | ↗ | 1 |

**1.** Comparer $f(0)$ et $f(2)$.
**2. a)** Donner ses variations sur l'intervalle $[3 ; 5]$.
**b)** En déduire un encadrement de $f(x)$ si $x \in [3 ; 5]$.

**67** $f$ est une fonction dont voici le tableau de variations.

| $x$ | −2 | | 0 | | 5 | | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 2 | ↗ | 3 | ↘ | −1 | ↗ | 3 |

**1.** Comparer les nombres suivants.
**a)** $f(1)$ et $f(4)$. **b)** $f(5)$ et $f(6)$. **c)** $f(0)$ et $f(7)$.
**2.** Donner un encadrement de $f(x)$ dans les cas suivants.
**a)** $x \in [5 ; 7]$ **b)** $x \in [0 ; 5]$ **c)** $x \in [-2 ; 0]$

**68** $f$ est une fonction dont voici le tableau de variations.

| $x$ | −3 | | 1 | | 2 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | −5 | ↗ | 2 | ↘ | 0 | ↗ | 10 |

Comparer, si cela est possible, les nombres suivants.
**a)** $f(-2)$ et $f(0)$. **b)** $f(-1)$ et $f(2)$. **c)** $f(-3)$ et $f(4)$. **d)** $f(-2)$ et $f(5)$.

**69** Esprit critique

Les tableaux de variations suivants comportent des incohérences. Lesquelles ? Justifier.

**a)**

| $x$ | $-10$ | | $-2$ | | $0$ | | $7{,}5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | ↗ | $2$ | ↘ | $\frac{10}{3}$ | ↗ | $8$ |

**b)**

| $x$ | $-10$ | | $-5$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | $7$ | ↗ | $25$ | ↗ | $9$ |

**c)**

| $x$ | $-3$ | | $-4$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h$ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $4$ |

## Variations des fonctions affines

Méthode 3 p. 243

**70** Déterminer le sens de variation des fonctions affines suivantes sur $\mathbb{R}$.

**a)** $x \mapsto -3x - 4$

**b)** $x \mapsto -x + 7$

**c)** $x \mapsto 3x$

**71** Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré.

**a)** $x \mapsto 4 - 0{,}5x$ sur $]-\infty\,;\,0]$.

**b)** $x \mapsto 5x + 6$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

**c)** $x \mapsto \dfrac{x}{2} - 3$ sur $\mathbb{R}$.

**d)** $x \mapsto -4 + x$ sur $\mathbb{R}$.

**72** Développer et simplifier les expressions des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.

**1. a)** $f(x) = (6 + x)(6 - x) + x(x + 1)$

**b)** $g(x) = (x - 2)^2 - x^2$

**c)** $h(x) = (8x - 1)(2x + 5) - (4x)^2$

**2.** Donner les variations de chacune de ces fonctions.

**73** Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré.

**a)** $x \mapsto x(1 - x) + x^2 - 7$ sur $\mathbb{R}$.

**b)** $x \mapsto \dfrac{3 - x}{4}$ sur $[0\,;\,5]$.

**c)** $x \mapsto \dfrac{x^2 + 2x}{x}$ sur $[1\,;\,+\infty[$.

**d)** $x \mapsto (3 - \pi)x$ sur $\mathbb{R}$.

**74** Comparer les nombres $A = -2 \times 1{,}0354 + 4$ et $B = -2 \times 1{,}0678 + 4$ sans effectuer de calcul. Justifier.

**75** Comparer les nombres $A = 6\pi - 8$ et $B = 6 \times 3{,}15 - 8$ sans effectuer de calcul. Justifier.

**76** Donner le taux d'accroissement des fonctions suivantes.

**a)** $f : x \mapsto 2x - 4$ entre $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$.

**b)** $g : x \mapsto x - 7$ entre $x_1 = 0$ et $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

**c)** $h : x \mapsto 6 - 3x$ entre $x_1 = 4$ et $x_2 = -3$.

**77** Soit $f$ une fonction affine de la forme $x \mapsto ax + b$ telle que $f(4) = 5$ et $f(2) = 1$.

**1.** Déterminer la valeur de $a$.

**2.** Déterminer la valeur de $b$.

**78** Soit $g$ une fonction affine de la forme $x \mapsto ax + b$ telle que $g(-1) = 6$ et $g(2) = 3$. Déterminer :

**a)** la valeur de $a$.

**b)** la valeur de $b$.

**79** Soit $f$ une fonction affine avec $f(x) = ax + b$ pour $x \in \mathbb{R}$. Soit $x_1$ et $x_2$ deux réels tels que $x_1 \neq x_2$. Démontrer que $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$.

Démo

**80** Déterminer l'expression des fonctions affines $f$ et $g$ telles que :

**a)** $f(1) = -7$ et $f(-3) = 21$.

**b)** $g(0) = 1$ et $g(6) = 4$.

**81** ABCD est un rectangle de dimensions AB = 3 cm et AC = $x$ cm où $x \in [0\,;\,+\infty[$.

**1.** On note $p(x)$ le périmètre du rectangle en fonction de $x$.

**a)** Déterminer le sens de variation de la fonction $p$.

**b)** Déterminer l'expression $p(x)$ de $p$ en fonction de $x$.

**2.** Reprendre les questions précédentes avec l'aire $\mathcal{A}(x)$ du rectangle.

**82** Une piscine propose un tarif adhérent à 1,20 euro de l'heure. Le montant de l'adhésion est de 10 euros.

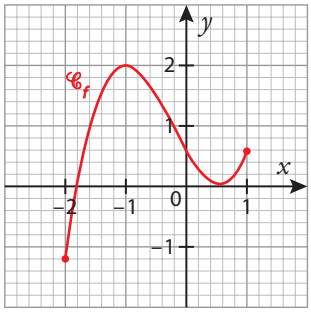
**1.** Déterminer le coût total $f$ payé par un adhérent en fonction du temps $t$ passé à la piscine.

**2.** Donner les variations de la fonction $f$.

## Déterminer graphiquement l'extremum d'une fonction

Méthode 4 p. 243

**83** La courbe représentative d'une fonction $f$ est tracée dans le repère suivant.

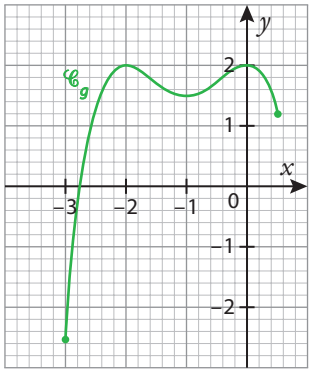



Déterminer son maximum et préciser en quelle valeur de $x$ il est atteint.

**84** $g$ est une fonction dont voici la courbe représentative.

**1.** $g$ admet-elle un maximum ? un minimum ?

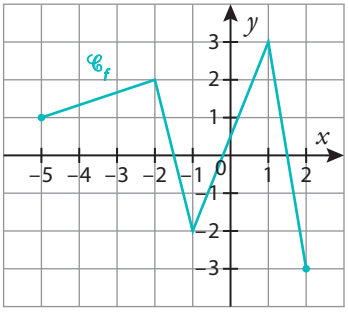
**2.** Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de $x$ sont-ils atteints ?




**85** $f$ est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.

**1.** Déterminer le maximum et le minimum de $f$ et préciser pour quelle(s) valeur(s) de $x$ ils sont atteints.

**2.** Déterminer le maximum de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-5 ; -1]$.

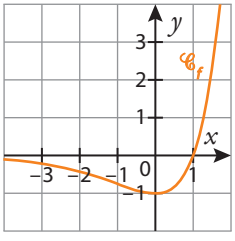



**86** $f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont voici la courbe représentative.

$f$ admet-elle :

**a)** un maximum ?

**b)** un minimum ?



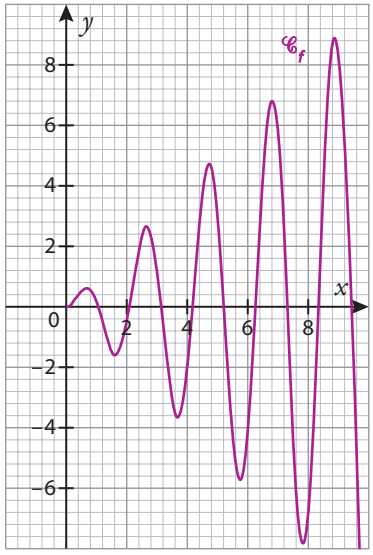

**87** $f$ est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

La même tendance se poursuit pour $x > 10$.

$f$ admet-elle :

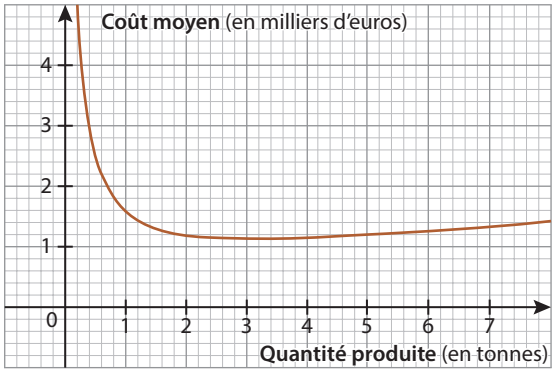
**a)** un maximum ?

**b)** un minimum ?




**88** Une entreprise produit du compost. Développement durable

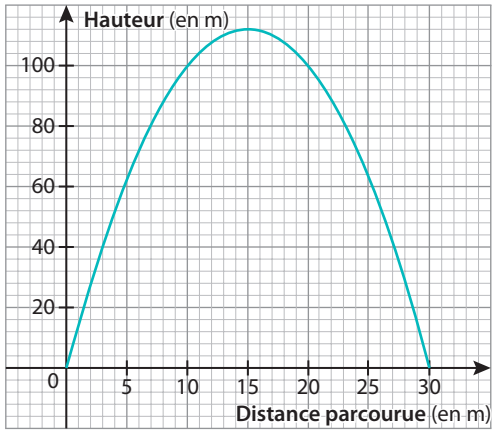
On modélise le coût de production (en milliers d'euros) de $x$ tonnes de compost par la fonction $C(x) = 0{,}1x^2 + 0{,}5x + 1$ pour $x \geqslant 0$.




**a)** Justifier que le coût moyen en milliers d'euros par tonne est donné par la fonction $f(x) = \dfrac{0{,}1x^2 + 0{,}5x + 1}{x}$ pour $x > 0$.

**b)** On donne la courbe représentative de la fonction $f$. Déterminer pour quelle quantité produite le coût moyen est minimal.

**89** La trajectoire d'une balle lancée par un propulseur est modélisée par une fonction dont voici la courbe représentative. *Physique*




**1.** Déterminer la hauteur maximale atteinte par la balle.
**2.** À quelle distance du point de départ la balle retombe-t-elle ?

## Extremum et tableau de variations

**90** $f$ est une fonction dont voici le tableau de variations.

| $x$ | $-4$ | | $3$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $1$ | ↗ | $5$ | ↘ | $-2$ |

$f$ admet-elle un maximum ? un minimum ? Si oui, indiquer leur valeur et préciser pour quelle(s) valeur(s) de $x$ il(s) est (sont) atteint(s).

**91** $g$ est une fonction dont voici le tableau de variations.

| $x$ | $-4$ | | $3$ | | $6$ | | $7$ | | $7{,}5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | $1$ | ↗ | $5$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $5$ | ↘ | $-2$ |

**1.** $g$ admet-elle un maximum ? Si oui, pour quelles valeurs de $x$ est-il atteint ?
**2.** $g$ admet-elle un minimum ? Si oui, pour quelles valeurs de $x$ est-il atteint ?

**92** $f$ est une fonction dont on donne le tableau de variation incomplet.

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $4$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | … | ↘ | $2$ | ↗ | $5$ | ↘ | $-1$ |

Quels nombres peut-on indiquer dans les pointillés de telle sorte que $f$ ait un maximum en $x = 4$ ?

**93** $f$ est une fonction impaire croissante sur $[0 ; 3]$ ayant pour maximum 4. Dresser son tableau de variations.

## Variations d'une fonction de référence

Méthode 5 p. 245

**94** **1.** Dresser le tableau de variations de la fonction carré.
**2.** Comparer les nombres suivants sans aucun calcul.
**a)** $2{,}5^2$ et $\left(\frac{17}{6}\right)^2$. **b)** $(-3{,}1)^2$ et $\left(-\frac{7}{4}\right)^2$.
**3.** Donner un encadrement de $x^2$ si :
**a)** $x \in [1 ; 4]$ **b)** $x \in ]-1 ; 2]$

**95** **1.** Dresser le tableau de variations de la fonction cube.
**2.** Comparer les nombres suivants sans les calculer.
**a)** $2{,}5^3$ et $4^3$. **b)** $(-4)^3$ et $(-7)^3$. **c)** $\left(\frac{5}{9}\right)^3$ et $\left(\frac{8}{7}\right)^3$.

**96** Donner un encadrement de $x^3$ quand :
**a)** $0 \leqslant x \leqslant 2$ **b)** $-3 < x < 6$ **c)** $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1{,}5$

**97** **1.** Dresser le tableau de variations de la fonction racine carrée.
**2.** Comparer les nombres suivants sans les calculer.
**a)** $\sqrt{5}$ et $\sqrt{5{,}7}$. **b)** $\sqrt{2}$ et $\sqrt{\frac{5}{2}}$. **c)** $\sqrt{\frac{10}{3}}$ et $\sqrt{2{,}7}$.

**98** Donner un encadrement de $\sqrt{x}$ lorsque :
**a)** $x \in [1 ; 3]$ **b)** $x < 2$ **c)** $x \in ]0 ; 3]$

**99** **1.** Dresser le tableau de variations de la fonction inverse.
**2.** Comparer les nombres suivants sans les calculer.
**a)** $\frac{1}{2{,}5}$ et $\frac{1}{3}$. **b)** $\frac{1}{-\pi}$ et $\frac{1}{-3}$. **c)** $\frac{1}{1{,}5}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**100** Donner un encadrement de $\frac{1}{x}$ lorsque :
**a)** $x \in [2 ; 4]$ **b)** $x \in ]-5 ; -2]$ **c)** $x \in [0{,}01 ; 0{,}1]$

**101** Audrey utilise régulièrement des boîtes en forme de cubes afin de ranger ses livres.

**1.** Donner l'expression du volume d'une boîte d'arête $x$ (en cm).
**2.** Audrey souhaite obtenir un volume compris entre $8\ \text{cm}^3$ et $125\ \text{cm}^3$.
Quelles sont les dimensions possibles de ses boîtes ?

# Exercices d'entraînement

## Utiliser les variations des fonctions de référence

Méthode 6 p. 245

**102** **1.** Rappeler les variations de la fonction cube sur $\mathbb{R}$.
**2.** En déduire les variations de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3$.

**103** Étudier les variations des fonctions suivantes.
**a)** $x \mapsto -2\sqrt{x} + 6$ sur $[0 ; +\infty[$.
**b)** $x \mapsto 4x^2 - 1$ sur $[0 ; +\infty[$.
**c)** $x \mapsto \dfrac{5}{x} + 7$ sur $]0 ; +\infty[$.

**104** Étudier les variations des fonctions suivantes.
**a)** $x \mapsto 5x^3 + 6$ sur $\mathbb{R}$. **b)** $x \mapsto -2x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$.
**c)** $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{2} - 3$ sur $[0 ; +\infty[$. **d)** $x \mapsto \sqrt{x-7}$ sur $[7 ; +\infty[$.

**105** On considère un disque de rayon $r$ et d'aire $\mathscr{A}$.
Le périmètre de son cercle est noté $p$.
**1.** Exprimer l'aire $\mathscr{A}(p)$ en fonction de $p$.
**2.** En déduire les variations de la fonction $p \mapsto \mathscr{A}(p)$ sur $[0 ; +\infty[$.

## Variations et inéquations

**106** **Rédiger une solution**

$f$ est une fonction dont voici le tableau de variations.
On sait de plus que $f(0) = 1$.

| $x$ | $-2$ | | $1$ | | $2$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $7$ | ↘ | $-3$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-2$ |

Résoudre :
**a)** $f(x) > 1$.
**b)** $f(x) \leqslant 1$.
**c)** $f(x) \geqslant -3$.

↳ Résolution de problèmes p. 54 et p. 246

**107** $f$ est une fonction dont voici le tableau de variations.
On sait de plus que $f(-2) = f(0) = 2$.

| $x$ | $-4$ | | $-1$ | | $2$ | | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $-1$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $2$ |

**1.** Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter $f$.
**2.** Résoudre les inéquations suivantes.
**a)** $f(x) > 2$ **b)** $f(x) \leqslant 2$ **c)** $f(x) \leqslant 3$
**3.** Donner un encadrement de $f(x)$ lorsque :
**a)** $x \in [-4 ; 2]$ **b)** $x \in [-1 ; 7]$

**108** $g$ est une fonction dont voici le tableau de variations.
On sait de plus que $g(-0{,}25) = g(1) = g(2{,}5) = 0$.

| $x$ | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $2$ | | $3$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | $-2$ | ↗ | $4$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $4$ | ↘ | $2$ |

**1.** Résoudre les inéquations suivantes.
**a)** $g(x) > 0$ **b)** $g(x) \leqslant 0$
**2.** Donner un encadrement de $g(x)$ lorsque :
**a)** $x \in [2 ; 6]$ **b)** $x \in \left[-\dfrac{1}{2} ; 2\right]$

**109** Résoudre les inéquations suivantes pour $x \in [0 ; +\infty[$.
**a)** $2 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 3$ **b)** $\sqrt{x} < 9$ **c)** $\sqrt{x} > 1$
**d)** $-1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 4$ **e)** $\sqrt{x} > 1{,}5$ **f)** $\sqrt{x} \leqslant 0$

**110** Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}^*$.
**a)** $\dfrac{1}{x} > 1$ **b)** $\dfrac{1}{x} \leqslant 2$ **c)** $\dfrac{1}{x} > -\dfrac{7}{6}$
**d)** $\dfrac{1}{x} > 0$ **e)** $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 4$ **f)** $-1 < \dfrac{1}{x} \leqslant 2$

## Recherche d'extremum

**111** $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5$.
**1.** Calculer $f(-1)$ et $f(0)$.
**2.** Justifier que $f(x) \geqslant -5$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
**3.** Déterminer le minimum de la fonction $f$ et préciser en quelle(s) valeur(s) il est atteint.

**112** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 8x + 3$.
**1.** Montrer que $f(x) = (x-4)^2 - 13$.
**2.** Calculer $f(5)$ et $f(1)$.
**3.** Montrer que $f(x) \geqslant -13$ pour tout réel $x$.
**4.** En déduire que $f$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et préciser sa valeur. Pour quelle valeur de $x$ est-il atteint ?

**113** Soit $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 6x - 5$.
**1.** Montrer que $g(x) = -(x-3)^2 + 4$ pour tout réel $x$.
**2.** Montrer que $g(x) \leqslant 4$ pour tout réel $x$.
**3.** En déduire que $g$ admet un maximum sur $\mathbb{R}$, et préciser pour quelle(s) valeur(s) il est atteint.

**114** On considère la fonction $f$ définie sur $]-\infty ; 4]$ par $f(x) = \sqrt{4-x} + 5$.
**1.** Déterminer l'image de 4 par $f$.
**2.** Montrer que $f$ a pour minimum 5. Préciser pour quelle valeur de $x$ ce minimum est atteint.

**115** **Esprit critique** Soit $f$ une fonction constante sur un intervalle I. $f$ admet-elle un maximum sur I ?

**116** Python

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = -7x^2 + 3x + 1$ pour $x \in [-1 ; 2]$.

Voici le tableau de variations incomplet de la fonction $f$.

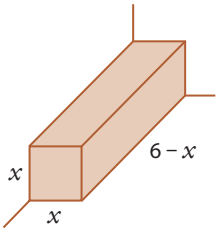
| $x$ | $-1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $-9$ | ↗ ↘ | $-21$ |

On considère la fonction Python ci-contre.

```
def fonc():
    x=-1
    a=-7*x**2+3*x+1
    x=x+0.1
    b=-7*x**2+3*x+1
    while a<b:
        x=x+0.1
        a=b
        b=-7*x**2+3*x+1
    return(x)
```

1. Que renvoie `fonc()` ?
2. Modifier ce programme pour qu'il renvoie une valeur approchée au millième de la valeur de $x$ pour laquelle $f$ est maximale.
3. Modifier ce programme pour qu'il renvoie également une valeur approchée du maximum de la fonction.

**117** Un menuisier artisan est mandaté pour construire une boîte en bois, en forme de pavé droit, dans un coin de pièce chez un client. Il utilise pour cela trois panneaux de bois. Les dimensions de la boîte sont indiquées sur le schéma, où $x \in [0 ; 6]$. L'artisan voudrait utiliser le plus de bois possible, alors que le client voudrait lui obtenir un volume maximal.




1. **a)** Montrer que la surface est donnée par la fonction $S$ telle que $S(x) = -x^2 + 12x$ pour $x \in [0 ; 6]$.
**b)** À l'aide d'un tracé de courbe, conjecturer quelle est la surface maximale et pour quelle valeur de $x$ elle est atteinte.
**c)** Montrer que $S(x) = -(x - 6)^2 + 36$.
**d)** En déduire la démonstration de la conjecture faite au **1. b)**.
2. Exprimer le volume de la boîte $\mathcal{V}(x)$ en fonction de $x$.
3. L'artisan et le client parviendront-ils à trouver une valeur de $x$ qui convienne à chacun ?

**118** SES

Une usine produit de l'acier. Le coût de production de $x$ tonnes d'acier est de $C(x) = 0{,}5x^2 + 500x + 25\,000$ euros.

1. Chaque tonne est vendue 1 000 euros. Déterminer le chiffre d'affaires réalisé en fonction de $x$ tonnes d'acier vendues.
2. On suppose que toute la production est vendue.
Montrer que le bénéfice réalisé pour $x$ tonnes produites est de $B(x) = -0{,}5x^2 + 500x - 25\,000$ pour $x \geqslant 0$.
3. Conjecturer le bénéfice maximum que peut espérer faire l'entreprise.
4. **a)** Montrer que $B(x) = -0{,}5(x - 500)^2 + 100\,000$ pour $x \geqslant 0$.
Justifier que $B(x) \leqslant 100\,000$ pour tout $x \geqslant 0$.
**b)** Retrouver le résultat de la question **3.** à l'aide de la question précédente.

## 119 Choisir le bon schéma

ABCD est un rectangle tel que AB = 10 cm et BC = 8 cm.
N est un point mobile sur le segment [BC]. On note $x$ la longueur en centimètres de [BN]. M et P sont les points respectifs de [AB] et [CD] tels que AM = BN = CP = $x$.
Le but de cet exercice est de déterminer ou placer N sur le segment [BC] pour que l'aire la somme des aires des triangles BMN et CNP soit maximale.

1. Faire un schéma.
2. Justifier que $x \in [0 ; 8]$.
3. Exprimer BM en fonction de $x$.
4. Exprimer CN en fonction de $x$.
5. Montrer que l'aire du triangle BMN est égale à $\dfrac{10x - x^2}{2}$.
6. On note $f$ la fonction qui à la longueur $x$ associe la somme des aires des triangles BMP et CNP.
Vérifier que l'on a $f(x) = 9x - x^2$.
7. **a)** Montrer que $f(x) = -(x - 4{,}5)^2 + 20{,}25$.
**b)** En déduire la solution au problème posé.

↪ Résolution de problèmes p. 298 et p. 358

## À chacun son rythme

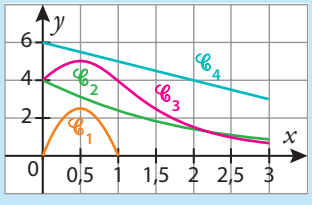
**120** On injecte un médicament à un animal ; l'injection dure 30 minutes, au cours de laquelle la concentration du médicament augmente, avant que le médicament soit progressivement éliminé par l'organisme.
On note $f(t)$ la concentration au bout de $t$ heures, avec $t \in [0 ; +\infty[$.

### Énoncé A

1. Décrire les variations de la fonction $f$.
2. Au bout de combien de temps la concentration est-elle maximale ?

### Énoncé B

1. Indiquer quelles sont les courbes représentatives possibles pour la fonction $f$ parmi celles ci-contre.
2. Quel est le minimum de la fonction $f$ ? En combien de valeurs pourrait-il être atteint ?




### Énoncé C

On propose deux expressions de la fonction $f$ pour modéliser la concentration jusqu'à son élimination par l'organisme :

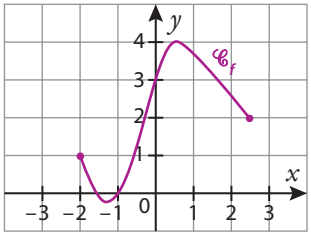
$$\frac{5}{t^2 - t + 1{,}25} - 4 \text{ et } -t^2 + t + 2$$

1. Éliminer l'expression qui ne peut pas convenir.
2. Dresser le tableau de variations complet de la fonction $f$ en utilisant l'expression restante.
3. Afin d'être efficace, le médicament doit être présent au moins 2 heures dans le sang de l'animal. Cela sera-t-il le cas ?

# Exercices de synthèse

## 121 Différentes variations

Déterminer les variations des fonctions suivantes.




**a)** $f$ est une fonction dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

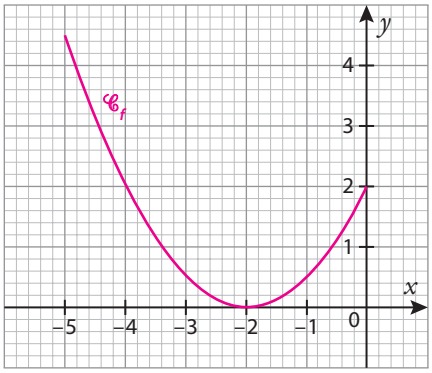
**b)** $g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5x + 3$.

**c)** $h$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2$.

**d)** $k$ est une fonction qui donne la note obtenue par Jonas a un devoir en fonction de son temps de révision, en heures, durant la journée précédente.

## 122 Courbe, variation et extremum

On a représenté dessous la courbe d'une fonction $f$ définie sur $[-5 ; 0]$.




**1.** Dresser son tableau de variations.

**2.** Indiquer quels sont les extremums éventuels de la fonction $f$, et en quel(s) valeur(s) ils sont atteints.

## 123 Variations et inéquations

$f$ et $g$ sont des fonctions dont voici les tableaux de variations.

| $x$ | −1 | | 0 | | 3 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 3 | ↗ | 5 | ↘ | 4 | ↗ | 6 |

| $x$ | −1 | | −0,5 | | 4 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | 0 | ↗ | 1 | ↘ | −2 | ↗ | 4 |

**1.** Donner leurs ensembles de définition.

**2.** Donner un encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [0 ; 5]$.

**3.** Donner un encadrement de $g(x)$ lorsque $x \in [-0,5 ; 5]$.

**4.** Comparer, si possible, les nombres suivants.

**a)** $f(-0,5)$ et $f(4)$. **b)** $g(-0,75)$ et $g(4)$.

## 124 Reconnaissance

Déterminer les variations des fonctions suivantes.

$f : x \mapsto 3(x - 6)$ sur $\mathbb{R}$.

$g : x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$.

$h : x \mapsto (x - 3)^2 - (x + 1)^2$ sur $\mathbb{R}$.

$k : x \mapsto -x(1 - x) + x - 4$ sur $\mathbb{R}$.

## 125 Courbe, variations et tracé

$f$ est une fonction définie sur $[-3 ; 4]$ telle que :

- $f$ est croissante sur $[-3 ; -1]$,
- $f$ est décroissante sur $[-1 ; 0]$,
- $f$ est croissante sur $[0 ; 4]$.

On sait de plus que $f(-3) = f(0) = -2$ et $f(-1) = 3$.

Le maximum de $f$ est 6.

**1.** Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

**2.** Quel est le minimum de la fonction $f$ ?
Pour quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?

**3.** Comparer $f(2)$ et $f(3)$. Justifier.

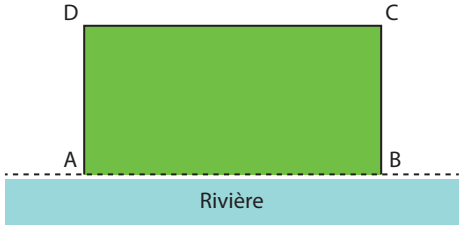
**4.** Comparer $f(-2)$ et $f(4)$.

**5.** Tracer dans un repère une courbe possible pour la fonction $f$.

## 126 No border

Aya dispose d'une clôture de longueur 40 m.

Elle souhaite construire pour ses lamas un enclos rectangulaire, le long d'une rivière. Ainsi, seuls les côtés [AD], [DC] et [CB] nécessiteront une clôture.




Aya se demande comment laisser le plus d'espace possible à ses animaux.

On note $x = AD$ et $f(x)$ l'aire du rectangle ABCD.

**1.** Déterminer l'aire du rectangle si $x = 5$.

**2.** Quelles sont les valeurs possibles pour $x$ ?

**3.** Déterminer une expression de $f(x)$ en fonction de $x$.

**4.** À l'aide de la calculatrice, déterminer une estimation de l'aire maximale qu'Aya pourrait obtenir.

**5. a)** Montrer que $f(x) = -2(x - 10)^2 + 200$.

**b)** Retrouver le résultat de la question **4.** par le calcul.

## 127 Vrai ou faux ?

On considère le tableau de variations d'une fonction $g$ définie sur $[-5 ; 8]$.

| $x$ | −5 | | 0 | | 1 | | 3 | | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | 1 | ↘ | 0 | ↗ | 4 | ↘ | 0 | ↘ | −5 |

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie, fausse ou si l'on ne peut pas conclure.

**a)** 0 a pour image 3.

**b)** 0 a deux antécédents.

**c)** $g(-4) \geqslant g(-3)$

**d)** $g(-2) \geqslant g(0,5)$

**e)** Le maximum de $g$ sur $\left[-5 ; \frac{1}{2}\right]$ est 1.

**f)** Si $a \in [-5 ; 1]$ alors $g(a) \geqslant 0$.

**g)** Si $g(a) \geqslant 0$ alors $a \in [-5 ; 1]$.

## 128 Démonstration d'une égalité

Démo

Soit $a$ et $b$ deux réels positifs. Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité : $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

**1.** Développer $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$.

**2.** Justifier que $\left(\sqrt{a+b}\right)^2 \leqslant \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$.

**3.** Conclure.

## 129 Étude de variations

Démo

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 3$.
Le but de l'exercice est d'étudier le sens de variation de $f$.

**1.** Soit $x_1$ et $x_2$ deux réels tels que $x_1 \leqslant x_2$.
Montrer que $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 2)$.

**2. a)** Montrer que si $-1 \leqslant x_1 \leqslant x_2$, alors $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$.

**b)** Que peut-on en déduire pour $f$ sur $[-1 ; +\infty[$ ?

## 130 Refaire le lien

$f$, $g$, $h$ et $k$ sont quatre fonctions.
On sait que :
- $g$ est croissante sur son ensemble de définition.
- 0 n'a pas d'antécédent par $k$.
- 4 a plusieurs antécédents par $f$.

Associer chacune des fonctions $f$, $g$, $h$ et $k$ à leur expression parmi les suivantes.

① $3x - 2$ ② $-2x + 6$ ③ $x^2$ ④ $\dfrac{1}{x}$

## 131 Enchaînement de fonctions (1)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$.

**1.** Conjecturer les variations de la fonction $f$.

**2. a)** Recopier et compléter le programme de calcul suivant.

$x \to \ldots \to \dfrac{1}{x^2+4}$

**b)** Recopier et compléter le raisonnement suivant.

Soit $a$ et $b$ deux nombres positifs tels que $a < b$.
$0 \leqslant a < b \Rightarrow a^2 \ldots b^2$ car ...
$\Rightarrow a^2 + 4 \ldots b^2 + 4$ car ...
$\Rightarrow \dfrac{1}{a^2+4} \ldots \dfrac{1}{b^2+4}$ car ...
La fonction $f$ est donc décroissante sur $\mathbb{R}+$.

**3.** Démontrer que $f$ est croissante sur $\mathbb{R}-$.

## 132 Enchaînement de fonctions (2)

Algo

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{3x - 5}{-x + 2}$.

**1.** Conjecturer les variations de la fonction $f$ sur $]-\infty ; 2[$ puis sur $]2 ; +\infty[$.

**2. a)** Vérifier que, pour $x \neq 2$, $f(x) = -3 + \dfrac{1}{-x + 2}$.

**b)** Recopier et compléter le programme de calcul suivant.

$x \to -x + 2 \to \ldots \to \ldots$

**c)** Justifier que la fonction affine $x \mapsto -x + 2$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

**d)** Démontrer que $f$ est croissante sur $]2 ; +\infty[$.

**3.** Démontrer que $f$ est croissante sur $]-\infty ; 2[$.

## 133 Maximum de fonction

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x + 3$.

**1.** Compléter les pointillés en reconnaissant le début d'une identité remarquable.
$(x - \ldots)^2 = x^2 - 6x + \ldots$

**2.** En déduire que la fonction $f$ admet un minimum.

## 134 Fonction associée

Défi

Démontrer que la fonction $x \mapsto 3\sqrt{x} + 1$ définie sur $[0 ; +\infty[$ suit les mêmes variations que la fonction racine carrée, en utilisant la définition d'une fonction croissante.

## 135 Deux moyennes

Soit $x_1$ et $x_2$ deux nombres réels positifs.
La moyenne arithmétique de ces deux nombres réels est $x_A = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.
La moyenne géométrique de ces nombres est $x_G = \sqrt{x_1 x_2}$.

**1.** Montrer que $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{x_1 x_2}\right)^2 = \left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right)^2$.

**2.** Justifier que $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \geqslant \left(\sqrt{x_1 x_2}\right)^2$.

**3.** Comparer les deux moyennes.

## 136 Aires

On considère un rectangle ABCD tel que AB = 6 cm et BC = 3 cm. On place un point M libre sur [AB]. À l'intérieur du rectangle, on construit le demi-cercle de diamètre [AM] et le triangle MBC.

**1.** Comment varie l'aire de la figure composée du demi-cercle et du triangle en fonction de la position de M ?

**2. a)** L'aire atteint-elle un maximum ?
Si oui, préciser pour quelle position de M.

**b)** L'aire atteint-elle un minimum ?
Si oui, préciser pour quelle position de M.

## 137 Qui a raison ?

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x + 1$.
Que peut-on penser des affirmations suivantes ? Argumenter.

**a)** Emilie affirme que $f$ est croissante sur $[-3 ; -1]$.

**b)** Paul calcule $f(0)$ et $f(3)$ et vérifie que $f(3) > f(0)$.
Il conclut alors que $f$ est croissante sur $[0 ; 3]$.

**c)** Zohra affirme que 4 est un maximum de $f$ sur $\mathbb{R}$.

## 138 Variations de la fonction inverse

**1.** Soit $a$ et $b$ avec $0 < a \leqslant b$.

**a)** Montrer que $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b - a}{ab}$.

**b)** Quel est le signe de $b - a$ ?

**c)** Quel est le signe de $ab$ ?

**d)** En déduire le sens de variations de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

**2.** Soit $a$ et $b$ avec $a \leqslant b < 0$.

**a)** Quel est le signe de $b - a$ ?

**b)** Quel est le signe de $ab$ ?

**c)** En déduire le sens de variation de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_-^*$.

# Exercices d'approfondissement

## 139 Fonction inverse

Démo

Démontrer que la fonction inverse n'admet pas de minimum sur ]0 ; +∞[.

## 140 Fonction racine carrée

Démo

Démontrer que la fonction racine carrée n'admet pas de maximum sur [0 ; +∞[.

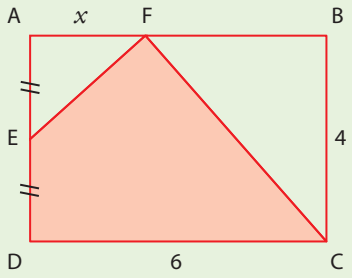
## 141 Fonction carré

Démo

Dresser le tableau de variations de la fonction carré.
Démontrer que cette fonction n'a pas de maximum.

## 142 Modéliser à l'aide d'une indéterminée

ABCD est un rectangle tel que CD = 6 et BC = 4. E est le milieu de[AD]. F est un point du segment [AB]. On note AF = $x$.




**1.** Déterminer les valeurs possibles pour $x$.

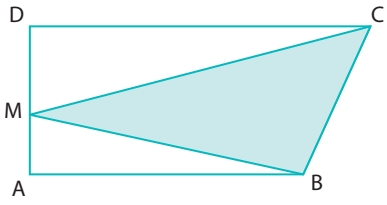
**2.** Déterminer l'aire maximale du quadrilatère DEFC. Pour quelle valeur de $x$ est-elle atteinte ?

Quelle est alors la nature du quadrilatère DEFC ?

↳ Résolution de problèmes p. 80 et p. 217

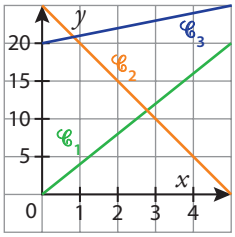
## 143 Aire et trapèze

On considère un trapèze rectangle ABCD, comme sur la figure ci-contre. On place un point libre M sur le segment [AD].




La distance AM en cm est notée $x$.

On a représenté les courbes des trois fonctions donnant, en fonction de $x$, l'aire des triangles ABM, BCM et DCM.




**1.** À quelle aire correspond chacun des graphiques ? Justifier.

**2.** Retrouver les expressions des fonctions représentées.

**3.** En déduire les longueurs de chaque côté du trapèze.

# Vers la 1re

## 144 Vers la Spécialité Maths

**1.** Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b$.
Recopier et compléter.

$a \leqslant b$ donc $a^2$ … $ab$ et $a \leqslant b$ donc $ab$ … $b^2$. Soit $a^2$ … $b^2$.
On déduit des lignes précédentes que la fonction carré est … sur [0 ; + ∞[.

**2.** Démontrer de même, les variations de la fonction carré sur ]–∞ ; 0] en prenant cette fois $a$ et $b$ deux réels négatifs tels que $a \leqslant b \leqslant 0$.

**3.** Établir le tableau de variations de la fonction carré.

## 145 Vers la Spécialité Maths

On étudie la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)^2$.

**1.** Conjecturer le sens de variation de la fonction $f$ à l'aide de la calculatrice.

**2.** Démontrer que $f(b) - f(a) = (b-a)(a+b-4)$.

**3.** On suppose que $a < b < 2$.

**a)** Quel est le signe de $b - a$ ?

**b)** Comparer $a + b$ et 4 puis $f(b)$ et $f(a)$.

**c)** En déduire le sens de variation de $f$ sur ]–∞ ; 2[.

**4.** On suppose que $2 < a < b$.
Quel est le sens de variation de la fonction $f$ ?

**5.** La fonction $f$ admet-elle un extremum ? Lequel ?

## 146 Vers STMG

Un fabricant produit dans une usine des T-shirts.
Après la fabrication et la vente de $x$ centaines de T-shirts en un mois, le bénéfice net réalisé en centaines d'euros est donné par la fonction : $B(x) = -0{,}5x^2 + 50x - 800$ pour $x \geqslant 0$.

**1.** Déterminer le bénéfice obtenu pour 4 000 T-shirts produits et vendus.

**2.** Montrer que $B(x) = -0{,}5(x-50)^2 + 450$.

**3.** En déduire le bénéfice maximal que peut obtenir le fabricant. Pour combien de T-shirts fabriqués et vendus ce bénéfice est-il atteint ?

## 147 Vers STI2D

Une joueuse de handball lance une balle devant elle.

Au bout de $x$ mètres parcourus au sol, la hauteur de la balle (en mètres) avant qu'elle ne touche le sol est donnée par :

$$h(x) = -0{,}05x^2 + 0{,}9x + 2.$$

**1.** Quelle est la hauteur de la balle après 20 mètres parcourus au sol ?
Que peut-on en déduire pour la balle ?

**2. a)** Montrer que $h(x) = -0{,}05(x-9)^2 + 6{,}05$.

**b)** Que peut-on dire du signe de $(x-9)^2$ ?

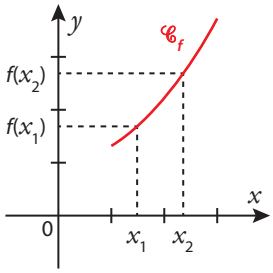
**c)** En déduire la hauteur maximale atteinte par la balle.

**CARTES FLASH**
Mémoriser le cours
www.lienmini.fr/8270-2

Objectif
## 1 Déterminer graphiquement le sens de variation d'une fonction

### Fonction croissante

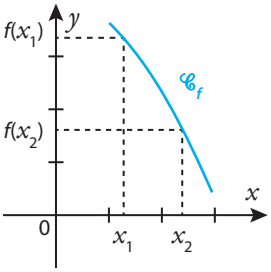
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I.




- On dit que $f$ est croissante sur I si lorsque $x$ augmente sur I, alors $f(x)$ augmente.
- Autrement dit, pour tous réels $x_1$ et $x_2$ de I, si $x_1 \leqslant x_2$, alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

### Fonction décroissante

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I.




- On dit que $f$ est décroissante sur I si lorsque $x$ augmente sur I, alors $f(x)$ diminue.
- Autrement dit, pour tous réels $x_1$ et $x_2$ de I, si $x_1 \leqslant x_2$, alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Objectif
## 2 Interpréter les variations d'une fonction

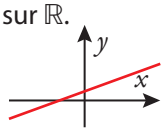
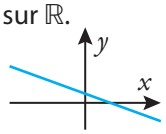
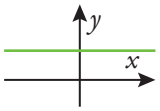
- Connaître les variations d'une fonction permet de comparer des images, d'encadrer des images, de résoudre des problèmes.
- Par exemple le tableau de variations de la fonction $f$ permet de comparer $f(3)$ et $f(4)$. On sait que 3 et 4 sont des nombres de l'intervalle [1 ; 7] et que $f$ est décroissante sur cet intervalle. On a $f(3) \geqslant f(4)$.

| $x$ | $-1$ | | $1$ | | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $-1$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-5$ |

Objectif
## 3 Utiliser les variations des fonctions affines et des fonctions de référence

### Variations des fonctions affines

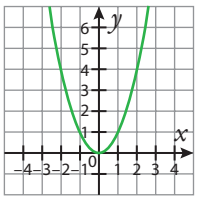
Soit $f(x) = ax + b$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec $a$ et $b$ réels.

| $a > 0 \Rightarrow$ | $a < 0 \Rightarrow$ | $a = 0 \Rightarrow$ |
|---|---|---|
| $f$ croissante sur $\mathbb{R}$. | $f$ décroissante sur $\mathbb{R}$. | $f$ constante sur $\mathbb{R}$. |
|  |  |  |

### Variations des fonctions de référence

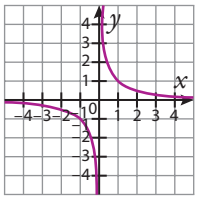
**Fonction carré**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x \mapsto x^2$ | | ↘ | $0$ | ↗ | |



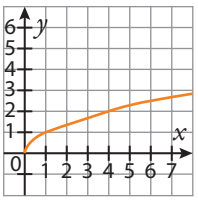
**Fonction inverse**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x \mapsto \frac{1}{x}$ | | ↘ | ‖ | ↘ | |



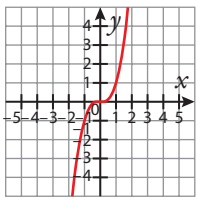
**Fonction racine carrée**

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x \mapsto \sqrt{x}$ | $0$ | ↗ | |



**Fonction cube**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x \mapsto x^3$ | | ↗ | |



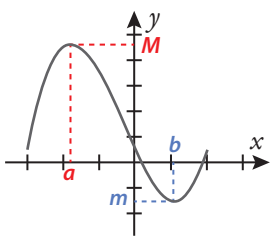
Objectif
## 4 Déterminer les extremums d'une fonction

### Maximum d'une fonction

- Soit une fonction $f$ définie sur I.

S'il existe $M$ réel et $a \in$ I tel que $f(x) \leqslant M$ et $f(a) = M$ alors $M$ est le **maximum** de $f$ pour $x = a$

- Il correspond à l'ordonnée du point le plus haut de la courbe.




### Minimum d'une fonction

- Soit une fonction $f$ définie sur I.

S'il existe $m$ réel et $b \in$ I tel que $f(x) \geqslant m$ et $f(b) = m$ alors $m$ est le **minimum** de $f$ pour $x = b$.

- Il correspond à l'ordonnée du point le plus bas de la courbe.

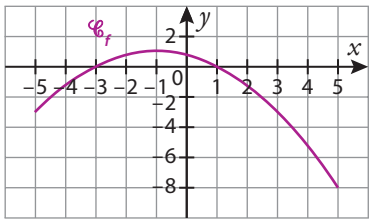
**QCM INTERACTIF**
Tester ses connaissances
www.lienmini.fr/8270-28

## QCM Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Objectif **1**

### Déterminer graphiquement le sens de variation d'une fonction

***f*** **est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.**




| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **147** *f* est croissante sur l'intervalle : | [−5 ; −1] | [−1 ; 5] | [−3 ; −2] | [−3 ; 1] |
| **148** *f* est décroissante sur l'intervalle : | [−8 ; −1] | [−2 ; −1] | [−1 ; 5] | [−1 ; 1] |

Objectif **2**

### Interpréter les variations d'une fonction

**Soit *f* une fonction dont voici le tableau de variations. On sait de plus que *f*(1,5) = 1.**

| $x$ | −3 | | 1 | | 2 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | −2 | ↘ | −4 | ↗ | 2 | ↘ | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **149** On peut affirmer que : | $f(-3) < f(1)$ | $f(1) < f(1{,}2)$ | $f(2) > f(3)$ | $f(-2) < f(1{,}9)$ |
| **150** *f* est définie sur : | [−4 ; 2] | [−2 ; 1] | [−3 ; 4] | $\mathbb{R}$ |
| **151** Les solutions de $f(x) > 1$ sont les nombres de : | {2} | {1,5 ; 2 ; 4} | [1,5 ; 4] | ]1,5 ; 4[ |

Objectif **3**

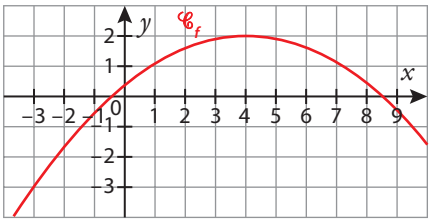
### Utiliser les variations des fonctions affines et des fonctions de référence

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **152** $x \mapsto 4x - 5$ est : | croissante. | décroissante. | monotone. | constante. |
| **153** Si $x \in [-2 ; 3]$ alors : | $x^2 \in [4 ; 9]$ | $x^2 \in [2 ; 9]$ | $x^2 \in [0 ; 9]$ | $x^2 \in [0 ; 4]$ |

Objectif **4**

### Déterminer les extremums d'une fonction

***f*** **est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont voici la courbe représentative dans un repère.**




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **154** *f* a pour maximum : | 10 | 4 | 3 | 2 |
| **155** Le maximum est atteint en : | −3 | 4 | 3 | 2 |
| **156** La fonction *f* : | a un minimum. | n'a pas de minimum. | a un extremum. | n'a pas d'extremum. |

↪ Corrigés p. 390

# Préparer le contrôle — Je m'entraîne

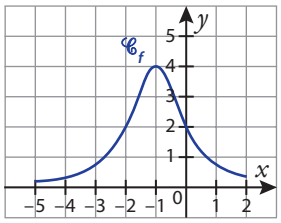
## Parcours différenciés

| | Objectif 1 | Objectif 2 | Objectif 3 | Objectif 4 |
|---|---|---|---|---|
| Parcours A | 47 157 | 3 66 160 | 5 9 11 163 | 7 166 |
| Parcours B | 1 54 158 | 161 | 96 164 | 83 167 |
| Parcours C | 159 | 162 | 72 102 165 | 168 |

## Exercices

### Objectif 1 — Déterminer graphiquement le sens de variation d'une fonction

**157** *f* est une fonction dont voici la courbe représentative.
Décrire les variations de la fonction *f* avec des phrases.
Dresser son tableau de variations.




**158** Dresser le tableau de variations d'une fonction croissante sur [−2 ; 4] et décroissante sur [4 ; 6] telle que $f(-2) = -1$, $f(4) = 5$ et $f(6) = 3$.

**159** Soit la fonction *f* qui à un nombre réel positif $x$ associe le périmètre du carré de côté $x$.
Déterminer le sens de variation de *f*.

### Objectif 2 — Interpréter les variations d'une fonction

**160** Soit *f* une fonction dont voici le tableau de variations.
Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter la fonction *f*.

| $x$ | −3 | | 0 | | 3 | | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | −4 | ↗ | 2 | ↘ | 0 | ↗ | 1 |

**161** Soit *f* une fonction dont voici le tableau de variations.
Comparer les nombres :
**a)** $f(-4)$ et $f(-3)$.
**b)** $f(-1)$ et $f(0)$.

| $x$ | −5 | | −3 | | $\frac{1}{2}$ | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | −4 | ↗ | 3 | ↘ | 1 | ↗ | 6 |

**162** On considère la fonction *f* de l'exercice précédent.
On sait de plus que $f(1) = 3$.
Résoudre les inéquations suivantes.
**a)** $f(x) > 3$
**b)** $f(x) \leqslant 3$

### Objectif 3 — Utiliser les variations des fonctions affines et des fonctions de référence

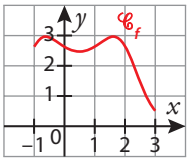
**163** **1.** Comparer les nombres suivants.
**a)** $\sqrt{2}$ et $\sqrt{\frac{13}{6}}$. **b)** $\frac{1}{7,5}$ et $\frac{1}{7,32}$. **c)** $\pi^3$ et $3,5^3$.
**2.** Donner un encadrement de :
**a)** $\frac{1}{x}$ si $x \in [1 ; 4]$. **b)** $x^2$ si $x \in [-1 ; 2]$.

**164** Soit les fonctions *f* et *g* définies par :
$f(x) = 4 - \frac{x}{3}$ et $g(x) = x - x(1 - x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Déterminer le sens de variation de *f* et *g*.

**165** **1.** Justifier que la fonction $x \mapsto 2x^2 - 8$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
**2.** Étudier les variations de la fonction $x \mapsto \frac{4}{x} + 1$ sur $]0 ; +\infty[$.

### Objectif 4 — Déterminer les extremums d'une fonction

**166** *f* est une fonction dont voici la courbe représentative.
**1.** Déterminer le maximum de *f* et en quelle(s) valeur(s) il est atteint.
**2.** Déterminer le minimum de *f* et en quelle(s) valeur(s) il est atteint.




**167** *f* est une fonction dont voici le tableau de variations.
**1.** Déterminer le maximum de *f*.
Préciser en quelle(s) valeur(s) il est atteint.
**2.** *f* admet-elle un minimum ?

| $x$ | −10 | | −3 | | 1 | | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | −2 | ↗ | 4 | ↘ | −7 | ↗ | 3 |

**168** Soit *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 1$.
**1.** Montrer que $f(x) = -(x - 2)^2 + 5$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
**2.** Montrer que $f(x) \leqslant 5$ pour $x \in \mathbb{R}$.
**3.** Montrer que 5 admet un antécédent par *f*.
**4.** Démontrer que *f* a un maximum.
**5.** Préciser sa valeur et en quelle valeur de $x$ il est atteint.

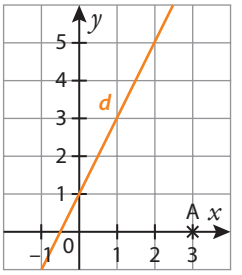
↪ Corrigés p. 390

# Travaux pratiques

Géométrie dynamique — 40 min — Modéliser — Représenter

## 1 Distance minimale

Dans un repère orthonormé, on considère la droite $d$ d'équation $y = 2x + 1$ et le point A(3 ; 0). On se pose le problème suivant :
Quelles sont les coordonnées du point M de $d$ tel que la distance AM est minimale ?




### A ▸ Expérimentation

**1.** À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, afficher la droite $d$ et le point A dans un repère.

**2.** Placer un point M et faire afficher le segment [AM].

**3.** Conjecturer la réponse au problème.

### B ▸ Résolution

**1.** Pour M d'abscisse $x = 2$, calculer la distance AM.

**2.** Montrer que si M a pour abscisse $x$, alors $AM^2 = 5x^2 - 2x + 10$.

**3.** On pose $f(x) = 5x^2 - 2x + 10$ pour $x \in \mathbb{R}$. Conjecturer le minimum de la fonction $f$.

**4.** Montrer que $f(x) = 5(x - 0{,}2)^2 + 9{,}8$.

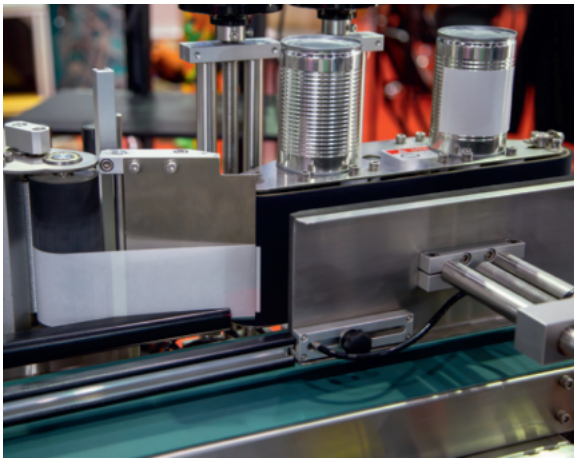
**5.** Répondre au problème posé.

**6.** Pour aller plus loin Démontrer que si $u$ est une fonction positive sur un intervalle I et si $f = \sqrt{u}$, alors $f$ et $u$ ont les mêmes variations.

Géométrie dynamique — Python — 35 min — Chercher — Calculer

## 2 Boîtes de conserve et développement durable

Un fabricant de boîtes de conserve souhaite minimiser la surface de métal de ses boîtes de conserve, de forme cylindrique.



**1.** Déterminer le volume d'un cylindre de rayon 5 cm et de hauteur 10 cm. On donnera une valeur exacte et une valeur approchée au dixième.

**2.** Le fabricant souhaite construire des boîtes de volume de 1 000 $cm^3$. On note $h$ la hauteur et $x$ le rayon du cylindre.

**a)** Montrer que $h = \dfrac{1000}{\pi x^2}$.

**b)** Calculer la surface de la boîte de conserve en fonction de $x$ et de $h$, puis seulement en fonction de $x$.

**c)** À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer quelles doivent être les dimensions de la boîte de conserve pour que la surface soit la plus petite possible.

**d)** Compléter le programme **Python** ci-contre pour qu'il donne une valeur approchée à $10^{-3}$ du rayon cherché.

```
def rayon() :
    x=1
    a=2000/x+2*pi*x**2
    x=x+0.001
    b=2000/x+2*pi*x**2
    while a<b:
        ...
    return(...)
```

**e)** Exécuter la fonction précédente pour répondre au problème posé.

**f)** Pour aller plus loin Quelle dimension choisir pour un volume $\mathcal{V}$ donné ?

Python · 50 min · Modéliser · Chercher

# 3 Bénéfice maximal

Une usine produit des machines agricoles. En un mois, elle peut en produire jusqu'à 50.
On a modélisé le bénéfice de l'entreprise, exprimé en millier d'euros par la fonction $f$ définie pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle [0 ; 50] par :
$f(x) = x^3 - 96x^2 + 2\,484x - 10\,000$.
On dit que l'entreprise réalise des profits si son bénéfice est strictement positif.

## A ▸ Déterminer le tableau de variations de la fonction $f$

**1.** Recopier et compléter le tableau ci-contre. Arrondir à l'unité.

| $x$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

**2.** L'entreprise réalise-t-elle des profits à chaque fois quelle que soit la production annuelle ?

**3.** Quel semble être un intervalle possible où l'entreprise réalise un bénéfice ?

**4.** Établir un tableau de valeurs de la fonction $f$ sur [0 ; 50] avec un pas de 5.

**5.** En déduire les paramètres de la fenêtre d'affichage de la courbe de la fonction $f$ à la calculatrice.

**6.** Établir le tableau de variations de la fonction $f$ sur [0 ; 50] à partir de la courbe tracée précédemment.

## B ▸ Intervalle de profit

On note $\alpha$ et $\beta$ les deux nombres de [0 ; 50] tels que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

**1.** Reporter $\alpha$ et $\beta$ dans le tableau de variations et indiquer l'intervalle sur lequel l'entreprise réalise des profits.

**2.** On considère un intervalle $[a ; b]$ tel que $\alpha \in [a ; b]$ et $f$ est strictement croissante sur cet intervalle.
**a)** Quels sont les signes de $f(a)$ et $f(b)$ ?
**b)** Que fait le programme en langage **Python** ci-contre ?
**c)** Déterminer un intervalle de longueur $10^{-2}$ qui contient $\alpha$.

```
a=float(input( "Entrer la valeur de a :" ))
b= float(input(" Entrer la valeur de b : "))
p= float(input(" Entrer le pas :" ))
x=a
y=x**3-96*x**2+2484*x-10000
M=b**3-96*b**2+2484*b-10000
while y<0 :
    x=x+p
    y= x**3-96*x**2+2484*x-10000
M=x
m=M-p
print( "α appartient à [ " , m ,M " ] ")
```

**3.** On considère un intervalle $[a ; b]$ tel que $\beta \in [a ; b]$ et que $f$ soit strictement décroissante.
**a)** Quels sont les signes de $f(a)$ et $f(b)$ ?
**b)** Adapter le programme de la question **2.** pour déterminer un intervalle de longueur $10^{-2}$ qui contient $\beta$.

**4.** Donner, sous forme d'intervalle, le nombre de machines agricoles que doit produire l'entreprise pour réaliser des profits.

## C ▸ Bénéfice maximal

**1.** Compléter le programme en langage **Python** ci-contre qui détermine une valeur approchée du maximum de la fonction $f$ sur un intervalle $[a ; b]$.

```
a=float(input("Entrer la valeur de a :" ))
b= float(input("Entrer la valeur de b :" ))
p= float(input("Entrer le pas :" ))
x=a
y=…
while ….
….
print( "Une valeur approchée du maximum
de f est M ")
```

**2.** Déterminer le nombre de machines à fabriquer pour que le bénéfice soit maximal puis calculer ce bénéfice maximal.

**3.** **Pour aller plus loin** Écrire un programme qui détermine une valeur approchée à $10^{-3}$ près du minimum de la fonction $f$ sur [40 ; 50].

*(D'après bac STMG, Pondichéry, 2018)*

10

# Signe d'une fonction

**Les maths au quotidien**

Un artisan qui vend des chaises voudra savoir si la quantité produite et le montant des ventes lui permet de dégager un bénéfice. Ce problème peut être résolu en résolvant une inéquation par l'**étude du signe d'une fonction**.

# Pour prendre un bon départ

EXERCICES Sésamath
Réviser ses acquis
www.lienmini.fr/8270-s20

## 1 Résoudre des équations

Vu au collège

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

**a)** $3x + 9 = 0$ **b)** $-2x + 18 = 0$ **c)** $-x + 3 = 8$

**d)** $4x - 3 = 2x + 4$ **e)** $\frac{x}{2} - 3 = 1$ **f)** $3x - 9 = \frac{3}{2}x + 1$

## 2 Résoudre des inéquations

Vu au chap 3

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

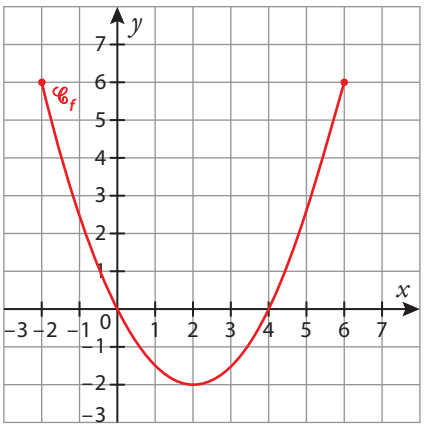
**a)** $4x + 2 > 0$ **b)** $-2x + 6 \geqslant 0$ **c)** $2x > -x + 18$

**d)** $8x + 1 \leqslant 1$ **e)** $5x + 1 \geqslant 9x + 10$ **f)** $\frac{x}{2} + 5 \leqslant 2x + 1$

## 3 Résoudre graphiquement une inéquation

Vu au chap 8

$f$ est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.




Résoudre les inéquations suivantes.

**a)** $f(x) < 0$ **b)** $f(x) \geqslant 1$ **c)** $f(x) < 7$

## 4 Développer une expression

Vu au collège

Développer les expressions suivantes.

**a)** $(x - 1)(x + 2)$ **b)** $(2x + 6)(x - 8)$

**c)** $5(x + 1)(x - 6)$ **d)** $(2x + 5)(-4x + 1)$

## 5 Déterminer les variations d'une fonction affine

Vu au chap 9

Donner les variations des fonctions suivantes.

**a)** $f : x \mapsto 2x - 1$ sur $\mathbb{R}$. **b)** $g : x \mapsto 0{,}5x + 5$ sur $\mathbb{R}$.

**c)** $h : x \mapsto 2 - 5x$ sur $\mathbb{R}$. **d)** $k : x \mapsto -x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

## 6 Factoriser une expression

Vu au chap 4

Factoriser les expressions suivantes.

$A(x) = 4x - 2x^2$ $B(x) = 2(x + 1)^2 - 5(x + 1)$ $C(x) = x^2 - 9$

$D(x) = 16 - x^2$ $E(x) = x^2 - 2x + 1$ $F(t) = 4t^2 - 12t + 9$

# Activités

25 min

## 1 Signe d'une fonction

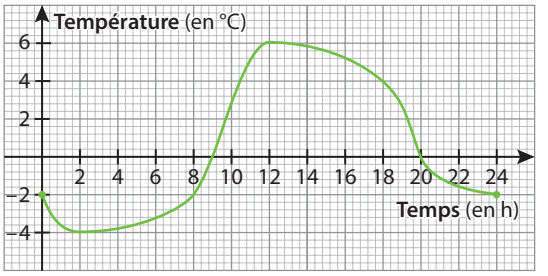
### A ▸ Températures

À l'aide d'un capteur, on a relevé la température à Grenoble durant une journée de janvier à minuit puis pendant 24 h.

**1. a)** Déterminer à quelle(s) heure(s) la température est nulle.
**b)** Déterminer les périodes où la température est positive.
**c)** Déterminer les périodes où la température est négative.

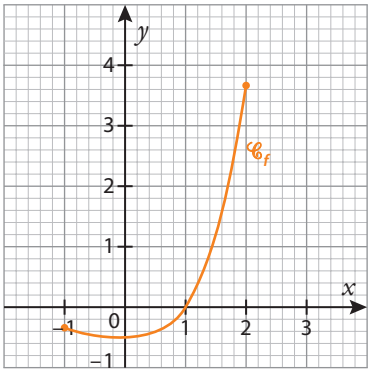
**2.** On compile ces informations dans un tableau de signes. Recopier et compléter ce tableau :

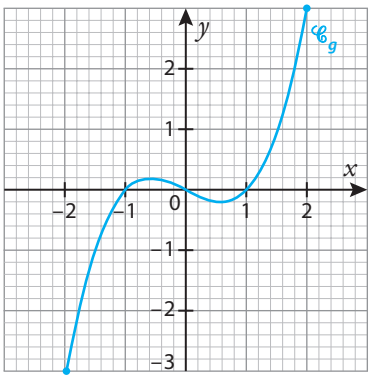
| **Temps** (en h) | 0 | | 9 | … | | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Température** (en °C) | … | + | … | … | … | |

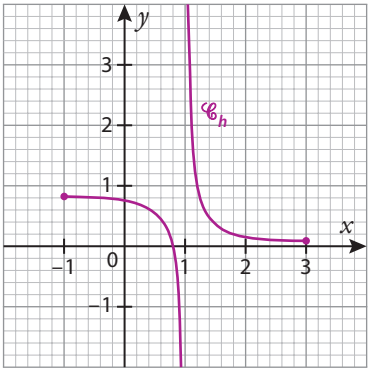



### B ▸ Signe d'une fonction

On considère trois fonctions $f$, $g$ et $h$ dont voici les courbes représentatives dans un repère.




**1.** Dresser le tableau de signes des fonctions $f$, $g$ et $h$.

**2.** Pour aller plus loin Donner le tableau de signes des fonctions inverse, carré, racine carrée, cube.

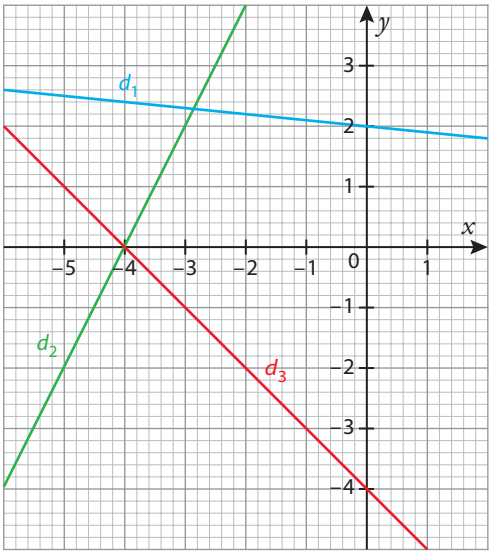
↪ Cours 1 p. 268

30 min

## 2 Signe d'une fonction affine

### A ▸ Étude d'exemples

On a tracé dans le repère ci-contre les droites représentatives des fonctions affines $f$, $g$ et $h$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 8$, $g(x) = -x - 4$ et $h(x) = -0{,}1x + 2$.




**1.** Associer à chaque fonction sa représentation graphique.

**2.** Dresser le tableau de signes de $f$ et de $g$ à l'aide de leurs courbes.

**3. a)** Résoudre par le calcul $f(x) = 0$ et $f(x) > 0$.
**b)** Indiquer comment retrouver le résultat de la question **2.** pour la fonction $f$.
**c)** Retrouver le signe de $g(x)$ et de $h(x)$ par cette méthode.

### B ▸ Généralisation

Pour aller plus loin Dresser le tableau de signes de $ax + b$ en discutant selon les valeurs de $a$.

↪ Cours 2 p. 270

30 min

## 3 Signe d'un produit et signe d'un quotient

**1.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 3$.
Dresser son tableau de signes.

**2.** Déterminer de même le tableau de signes de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 5$.

**3.** Sans calcul, déterminer le signe de $f(1) \times g(1)$ et de $\dfrac{f(2)}{g(2)}$.

**4.** On considère la fonction $P$ définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = (-2x + 3)(2x + 5)$.

**a)** Quels doivent être les signes de $(-2x + 3)$ et de $(2x + 5)$ pour que $P(x)$ soit positif ?

**b)** Compléter le tableau de signes suivant.

| $x$ | $-\infty$ | ... | ... | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $-2x+3$ | | | 0 | |
| $2x+5$ | | 0 | | |
| $P(x)$ | | + | − | |

**5.** On considère la fonction $Q$ définie par $Q(x) = \dfrac{-2x+3}{2x+5}$.

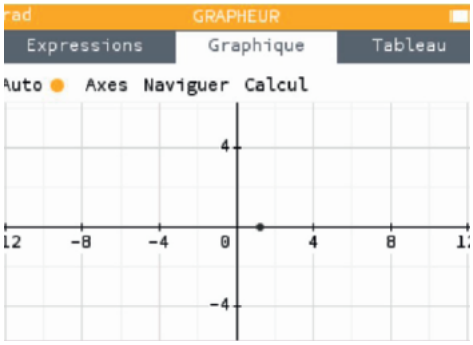
**a)** La fonction $Q$ est-elle définie pour tout nombre réel ?

**b)** Étudier le signe de la fonction $Q$ en présentant les résultats sous forme d'un tableau.

**6.** Pour aller plus loin

Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = \sqrt{(-4x + 5)(8x - 10)}$.

On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction $g$ obtenue avec la calculatrice.




**a)** Conjecturer le plus grand ensemble de définition possible de la fonction $g$.

**b)** Le démontrer.

↪ Cours 3 p. 270

30 min

## 4 Résolution d'inéquations

**1.** Parmi les inéquations suivantes, indiquer laquelle (lesquelles) est (sont) une (des) inéquation(s) du premier degré, puis la (les) résoudre.

**a)** $4x + 3 \leqslant 0$ **b)** $x^2 - x - 6 < 0$ **c)** $x(x + 1) < 0$ **d)** $x^2 < 4$

**2.** On donne ci-contre le tableau de signes de l'expression $A(x) = x^2 - x - 6$.
Résoudre les inéquations suivantes.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

**a)** $x^2 - x - 6 > 0$ **b)** $x^2 - x - 6 \leqslant 0$

**3. a)** Étudier le signe de $x(x + 1)$.

**b)** Résoudre $x(x + 1) < 0$.

**4.** On cherche à résoudre la dernière inéquation.

**a)** Montrer que $x^2 < 4 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) < 0$ pour tout réel $x$.

**b)** En déduire les solutions de $x^2 < 4$.

**5.** Pour aller plus loin Résoudre $\dfrac{1}{x+1} < 2$.

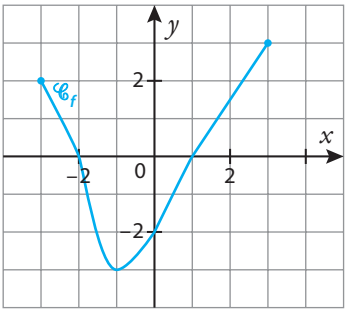
↪ Cours 4 p. 272

# 1 Signe d'une fonction

## Définition Étude du signe d'une fonction

**Étudier le signe d'une fonction $f$ définie sur un ensemble I, ou de son expression $f(x)$, revient à déterminer le signe des images $f(x)$ en fonction de $x$.**
**Autrement dit, on indique pour quelles valeurs de $x$ les images $f(x)$ sont strictement positives, strictement négatives ou nulles.**

**Remarque**
On présente souvent le signe d'une fonction sous la forme d'un tableau de signes.




**Exemples**

• $f$ est une fonction définie sur $[-3 ; 3]$ dont voici la courbe représentative dans un repère.
- $f(x)$ est strictement positive si $x \in [-3 ; -2[ \cup ]1 ; 3]$.
- $f(x)$ est strictement négative si $x \in ]-2 ; 1[$.
- $f(x)$ est nulle si $x = -2$ ou $x = 1$.

On présente les résultats précédents dans un tableau de signes comme le suivant.

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

• $g$ est la fonction définie par $g(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.
$g(x)$ est strictement positive sauf en $x = 0$ où $g(x)$ est nulle.
On en déduit le tableau de signes suivant.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |

**Remarques**

• Comme pour le tableau de variations, le tableau de signes est constitué d'au moins deux lignes.
- La première ligne correspond à la variable, généralement $x$. On y indique notamment les valeurs de $x$ telles que $f(x) = 0$. On peut aussi y lire l'ensemble de définition de la fonction.
- La dernière ligne correspond au signe : strictement positif +, strictement négatif – ou nul 0.

• Dans le tableau de signes de la fonction inverse, la double-barre indique une valeur interdite, comme pour les tableaux de variations.

## Propriété Signe des fonctions carré, inverse, racine carrée et cube

**Les tableaux de signes des fonctions carré, inverse, racine carrée et cube sont donnés ci-dessous.**

**Fonction carré**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |

**Fonction inverse**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x}$ | | $-$ | ‖ | $+$ | |

**Fonction racine carrée**

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\sqrt{x}$ | | $+$ | |

**Fonction cube**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**EXERCICES** Sésamath
Travailler des méthodes
www.lienmini.fr/8270-s21

# Exercices résolus

**VIDÉO** ALL MATHS PARNAK
Comprendre une méthode
www.lienmini.fr/8270-30

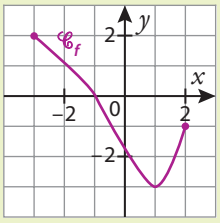
## Méthode 1 Lire graphiquement le signe d'une fonction

### Énoncé

***f* est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.**

**1. Résoudre $f(x) = 0$ et $f(x) > 0$.**

**2. Dresser le tableau de signes de la fonction *f*.**




### Solution

1. $f(x) = 0$ si et seulement si $x = -1$ (1)
$f(x) > 0$ si et seulement si $x \in [-3 ; -1[$. (2)

2. On obtient le tableau de signes ci-contre. (3)

| $x$ | −3 | | −1 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | − | |

### Conseils & Méthodes

(1) Résoudre $f(x) = 0$ revient à chercher l'abscisse des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

(2) Résoudre $f(x) > 0$ revient à chercher l'abscisse des points de la courbe situés au-dessus de l'axe des abscisses.

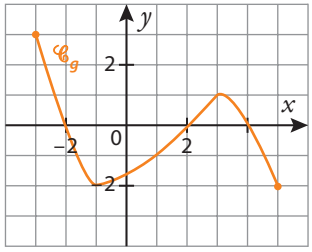
(3) On indique dans la première ligne les valeurs de $x$ telles que $f(x) = 0$ puis on complète la deuxième ligne avec les 0 et des signes + ou −.

### À vous de jouer !

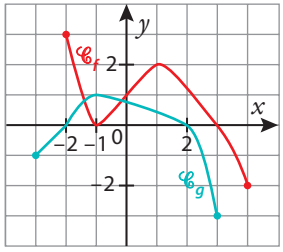
**1** *f* est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.

1. Résoudre $f(x) = 0$ et $f(x) < 0$.

2. Dresser le tableau de signes de la fonction *f*.




**2** Dresser le tableau de signes des fonctions *f* et *g* dont voici les courbes représentatives dans un repère.




↪ Exercices 47 à 54 p. 276

## Méthode 2 Interpréter un tableau de signes

### Énoncé

***f* est une fonction dont voici le tableau de signes.**

| $x$ | −3 | | 2 | | 4 | | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | |

**1. Donner l'ensemble de définition de *f*.**

**2. Donner le signe de $f(3)$ et de $f\left(\frac{9}{2}\right)$.**

**3. Indiquer pour quelles valeurs de $x$, on a : a) $f(x)$ positif. b) $f(x)$ négatif.**

### Solution

1. L'ensemble de définition de *f* est $[-3 ; 7]$. (1)

2. $3 \in [2 ; 4]$ donc $f(3)$ est strictement positif et $\frac{9}{2} \in [4 ; 7]$ donc $f\left(\frac{9}{2}\right)$ est strictement négatif. (2)

3. $f(x)$ est positif si $x \in [2 ; 4]$. (3)

4. $f(x)$ est négatif si $x \in [-3 ; 2] \cup [4 ; 7]$. (3)

### Conseils & Méthodes

(1) Les bornes de l'ensemble de définition se trouvent aux extrémités de la première ligne du tableau.

(2) Repérer à quel intervalle du tableau appartiennent les nombres dont on cherche le signe de l'image.

(3) Lire dans la deuxième ligne du tableau le signe de l'image puis retrouver les valeurs de $x$ correspondantes dans la première ligne.

### À vous de jouer !

**3** Voici le tableau de signes d'une fonction *g*.

| $x$ | −1 | | 0 | | 2 | | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | |

Donner le signe des nombres : **a)** $g(1)$ **b)** $g(0)$ **c)** $g(-0{,}5)$

**4** *h* est une fonction dont voici le tableau de signes. Indiquer pour quelles valeurs de $x$ on a : **a)** $h(x)$ strictement positif. **b)** $h(x)$ négatif ou nul.

| $x$ | −2 | | 2 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | − | 0 | + | 0 |

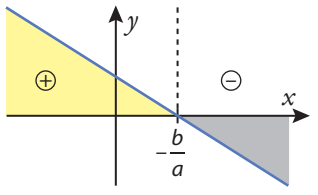
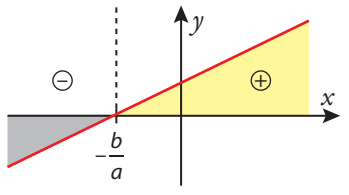
↪ Exercices 55 à 60 p. 277

# 2 Signe d'une fonction affine

**Propriété** **Étude du signe d'une fonction affine**

**Soit $a$ et $b$ deux nombres réels avec $a \neq 0$.**

**La fonction affine $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ s'annule et change de signe une fois dans son ensemble de définition en $x = -\dfrac{b}{a}$.**

| $a < 0$ | $a > 0$ |
|---|---|
|  |  |



| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ax+b$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ax+b$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**Exemple** Dresser le tableau de signes de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3x + 4$.

$g(x) = ax + b$ avec $a = -3$, $a$ est négatif.

On recherche la valeur qui annule $g(x)$ : $-3x + 4 = 0$ soit $x = \dfrac{-4}{-3} = \dfrac{4}{3}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{4}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-3x+4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

# 3 Signe d'un produit ou d'un quotient

**Propriété** **Signe d'un produit ou d'un quotient**

- **On peut déduire le signe d'un produit à partir du signe de ses facteurs en appliquant la règle des signes.**
- **On peut déduire le signe d'un quotient à partir du signe de son numérateur et de son dénominateur en appliquant la règle des signes.**
- **On utilise pour cela un tableau de signes qui fait apparaître d'abord dans chaque ligne le signe de chaque facteur, numérateur, dénominateur, pour en déduire dans la dernière ligne le signe du produit ou du quotient en appliquant la règle des signes.**

**Exemple**

Déterminer le signe de la fonction $h$ définie par $h(x) = \dfrac{3x - 5}{2x + 8}$ pour $x \neq -4$.

$h$ est un quotient de deux fonctions affines dont on peut déterminer le signe.

- Pour le numérateur $x \mapsto 3x - 5$, on a $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-5}{3} = \dfrac{5}{3}$ et $a > 0$.
- Pour le dénominateur $x \mapsto 2x + 8$, on a $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{8}{2} = -4$ et $a > 0$.

On en déduit le tableau de signes ci-contre.

- Lorsque le dénominateur s'annule, le quotient n'est pas défini : on indique que la valeur $-4$ est interdite en mettant une double barre.
- Lorsque le numérateur s'annule, le quotient vaut 0.

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $\frac{5}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x-5$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $2x+8$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{3x-5}{2x+8}$ | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

# Exercices résolus

## Méthode 3 Étudier le signe d'une fonction affine

**Énoncé**

**Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = 4x + 12$ pour $x \in \mathbb{R}$.**
**1. Donner le tableau de signes de $f(x)$.**
**2. Résoudre : a) $f(x) = 0$. b) $f(x) > 0$.**
**3. Retrouver le tableau de signes de $f$ à l'aide des questions 2. a) et 2. b).**

**Solution**

**1.** $a = 4$ et $b = 12$
donc $-\frac{b}{a} = -\frac{12}{4} = -3$. (1)
$a > 0$ donc on en déduit le tableau de signes ci-dessus. (2)

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4x + 12$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**2. a)** $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x + 12 = 0 \Leftrightarrow 4x = -12 \Leftrightarrow x = -3$
**b)** $f(x) > 0 \Leftrightarrow 4x + 12 > 0 \Leftrightarrow 4x > -12 \Leftrightarrow x > -3$
**c)** On déduit des deux questions précédentes le tableau de signes ci-contre (3) que l'on complète avec le signe – à la place des pointillés. On retrouve ainsi le tableau de la question 1.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4x + 12$ | | … | $0$ | $+$ | |

**Conseils & Méthodes**

(1) On calcule $-\frac{b}{a}$.

(2) Si $a > 0$ la fonction est négative avant $-\frac{b}{a}$, et positive après.
Si $a < 0$, la fonction est positive avant $-\frac{b}{a}$ et négative après.

(3) On construit le tableau avec les 0 et le signe + puis on complète les blancs du tableau avec le signe –.

**À vous de jouer !**

**5** Déterminer le signe des fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x + 10$ et $g(x) = -4x + 1$.

**6** Étudier le signe de $-x + 4$ et de $\frac{x}{2} + 3$ en fonction de $x$.

↪ Exercices 61 à 67 p. 278

## Méthode 4 Déterminer le signe d'un produit

**Énoncé**

**1. Étudier le signe de $2x + 4$ et de $-x + 3$ pour $x \in \mathbb{R}$.** **2. En déduire le signe de $A(x) = (2x + 4)(-x + 3)$.**

**Solution**

**1.** • $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$ (1)
De plus, $a = 2 > 0$ donc :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x + 4$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

• $-x + 3 = 0 \Leftrightarrow -x = -3 \Leftrightarrow x = 3$ (1)
De plus, $a = -1 < 0$ donc :

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x + 3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

**2.** En compilant ces deux signes dans un seul tableau, on trouve : (2)

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x + 4$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $-x + 3$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $(2x + 4)(-x + 3)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**Conseils & Méthodes**

(1) Chacune de ces expressions est celle d'une fonction affine.

(2) On déduit des lignes qui précèdent le signe du produit en utilisant la règle des signes.

**À vous de jouer !**

**7** Étudier le signe de $(4x + 4)(-7x + 1)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

**8** Étudier le signe de $x(-3x + 6)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

↪ Exercices 68 à 78 p. 278

# 4 Inéquations

**Propriété** Résolution d'inéquations

**Connaître le signe d'une expression $A(x)$ permet de résoudre des inéquations du type $A(x) > 0$.**
**Il suffit de lire les solutions dans le tableau de signes.**

**Exemple**

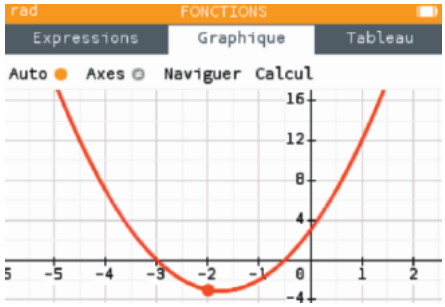
On cherche à résoudre l'inéquation $(2x+1)(x+3) \leqslant 0$.
On étudie le signe du membre de gauche comme produit de deux fonctions affines.
On déduit du tableau de signes les solutions de l'inéquation.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-0{,}5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(2x+1)(x+3)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$(2x+1)(x+3) \leqslant 0$ pour $x \in \left[-3\,;-\dfrac{1}{2}\right]$.

**Remarques**

- Pour utiliser une étude de signes, il faut parfois transformer l'inéquation pour se ramener à une inéquation équivalente avec un second membre égal à 0.
- On peut contrôler ces résultats à l'aide d'une courbe obtenue par un logiciel ou une calculatrice.

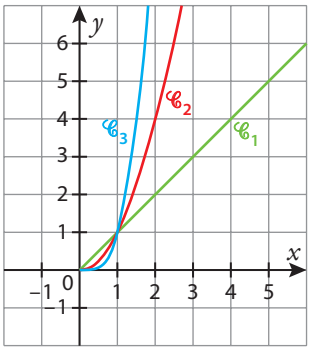



On retrouve bien le signe de $(2x+1)(x+3)$ et les solutions de l'inéquation.

# 5 Positions relatives des courbes de référence

**Propriété** Positions relatives des courbes de référence

**On considère :**
- **la courbe $\mathscr{C}_1$ d'équation $y = x$ pour $x \geqslant 0$,**
- **la courbe $\mathscr{C}_2$ d'équation $y = x^2$ pour $x \geqslant 0$,**
- **la courbe $\mathscr{C}_3$ d'équation $y = x^3$ pour $x \geqslant 0$.**
- **Si $x \in [0\,;1[$ on a $x^3 \leqslant x^2 \leqslant x$ et alors $\mathscr{C}_1$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_2$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_3$.**
- **Si $x = 1$ alors $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ se coupent au point de coordonnées (1 ; 1).**
- **Si $x \in ]1\,;+\infty[$ on a $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$ et alors $\mathscr{C}_3$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_2$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_1$.**



# Exercices résolus

## Méthode 5 Résoudre une inéquation avec une étude de signe

**Énoncé**

**On cherche à résoudre l'inéquation $\frac{x-3}{x+2} \geqslant 0$ pour $x \in ]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$.**

**1. Étudier le signe de $\frac{x-3}{x+2}$.**

**2. Conclure.**

**Solution**

**1.** $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ et $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.
On en déduit le tableau de signes de $x - 3$ et de $x + 2$ d'après la propriété du cours avec $a > 0$, puis le signe du quotient : 1

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-3$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{x-3}{x+2}$ | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**2.** On déduit des deux questions précédentes que les solutions de l'inéquation sont les nombres de $]-\infty ; -2[ \cup [3 ; +\infty[$. 2 3

**Conseils & Méthodes**

1. On étudie les signes du numérateur et du dénominateur puis on applique la règle des signes.
2. Il reste à lire les solutions de l'inéquation dans le tableau de signes.
3. Les valeurs interdites sont nécessairement exclues de l'ensemble des solutions.

**À vous de jouer !**

**9** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante.
$\frac{-x+7}{x+1} \geqslant 0$

**10** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
**a)** $x^2 - 3x > 0$ **b)** $\frac{1}{x+1} > 2$

↪ Exercices 87 à 96 p. 280

## Méthode 6 Utiliser les positions relatives des fonctions de référence

**Énoncé**

**1. a) Si $x \in [0 ; 1]$, ranger dans l'ordre croissant les nombres $x$, $x^2$ et $x^3$.**
**b) Ranger dans l'ordre croissant les nombres 0,4 ; $0{,}4^2$ et $0{,}4^3$.**

**2. Comparer sans calcul les nombres $\left(\frac{8}{7}\right)^2$, $\left(\frac{8}{7}\right)^3$ et $\frac{8}{7}$.**

**Solution**

**1. a)** Si $x \in [0 ; 1]$, on a $x^3 \leqslant x^2 \leqslant x$. 1
**b)** $0{,}4 \in [0 ; 1]$ donc $0{,}4^3 \leqslant 0{,}4^2 \leqslant 0{,}4$.

**2.** $\frac{8}{7} \geqslant 1$ donc $\frac{8}{7} \in [1 ; +\infty[$.
Si $x \in [1 ; +\infty[$, on a $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$ donc on a $\frac{8}{7} \leqslant \left(\frac{8}{7}\right)^2 \leqslant \left(\frac{8}{7}\right)^3$. 2

**Conseils & Méthodes**

1. Il faut bien repérer l'intervalle considéré.
2. On applique alors l'inégalité qui correspond à l'intervalle.

**À vous de jouer !**

**11** **1.** Comparer les nombres 0,5 et $0{,}5^2$.
**2.** Comparer $\frac{11}{3}$ et $\left(\frac{11}{3}\right)^2$.

**12** **1.** Ranger dans l'ordre décroissant les nombres $\frac{\pi}{4}$ ; $\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$ et $\left(\frac{\pi}{4}\right)^3$.
**2.** Ranger dans l'ordre croissant les nombres $7^2$, $7^3$ et 7.

↪ Exercices 97 à 99 p. 280

# Exercices résolution de problèmes

## J'apprends à analyser un problème pour le résoudre

**Réflexe 1** Identifier la conclusion ou la question posée.

**Réflexe 2** En déduire les étapes du raisonnement ainsi que les propriétés utiles et leurs hypothèses.

**Réflexe 3** Reprendre le raisonnement dans l'ordre en suivant toutes les étapes.

### Énoncé

Pour un spectacle, la recette dépend du prix de vente des billets. Une étude de marché a montré que, pour un prix de $x$ euros, cette recette sera de $-20(x-40)^2 + 32\,000$ euros.
Pour être rentable, le spectacle doit rapporter au moins 24 000 €. **Quels sont les prix possibles ?**

### Solution commentée

**Étape 1** Il s'agit de déterminer les prix possibles pour que la recette soit au moins de 24 000 €. **Réflexe 1**

**Étape 2** Je pose l'inconnue $x$ qui représente le prix du spectacle et on établit l'inéquation à résoudre. **Réflexe 2**

$$-20(x-40)^2 + 32\,000 \geqslant 24\,000$$

**Étape 3** Je résous l'inéquation et j'arrive à l'inéquation équivalente $(x-40)^2 - 400 \leqslant 0$ (voir la réponse rédigée pour le détail des calculs mais il est conseillé de mener le calcul intégralement au brouillon d'abord). **Réflexe 2**

**Étape 4** La présence du carré me fait penser à factoriser $(x-40)^2 - 400$ pour obtenir un produit. (↪ **Méthode 2** p. 101) **Réflexe 2**
Je reconnais une différence de deux carrés avec $a = x - 40$ et $b = 20$ et on obtient l'inéquation équivalente $(x-60)(x-20) \leqslant 0$.

**Étape 5** J'établis le tableau de signes sur $\mathbb{R}+$ **Réflexe 2** et je réponds à la question posée.

### Réponse rédigée

Soit $x$ le prix d'un spectacle. $x$ est un réel positif.
La recette du spectacle est $-20(x-40)^2 + 32\,000$ et elle doit être au moins de 24 000 €, on doit donc résoudre

$-20(x-40)^2 + 32\,000 \geqslant 24\,000$
$\Leftrightarrow -20(x-40)^2 + 8\,000 \geqslant 0$
$\Leftrightarrow -20(x-40)^2 \geqslant -8\,000$
$\Leftrightarrow (x-40)^2 \leqslant \dfrac{-8\,000}{-20}$
$\Leftrightarrow (x-40)^2 \leqslant 400$
$\Leftrightarrow (x-40)^2 - 20^2 \leqslant 0$
$\Leftrightarrow (x-40-20)(x-40+20) \leqslant 0$
$\Leftrightarrow (x-40-20)(x-40+20) \leqslant 0$
$\Leftrightarrow (x-60)(x-20) \leqslant 0$

On fait le tableau de signes de $P = (x-40)(x-60)$ sur $\mathbb{R}+$.

| $x$ | 0 | | 20 | | 60 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-60$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $x-20$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $P$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

$(x-60)(x-20) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [20\,;\,60]$. Le prix du spectacle doit être compris entre 20 € et 60 €.

## Je m'entraîne à analyser un problème pour le résoudre

### 13 Réels inconnus

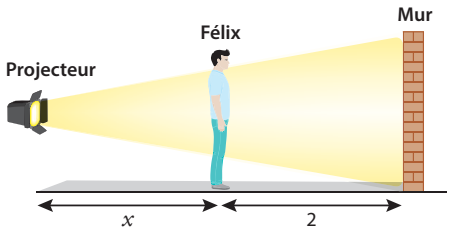
Bryan cherche tous les nombres réels tels que le quotient de ce nombre sur « lui-même augmenté de 3 » est inférieur à 4.
Quels nombres Bryan doit-il trouver ?

### 14 Positions relatives de droites

Quelles sont les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = (x+2)^2$ et de la courbe $\mathscr{C}'$ d'équation $y = (2x-7)^2$ ?

### 15 Ombre chinoises

Félix mesure 1,75 m et il se tient 2 m devant un mur. Pour son spectacle d'ombres chinoises, il est éclairé par un projecteur comme le montre le schéma ci-dessous. À quelle distance $x$ de lui faut-il placer le projecteur de sorte que son ombre soit d'au plus 2 m ?



**CARTES FLASH**
Acquérir des automatismes
www.lienmini.fr/8270-6

# Exercices automatismes

## Rituel 1

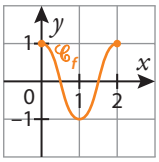
### Calculer un périmètre

**16** Déterminer le périmètre d'un hexagone régulier de côté 4.

**17** ABCD est un parallélogramme tel que AB = 3 et BC = 6. Déterminer son périmètre.

### Estimer graphiquement une image

*f* est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.




**18** Déterminer $f(1)$ et $f(0)$.

**19** Déterminer les images de 1,5 et de 2 par *f*.

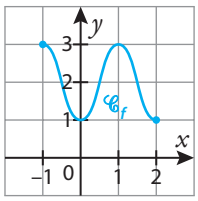
### Résoudre une équation du premier degré

**20** Résoudre l'équation $-x + 4 = 6x$ dans $\mathbb{R}$.

## Rituel 2

### Estimer graphiquement un antécédent

*f* est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.




**21** Déterminer le ou les antécédents éventuels de 1 par *f*.

**22** Donner le ou les antécédents éventuels de 2 et de 0 par *f*.

### Calculer un volume

**23** Déterminer le volume d'une pyramide à base carrée de côté 4 et de hauteur 5.

**24** Déterminer le volume d'un cube d'arête $\frac{4}{3}$ cm.

### Effectuer une application numérique

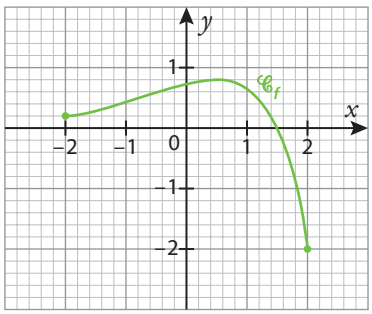
La formule d'Euler indique que dans un polyèdre convexe, le nombre de sommets *S*, d'arêtes *A* et de faces *F* sont reliés par la relation $S - A + F = 2$.

**25** Un polyèdre convexe a 5 faces et 8 arêtes. Déterminer son nombre de sommets.

## Rituel 3

### Estimer graphiquement une valeur atteinte

*f* est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.




**26** Déterminer à partir de quelle valeur de $x$ $f(x)$ devient négative.

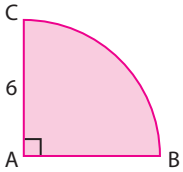
### Résoudre une équation du premier degré

**27** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x + 1 = -3x + 1$.

### Calculer une aire

**28** ABC est un triangle rectangle tel que AB = 5, AC = 4 et BC = 3. Déterminer son aire.

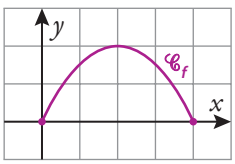
**29** Déterminer l'aire de la portion de disque suivant.




## Rituel 4

### Préciser sur un graphique les grandeurs en jeu

John observe un lancer de balle tirée par un gardien de but.
On voit ci-contre ce qu'il arrive à capter avec sa caméra.




**30** Nommer les grandeurs représentées par chaque axe.

**31** La balle retombe au sol à 60 m de son point de départ. Indiquer l'unité sur l'axe des abscisses.

**32** L'unité sur l'axe des abscisses est la même que sur celui des ordonnées.
Déterminer la hauteur maximale atteinte par la balle.

### Résoudre une équation du premier degré

**33** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $5x + 2 = 17$.

**34** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-2x - 2 = x + 4$.

**35** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{11}{2}x + 2 = -x - 1$.

↪ Travaillez les méthodes des automatismes p. 8

# Exercices d'entraînement

## Je consolide mes acquis

### 36 Résolution d'équations du premier degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

**a)** $4x + 16 = 0$ **b)** $-2x + 12 = 0$

**c)** $2x + 2 = -3x - 2$ **d)** $x + 1 = -x$

### 37 Développer et réduire

Développer et réduire les expressions suivantes.

**a)** $-2x(x - 4)$ **b)** $(x + 1)(x - 7)$

**c)** $(x - 5)(-10 - 2x)$ **d)** $3x(x + x^2 - 4)$

### 38 Factoriser

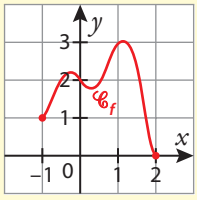
Factoriser les expressions suivantes.

$A(x) = x(6 - x) + 7(6 - x)$ $B(x) = 2(x + 1) - x(x + 1)$

$C(x) = x - 3x^2$ $D(x) = x^2 - 4$

### 39 Lire des images

$f$ est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.




1. Déterminer $f(0)$.
2. Déterminer l'image de 1 par $f$.

### 40 Lire des antécédents

$f$ est la fonction de l'exercice précédent.

Donner le ou les éventuels antécédents de 1 et de 2 par $f$.

### 41 Scratch

On considère le programme scratch suivant.

1. Que renvoie le programme si l'utilisateur entre la valeur −1 ?
2. Indiquer quelle est la phrase à compléter dans les pointillés.
3. Quelle est la fonction dont le programme indique si l'image est strictement positive ou négative ?

## Questions de cours

**42** Indiquer comment dresser le tableau de signes d'une fonction dont on connaît la courbe représentative.

**43** Donner le signe d'une fonction affine $x \mapsto ax + b$.

**44** Indiquer comment résoudre une inéquation du type $A(x) > 0$.

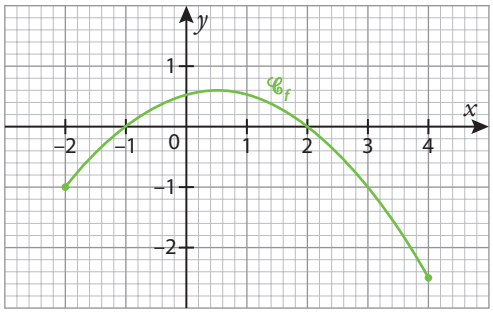
**45** Indiquer comment obtenir le signe d'un produit ou d'un quotient.

**46** Comment indiquer une valeur interdite dans un tableau de signes ?

## Lire le signe d'une fonction

Méthode 1 p. 269

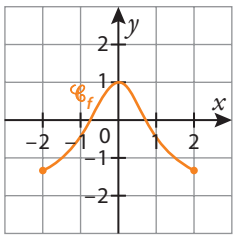
**47** $f$ est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.



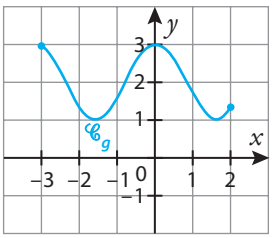

1. Résoudre $f(x) = 0$.
2. Résoudre $f(x) > 0$.
3. Dresser le tableau de signes de la fonction $f$.

**48** Dresser les tableaux de signes des fonctions $f$ et $g$ dont voici les courbes représentatives dans un repère.

**a)**

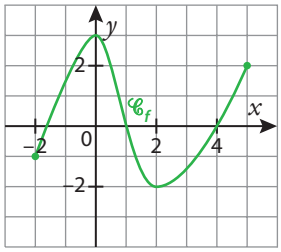



**b)**

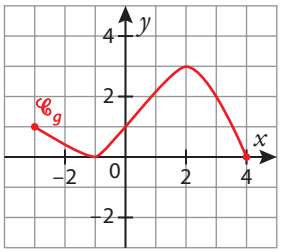



**49** Dresser les tableaux de signes des fonctions $f$ et $g$ dont voici les courbes représentatives dans un repère.

**a)**

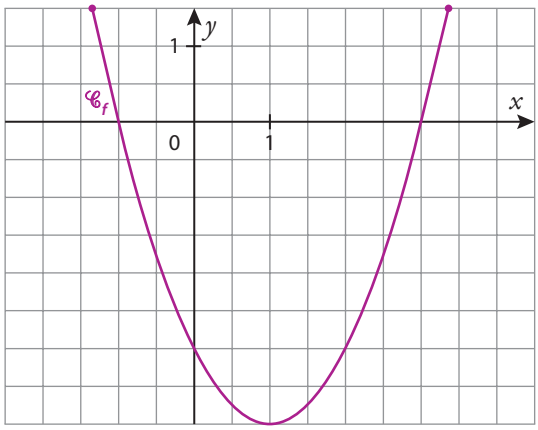



**b)**

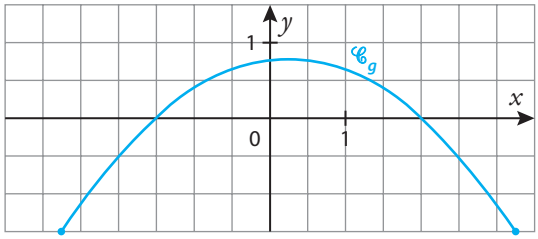


**50** Dresser les tableaux de signes des fonctions $f$, $g$ et $h$ définies sur $\mathbb{R}$ et représentées ci-dessous.

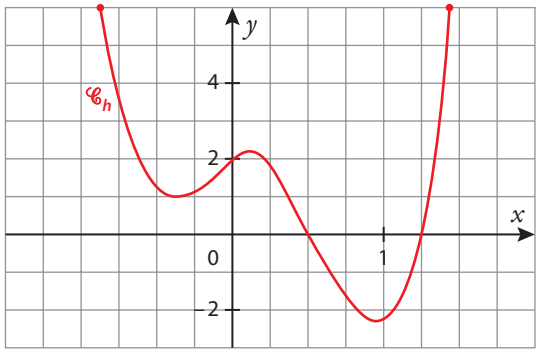
**a)**




**b)**




**c)**




**51** **1.** $f$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ qui s'annule pour $x = 2$. Dresser son tableau de signes.

**2.** $g$ est une fonction dont voici le tableau de variations.

| $x$ | −2 | | 1 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | −3 | ↗ | 2 | ↘ | 1 |

On sait, de plus, que $g(-1{,}5) = 0$.
Dresser son tableau de signes.

**52** $f$ et $g$ sont deux fonctions dont voici les tableaux de variations. On sait, de plus, que $g(3) = 0$.
Dresser les tableaux de signes de $f$ et de $g$.

| $x$ | −4 | | −1 | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 1 | ↘ | 0 | ↗ | 3 |

| $x$ | −7 | | 5 | | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | −2 | ↗ | 4 | ↘ | 1 |

**53** À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ou d'une calculatrice, afficher les courbes des fonctions suivantes et dresser leurs tableaux de signes.

Géométrie dynamique

**a)** $f : x \mapsto x^3 - x$ pour $x \in [-2 ; 2]$.

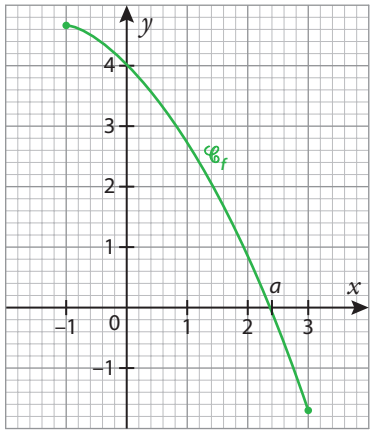
**b)** $g : x \mapsto -0{,}5x^2 + x + 4$ pour $x \in [-3 ; 5]$.

**c)** $h : x \mapsto 0{,}2x^2 + 1$ pour $x \in [-5 ; 5]$.

**d)** $k : x \mapsto \dfrac{1 - x^2}{x^2 + 1}$ pour $x \in [-5 ; 5]$.

**54** $f$ est la fonction définie par $f(x) = -0{,}3x^2 - x + 4$. Sa courbe représentative a été tracée dans le repère ci-contre.

Python




**1.** Dresser son tableau de signes en fonction de $a$.

**2.** On considère la fonction en langage **Python** suivante.

```
def change() :
    x=0
    while -0.3*x**2-x+4>0:
        x=x+0.01
    return x
```

**a)** Quelle valeur renvoie cette fonction ?

**b)** En donner une interprétation dans le cadre de l'énoncé.

## Interpréter le tableau de signes d'une fonction

Méthode 2 p. 269

**55** À partir du tableau de signes ci-contre :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | − | |

**1.** donner les signes des nombres suivants.

**a)** $f(5)$ **b)** $f(-2)$ **c)** $f(-7)$

**2.** dans un repère, tracer une courbe pouvant représenter la fonction $f$.

**56** À partir du tableau de signes ci-contre :

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | − | ‖ | + | |

**1.** donner les signes des nombres suivants.

**a)** $g(12)$ **b)** $g(-25)$ **c)** $g(0)$

**2.** dans un repère, tracer une courbe pouvant représenter la fonction $g$.

**57** $f$ est une fonction dont voici le tableau de signes.

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Résoudre les équations et inéquations suivantes.
**a)** $f(x) = 0$ **b)** $f(x) > 0$ **c)** $f(x) \leqslant 0$ **d)** $f(x) < 0$

**58** $f$ est une fonction dont voici le tableau de signes. Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter la fonction $f$.

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**59** Voici les tableaux de signes de deux fonctions $f$ et $g$.

| $x$ | $-2$ | | $3$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $3$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**1.** Donner le signe de :
**a)** $f(1)$ **b)** $g\left(\frac{5}{2}\right)$ **c)** $f(4) \times g(4)$ **d)** $\frac{g(0,5)}{f(0,5)}$
**2.** Peut-on avoir $f(1) = 4$ ? Justifier.

**60** Voici deux tableaux de signes.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $6$ | | $11$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | |

**1.** Dans un repère, tracer une courbe représentative possible pour chacune de ces fonctions.
**2.** À l'aide de ces tableaux, résoudre :
**a)** $f(x) \geqslant 0$ **b)** $g(x) < 0$
**3.** Peut-on comparer $f$ et $g$ ? Si oui, sur quel intervalle ?

## Déterminer le signe d'une fonction affine

Méthode 3 p. 271

**61** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -7x + 6$ dont on va dresser le tableau de signes de trois manières différentes.
**1. a)** Résoudre $-7x + 6 = 0$.
**b)** Quel est le sens de variation de $f$ ?
En déduire son tableau de signes.
**2. a)** Résoudre $-7x + 6 > 0$.
**b)** En utilisant les questions **1. a)** et **2. a)**, retrouver le tableau de la question **1. b)**.
**3.** Sans utiliser les résultats des questions précédentes, retrouver le tableau de signes de $f$ avec les propriétés du cours.

**62** Reprendre l'exercice précédent avec la fonction $g$ définie par $g(x) = 2x - 7$ pour $x \in \mathbb{R}$.

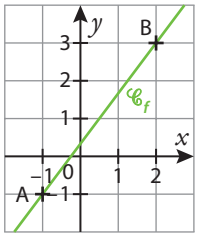
**63** Étudier le signe des expressions suivantes.
**a)** $2x + 4$ **b)** $8x - 5$ **c)** $-3x + 12$ **d)** $-7x - 2$

**64** Étudier le signe des expressions suivantes.
**a)** $3x + 5$ **b)** $-x + 4$ **c)** $-2$ **d)** $\frac{1}{2}x + 4$

**65** Dresser le tableau de signes des fonctions affines dont l'expression est donnée ci-dessous.
**a)** $f(x) = 4x + 1$ **b)** $g(x) = x - 3{,}5$
**c)** $h(x) = -0{,}8x + 2$ **d)** $k(x) = -0{,}25x - 4$

**66** Étudier les signes des fonctions affines suivantes et dresser leurs tableaux de signes.
**a)** $f(x) = -3x - 7$ **b)** $h(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}$
**c)** $g(x) = 4\sqrt{3}x - \sqrt{2}$ **d)** $m(x) = \frac{5}{6}x + \frac{12}{7}$

**67** $f$ est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ dont voici la droite représentative dans un repère. La droite passe par les points A(−1 ; 1) et B(2 ; 3). Déterminer :
**a)** l'expression algébrique $f(x)$ de la fonction $f$.
**b)** le tableau de signes de $f(x)$.




## Déterminer le signe d'un produit

Méthode 4 p. 271

**68** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x - 4)(x + 2)$.
**1.** Déterminer le signe de $(3x - 4)$ et de $(x + 2)$.
**2.** Dresser le tableau de signes de la fonction $f$.
**3.** Représenter graphiquement $f$ sur l'écran de la calculatrice et contrôler le résultat de la question précédente.

**69** Établir le tableau de signes des expressions suivantes.
**a)** $h(x) = (-2x + 3)(-3x - 5)$ **b)** $u(x) = (2x + 14)(6x + 24)$
**c)** $v(x) = (5x - 65)(7 - 2x)$ **d)** $w(x) = (-3x - 72)(-4x - 96)$

**70** Même exercice que le précédent avec les expressions suivantes.
**a)** $f(x) = -x(4x + 8)$ **b)** $g(x) = (4 - 7x)(8 - x)$
**c)** $h(x) = \left(\sqrt{2} - 2x\right)\left(3x + 3\right)$ **d)** $k(x) = (19x + 40)(-4x - 4)$

**71** Établir le tableau de signes des expressions suivantes.
**a)** $f(x) = 3(x - 7)$ **b)** $g(x) = -2(2 + x)(3 - x)$
**c)** $h(x) = -(4 - 3x)(x + 1)$ **d)** $k(x) = -4(6 - x)x$

**72** $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$.
**1.** Montrer que $f(x) = (2x + 1)(x - 3)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
**2.** Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

**73** $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 - 15x + 42$.
**1.** Montrer que $f(x) = (-3x + 6)(x + 7)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
**2.** Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

**74** Factoriser les expressions suivantes puis étudier leur signe.
$A(x) = x(x + 1) - 5(x + 1)$ $\quad B(x) = -4x^2 + 12x$
$C(x) = x^2 - 9$ $\quad D(x) = x^2 - 6x + 9$

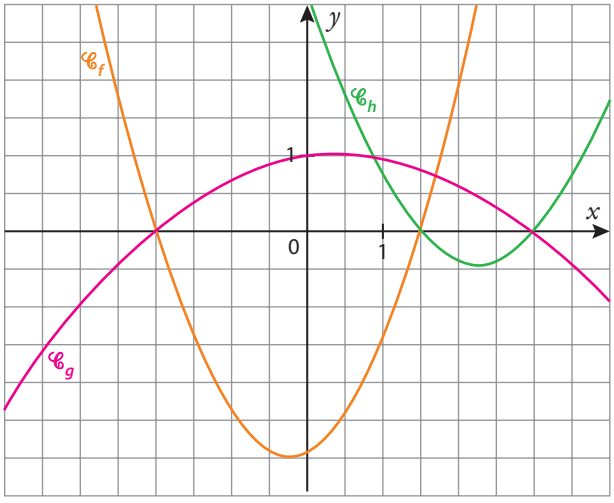
**75** Factoriser les expressions suivantes puis étudier leur signe.
$A(x) = 5x - x^2$ $\quad B(x) = -4x^2 + 9$
$C(x) = x^2 - x + 0{,}25$ $\quad D(x) = 2 - x^2$

**76** Déterminer les signes des fonctions $f$, $g$, $h$ et $k$ dont voici les expressions.
**a)** $f(x) = (x + 6)^2 - 25$
**b)** $g(x) = (5x - 3)^2 - (x - 4)^2$
**c)** $h(x) = x^2 - 7x$
**d)** $k(x) = (-3x + 8)(7x - 4) - (-3x + 8)(5 - 2x)$

**77** Étudier le signe des expressions suivantes pour $x \in \mathbb{R}$.
**a)** $f(x) = (x + 1)(x - 4)(2x - 1)$
**b)** $g(x) = x(6 - x)(4x + 20)$
**c)** $h(x) = (x^2 + 1)(-5x + 2)$
**d)** $k(x) = x^2(3x + 1)$

**78** Sur le graphique ci-dessous sont représentées les fonctions $f$, $g$ et $h$.
Elles sont le produit de deux fonctions parmi les fonctions affines suivantes.
- $u_1(x) = 2x - 3$
- $u_2(x) = 0{,}5x + 1$
- $u_3(x) = \frac{1}{3}x - 1$
- $u_4(x) = 3 - 2x$
- $u_5(x) = -0{,}5x - 1$
- $u_6(x) = -\frac{1}{3}x + 1$

Retrouver les expressions des fonctions $f$, $g$ et $h$.




## Déterminer le signe d'un quotient

**79** On considère l'expression :
$$A(x) = \frac{2x - 6}{3x + 9}$$
**1.** Déterminer la valeur de $x$ pour laquelle $A(x)$ n'est pas définie.
**2.** Déterminer le signe de $2x - 6$ et de $3x + 9$.
**3.** Établir le tableau de signes de $A(x)$ en indiquant la valeur interdite de $A(x)$.

**80** **1.** Étudier le signe de $2x - 1$ et de $x - 3$.
**2.** En déduire le tableau de signes des expressions suivantes.
**a)** $\frac{2x - 1}{x - 3}$ $\quad$ **b)** $\frac{2x - 1}{3 - x}$

**81** Étudier le signe des expressions suivantes.
**a)** $\frac{8x - 16}{x + 4}$ $\quad$ **b)** $\frac{3x + 6}{-2x + 7}$
**c)** $\frac{x + 1}{2 - x}$ $\quad$ **d)** $\frac{7x + 1}{-4 - 4x}$

**82** Étudier le signe des expressions suivantes.
**a)** $\frac{x}{-2x + 1}$ $\quad$ **b)** $\frac{x + 2}{3 - x}$
**c)** $\frac{-7x + 14}{3x}$ $\quad$ **d)** $\frac{x}{6 - 3x}$

**83** Étudier le signe des expressions suivantes.
**a)** $\frac{3x - 5}{-2}$ $\quad$ **b)** $\frac{2(3 - x)}{x}$
**c)** $\frac{3x - 1}{x^2}$ $\quad$ **d)** $\frac{-5x}{2(x - 7)}$

**84** Soit $f$ définie par :
$$f(x) = \frac{4}{x - 1} + \frac{3}{x}.$$
**1.** Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
**2.** Écrire sous la forme d'une seule fraction puis étudier le signe de la fonction $f$ sur son ensemble de définition.

**85** Écrire sous la forme d'une seule fraction de la manière la plus simple possible, puis étudier le signe des expressions obtenues.
**a)** $V = \frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x - 2}$ $\quad$ **b)** $I = \frac{5}{2x - 1} + 1$
**c)** $T = \frac{4}{x} - \frac{1}{3x + 5}$ $\quad$ **d)** $E = \frac{1}{1 - 5x} + \frac{1}{x + 1}$

**86** Établir le tableau de signes des expressions suivantes.
**a)** $h(x) = \frac{x^2}{5x + 3}$ $\quad$ **b)** $k(x) = \frac{-14x + 12}{x^2 + 2}$
**c)** $m(x) = \frac{(x - 1)(2x + 1)}{1 - 9x}$ $\quad$ **d)** $p(x) = \frac{x}{(x - 6)(7x + 8)}$

# Exercices d'entraînement

## Résoudre une inéquation à l'aide d'une étude de signe

Méthode 5 p. 273

**87** **1.** Étudier le signe de $(x-2)(-2x+3)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
**2.** En déduire les solutions de $(x-2)(-2x+3) > 0$.

**88** Sur le modèle de l'exercice précédent, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes à l'aide d'études de signes.
**a)** $(9x-1)(4-x) < 0$
**b)** $(3x+2)(4x-8) \geqslant 0$
**c)** $(-4x+2)(10x+50) > 0$
**d)** $x(x+6) \leqslant 0$

**89** Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.
**a)** $x^2 - 3x < 0$
**b)** $2x - x^2 \leqslant 0$
**c)** $3(x+1) - 4x(x+1) > 0$
**d)** $x(6-x) + 2(6-x) \leqslant 0$

**90** Sur le modèle de l'exercice **87**, résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.
**a)** $\dfrac{2x+1}{4x+1} > 0$ **b)** $\dfrac{-2x}{x+8} \leqslant 0$
**c)** $\dfrac{4x+4}{-5x+10} \geqslant 0$ **d)** $\dfrac{3x+7}{5x+8} > 0$

**91** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
**a)** $\dfrac{x}{x+2} > 1$ **b)** $\dfrac{-x}{3x+1} > -3$ **c)** $\dfrac{x+2}{x-1} > \dfrac{x+1}{x}$

**92** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
**a)** $\dfrac{2x-5}{-x+7} \geqslant 1$ **b)** $\dfrac{2}{2x+3} \leqslant 5$ **c)** $\dfrac{1}{x} > \dfrac{3}{-7+6x}$

**93** On souhaite résoudre l'inéquation $x^2 < 9$ pour $x \in \mathbb{R}$.
**1.** Montrer que $x^2 < 9 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) < 0$.
**2.** Étudier le signe de $(x-3)(x+3)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
**3.** Conclure et contrôler ce résultat à l'aide de la représentation graphique de la fonction carré.

**94** Sur le modèle de l'exercice précédent, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
**a)** $x^2 \geqslant 4$ **b)** $x^2 \leqslant 5$ **c)** $x^2 > \dfrac{3}{4}$

**95** On souhaite résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{x} > 2$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
**1.** Montrer que $\dfrac{1}{x} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{1-2x}{x} > 0$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
**2.** Étudier le signe de $\dfrac{1-2x}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
**3.** Conclure et contrôler ce résultat à l'aide de la représentation graphique de la fonction inverse.

**96** Sur le modèle de l'exercice précédent, résoudre dans $\mathbb{R}^*$ les inéquations suivantes.
**a)** $\dfrac{1}{x} < 3$ **b)** $\dfrac{1}{x} \geqslant -1$ **c)** $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{2}{3}$

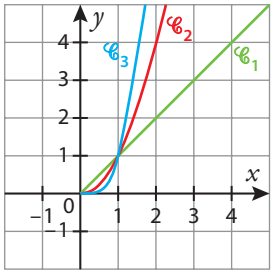
## Utiliser les positions relatives des fonctions de référence

Méthode 6 p. 273

**97** Ranger les séries de nombres suivants dans l'ordre croissant.
**a)** $5^3$ 5 $5^2$
**b)** $0{,}1^2$ $0{,}1^3$ 0,1
**c)** $\dfrac{2}{3}$ $\dfrac{4}{9}$ $\dfrac{8}{27}$

**98** Donner les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ d'équations respectives $y = 2x^2 + 1$, $y = 2x + 1$ et $y = 2x^3 + 1$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.

**99** Démo
On considère les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ d'équations respectives $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$.
Le but de cet exercice est de montrer la propriété suivante.




• Si $x \in [0\,;1]$ alors $\mathscr{C}_1$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_2$ qui est elle-même située au-dessus de $\mathscr{C}_3$.
• Si $x \in ]1\,;+\infty[$, alors $\mathscr{C}_3$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_2$ qui est elle-même située au-dessus de $\mathscr{C}_1$.
**1. a)** Factoriser $x^2 - x$.
**b)** Étudier le signe de $x^2 - x$.
**c)** En déduire les solutions de $x^2 \geqslant x$ pour $x \geqslant 0$.
**2.** Résoudre de la même façon $x^3 \geqslant x^2$ pour $x \geqslant 0$.
**3.** Conclure.

## Comparaison d'expressions et positions relatives

**100** On considère les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = -3x + 11$. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs droites représentatives dans un repère.
**1.** Comparer $f(x)$ et $g(x)$, c'est-à-dire déterminer les solutions de $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$ et $f(x) > g(x)$.
**2.** En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, c'est-à-dire indiquer pour quelle(s) valeur(s) de $x$ : $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ puis $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se croisent.

**101** On considère les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2$ et $g(x) = -4x - 1$. Soit $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère.
**1.** Exprimer $f(x) - g(x)$ en fonction de $x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
**2.** Factoriser $f(x) - g(x)$.
**3.** En déduire que $f(x) \geqslant g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
**4.** Que peut-on en déduire concernant $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ?

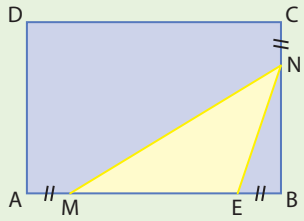
**102** Étudier les positions relatives des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ d'équations respectives $y = x^2 + 4$ et $y = 2x + 4$.

**103** Étudier les positions relatives des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ d'équations respectives $y = \dfrac{1}{x}$ et $y = x$.

## Résoudre des problèmes

### 104 Analyser un problème pour le résoudre

On considère la figure suivante où ABCD est un rectangle tel que AD = 4 et AB = 8. M est un point de [AB]. N et E sont des points des segments [DC] et [CB] tels que NC = EB = AM.




On souhaite obtenir une aire du triangle MEN supérieure ou égale à 9.

**1.** On note $x$ = AM = CN = EB.
Déterminer à quel intervalle I appartient $x$.

**2.** Montrer que l'aire du triangle MEN est égale à $16 - 8x + x^2$.

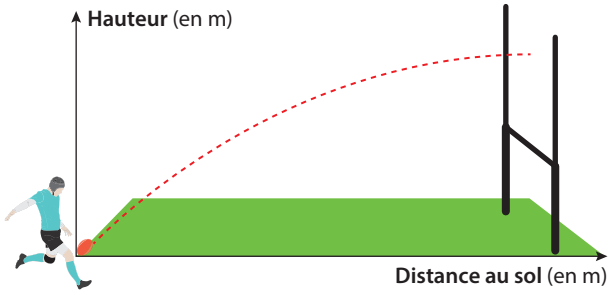
**3.** Montrer que le problème posé initialement revient à résoudre $(x - 1)(x - 7) \geqslant 0$ dans l'intervalle I.

**4.** Conclure.

↪ Résolution de problèmes p. 134 et p. 274

### 105

Un joueur de rugby doit absolument envoyer un ballon au-dessus d'une barre de hauteur 3 m.
On modélise la trajectoire du ballon par une fonction $f$ définie par $f(x) = -0{,}0075x^2 + 0{,}375x$ pour $x \in [0 ; 50]$.




On souhaite savoir à quelle distance de la barre il peut réussir son coup de pied (s'il tire dans la bonne direction).

**1.** Montrer que le problème revient à résoudre :
$-0{,}0075x^2 + 0{,}375x - 3 > 0$

**2.** Montrer que :
$-0{,}0075x^2 + 0{,}375x - 3 = -0{,}0075(x - 10)(x - 40)$

**3.** Conclure.

### 106 Rédiger une solution

Le prix $x$ d'une paire de sneakers est compris entre 20 € et 50 €.

L'offre est le nombre de paires de sneakers qu'une entreprise décide de proposer aux consommateurs au prix de $x$ €.
La demande est le nombre probable de paires de sneakers achetées par les consommateurs quand la paire de sneakers est proposée à ce même prix de $x$ €.
La demande se calcule avec $d(x) = -750x + 45\,000$ pour $x$ en milliers de paires de sneakers.
L'offre se calcule avec $f(x) = -\dfrac{500\,000}{x} + 35\,000$
Le but de cet exercice est de trouver pour quels prix l'offre est supérieure à la demande.

**1.** Écrire une inéquation traduisant le problème posé.

**2.** Démontrer que l'inéquation $f(x) > d(x)$ revient à montrer que $\dfrac{3x^2 - 40x - 2\,000}{x} > 0$.

**3. a)** Démontrer que, pour tout $x$ :
$3x^2 - 40x - 2\,000 = (x + 20)(3x - 100)$.
**b)** En déduire les solutions de $f(x) > d(x)$.
**c)** Conclure.

↪ Résolution de problèmes p. 54 et p. 246

### 107

Déterminer le plus grand ensemble de définition possible des fonctions $f$, $g$, $h$ et $k$ définies par :

$f(x) = \sqrt{-x(2x + 7)}$ $\quad$ $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$h(x) = \sqrt{(x + 1)(-7 - x)}$ $\quad$ $k(x) = \sqrt{\dfrac{2x - 1}{x + 2}}$

## À chacun son rythme

### 108

Un fabricant de réactifs chimiques modélise son bénéfice obtenu (en milliers d'euros) après fabrication de $x$ tonnes de réactifs par la fonction $B$ définie par $B(x) = -0{,}5x^2 + 25x - 200$ pour $x \in [0 ; 60]$.

Géométrie dynamique

**Énoncé A**

**1.** À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la courbe représentative de la fonction $B$.

**2.** Dresser le tableau de signes de la fonction $B$.

**3.** Déterminer pour quelles valeurs de $x$ le fabricant réalise un bénéfice.

**Énoncé B**

**1.** Montrer que $B(x) = (5 - 0{,}5x)(x - 40)$ pour $x \in [0 ; 60]$.

**2.** Déterminer quelle quantité de réactifs doit produire le fabricant pour réaliser un bénéfice.

**Énoncé C**

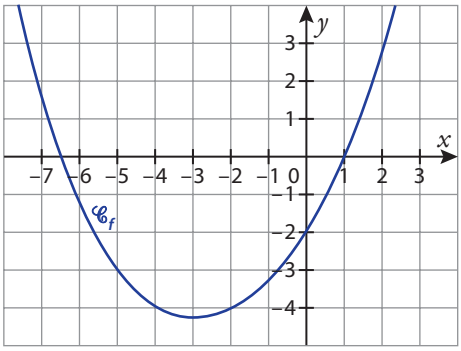
**1.** Montrer que $B(x) = -0{,}5(x - 25)^2 + 112{,}5$ pour $x \in [0 ; 60]$.

**2.** Déterminer le signe de $B(x) - 112{,}5$ sur [0 ; 60].

**3.** En déduire le bénéfice maximal que peut réaliser le fabricant.

## 109 Courbe et signe d'une fonction

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}3x^2 + 1{,}7x - 2$.
Sa courbe représentative est tracée dans le repère suivant.




1. À l'aide de sa courbe, déterminer le signe de $f(x)$.
2. **a)** Montrer que $f(x) = (x - 1)(0{,}3x + 2)$ si $x \in \mathbb{R}$.
**b)** Retrouver le résultat de la question 1. par le calcul.

## 110 Tableau de signes

Soit le tableau de signes d'une fonction $f$.

| $x$ | $-5$ | | $-2$ | | $-1$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

1. Donner le signe de $f\left(-\frac{5}{2}\right)$ et de $f\left(-\frac{7}{6}\right)$.
2. Résoudre les inéquations $f(x) > 0$ et $f(x) \leqslant 0$.
3. Indiquer sur quel intervalle peut être définie la fonction $\sqrt{f}$.

## 111 Mise en forme et étude de deux fonctions

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par :
- $f(x) = 3x^2 - 4x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{4 - x}$ pour $x \neq 0$ et $x \neq 4$.

1. **a)** Factoriser $f(x)$.
**b)** Dresser son tableau de signes.
**c)** Résoudre $f(x) > 0$.
2. **a)** Écrire $g(x)$ sous la forme d'une seule fraction.
**b)** Dresser son tableau de signes.
**c)** Résoudre $g(x) \leqslant 0$.

## 112 Inéquation et étude de signe

On considère l'inéquation $\frac{2}{x + 2} \geqslant 3$.

1. Quelle est la valeur que $x$ ne peut pas prendre ?
2. Déterminer une expression $A(x)$ pour que l'inéquation se ramène à $A(x) \geqslant 0$.
3. Résoudre $A(x) \geqslant 0$.

## 113 Deux tableaux sans courbe

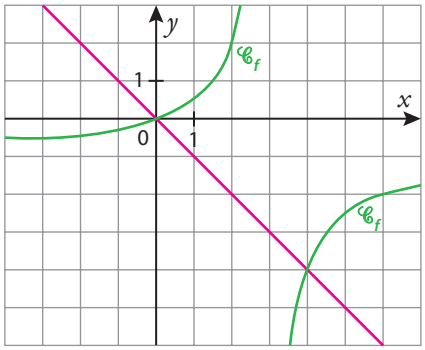
$f$ est une fonction définie sur $[-2 ; 3]$ dont voici le tableau de variations.

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $2$ | ↘ | $-3$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-2$ |

On sait de plus que l'unique antécédent de 0 par $f$ est $-1$.
Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

## 114 Résolution graphique et par le calcul

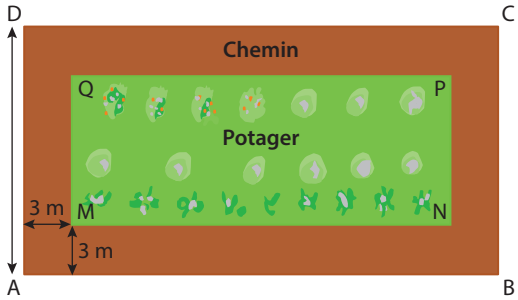
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par $f(x) = \frac{-x}{x - 3}$.




1. En utilisant le graphique précédent, résoudre :
**a)** $f(x) \leqslant 1$ **b)** $f(x) > -x$
2. Résoudre ces inéquations par le calcul.

## 115 Le potager d'Ekram

Ekram souhaite faire aménager un potager dans son jardin. Elle souhaite que le potager soit entouré d'un chemin sur une largeur de 3 m et que la surface totale (potager et chemin) soit un rectangle d'aire 300 m².




### A ▸ Aménagement du potager

On pose AD = $x$.
1. Exprimer MQ en fonction de $x$.
2. **a)** Expliquer pourquoi AB = $\frac{300}{x}$.
**b)** En déduire MN en fonction de $x$.
3. On note $S$ la fonction qui à la longueur $x$ = AD (en mètres) associe l'aire du potager, donc du rectangle MNPQ (en m²).
Montrer que $S(x) = 336 - 6x - \frac{1\,800}{x} > 0$.
Dans la suite, on admet que $S$ est définie sur l'intervalle $[6 ; 50]$.

### B ▸ Conditions pour un grand potager

On cherche à déterminer comment choisir $x$ pour que l'aire du potager soit supérieure à 63 m².
1. Montrer que $S(x) > 63 \Leftrightarrow \frac{-6x^2 + 273x - 1\,800}{x} > 0$.
2. Montrer que $-6x^2 + 273x - 1\,800 = -3(x - 8)(2x - 75)$.
3. En déduire le tableau de signes de $\frac{-6x^2 + 273x - 1\,800}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. Conclure.

## 116 Troisième degré

Résoudre $4x^3 - 12x^2 + 9x > 0$.

## 117 Variations d'une fonction (1)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

**1.** Conjecturer le sens de variation de $f$.

**2.** Vérifier que $f(b) - f(a) = \dfrac{5(a-b)}{(b-2)(a-2)}$.

**3.** Soit $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $2 < a < b$.
Étudier le signe de $f(b) - f(a)$.

**4.** Que peut-on en déduire sur les variations de $f$ ?

## 118 Variations d'une fonction (2)

En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que :

**a)** $f(x) = \dfrac{-3}{(x-5)^2}$ est strictement croissante sur $]5 ; +\infty[$.

**b)** $g(x) = 3(x+2) - \dfrac{2}{x}$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

## 119 Retrouver une fonction Défi

**1.** Déterminer le tableau de signes de la fonction inverse.

**2.** Déterminer l'expression d'une fonction $f$ dont voici le tableau de signes.

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**3.** Déterminer l'expression d'une fonction $g$ dont voici le tableau de signes.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

## 120 Davantage de $x$

$f$ est une fonction dont voici le tableau de signes.

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Déterminer le signe de la fonction $g$ définie par $g(x) = x \times f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

## 121 Retrouver une fonction

**1.** Déterminer le signe de $(x-2)^2$.

**2.** À l'aide de la question précédente, trouver l'expression d'une fonction $f$ possible pour chacun des tableaux de signes suivants.

**a)**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |

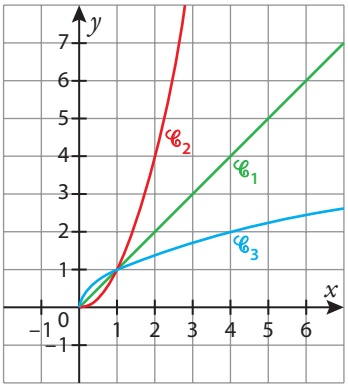
**b)**

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | |

## 122 Positions relatives

On note :
- $\mathscr{C}_1$ la courbe d'équation $y = x$,
- $\mathscr{C}_2$ la courbe d'équation $x = x^2$,
- $\mathscr{C}_3$ la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$.

Ces courbes ont été représentées dans le repère ci-dessous.




Le but de cet exercice est d'étudier les positions relatives de ces trois courbes sur $[0 ; +\infty[$.

**1.** Comparer $x$ et $x^2$, pour $x \in \mathbb{R}+$, en étudiant le signe de leur différence.

**2.** Montrer que :

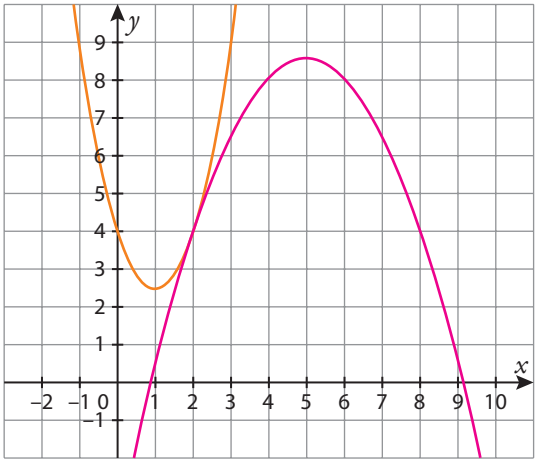
$$x - \sqrt{x} = \frac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}} \text{ pour } x > 0.$$

**3.** Comparer $x$ et $\sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$.

## 123 Positions relatives

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par :
- $f(x) = 1{,}5x^2 - 3x + 4$
- $g(x) = -0{,}5x^2 + 5x - 4$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives.
Les courbes ont été tracées dans le repère ci-dessous.

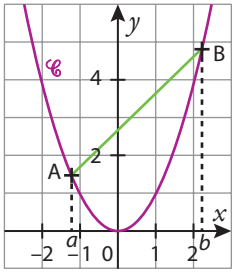



**1. a)** Associer à chaque courbe sa fonction.
**b)** Lire graphiquement la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$.
**2. a)** Déterminer une expression de $f(x) - g(x)$.
**b)** Factoriser l'expression précédente.
**c)** Démontrer le résultat de la question **1. b)**.

## 124 Convexité

On dit qu'une fonction $f$ est **convexe** si pour tout point A et B de sa courbe représentative, le segment [AB] est situé **au-dessus** de sa courbe représentative. Si le segment est situé **en dessous**, on dit que la fonction $f$ est **concave**.

**A ▶** On considère $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction carré.




On appelle A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives $a$ et $b$. On cherche à vérifier, sur deux exemples, que le segment [AB] est au-dessus de $\mathscr{C}$.

**1.** Ici on prendra $a = 1$ et $b = 2$.

**a)** Donner l'expression de la fonction affine $n$ dont la représentation graphique est la droite (AB).

**b)** Développer $(x - 1)(x - 2)$.

**c)** En déduire que $\mathscr{C}$ est en dessous de (AB) sur l'intervalle [1 ; 2].

**2.** Démontrer que, pour $a = -1$ et $b = 1$, le segment [AB] est au-dessus de $\mathscr{C}$.

**B ▶** Dans cette partie, on considère que $a < b$ et on souhaite démontrer que la fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.

**1.** Quelles sont les coordonnées des points A et B ?

**2.** Donner un encadrement de l'abscisse d'un point du segment [AB].

**3.** Déterminer l'expression de la fonction affine $f$ dont la droite (AB) est la représentation graphique.

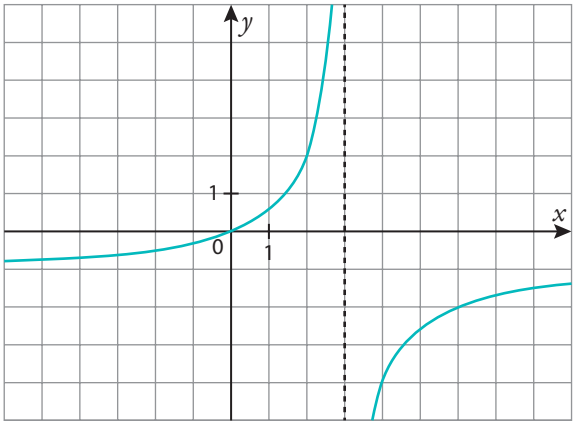
**4.** Quelle inéquation faut-il résoudre pour prouver que la fonction carré est convexe ?

**5.** Montrer que $x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b)$.

**6.** Établir le tableau de signes de l'expression $x^2 - f(x)$.

**7.** Conclure.

**C ▶** Soit la fonction $g$ definie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par $g(x) = \dfrac{-x}{x-3}$ et sa représentation graphique.




**1.** Sur quel intervalle la fonction $g$ semble-t-elle :

**a)** concave ? **b)** convexe ?

**2.** Soit A et B deux points de la représentation graphique de $g$. Leurs abscisses respectives sont notées $a$ et $b$ telles que $a < b < 3$. Déterminer la fonction affine $h$ dont la représentation graphique est la droite (AB).

**a)** Quel est le signe du coefficient directeur ? Pourquoi ?

**b)** Peut-on déterminer le signe de l'ordonnée à l'origine ? Pourquoi ?

**3.** Quelle inéquation faut-il résoudre pour démontrer que la fonction $g$ est convexe sur $]-\infty ; 3[$ ?

**4.** Démontrer que cela revient à résoudre :
$x(b - 3)(a - 3) + 3x(x - 3) - ab(x - 3) < 0$.

**5.** En développant, prouver que :
$x(b - 3)(a - 3) + 3x(x - 3) - ab(x - 3) = 3(x - a)(x - b)$.

**6.** Conclure.

# Vers la 1re

## 125 Vers la Spécialité Maths

On considère l'inéquation :

$$\sqrt{x^2 - 2x} < x^2 - 2x \text{ (I)}.$$

**1. a)** Étudier le signe de $x^2 - 2x$.

**b)** Pour quel intervalle de $x$ l'inéquation est-elle définie ?

**2. a)** Établir le tableau de signes de l'expression $X - X^2$.

**b)** En déduire les solutions de l'inéquation $X < X^2$.

**3. a)** Montrer que résoudre $\sqrt{x^2 - 2x} < x^2 - 2x$ c'est résoudre $X < X^2$.

**b)** Expliciter $X$. En déduire l'inégalité que doit vérifier $x^2 - 2x$.

**4. a)** Montrer que résoudre $\sqrt{x^2 - 2x} > 1$, c'est résoudre $\left(\sqrt{x^2 - 2x} + 1\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x} - 1\right) > 0$.

**b)** Établir que cela revient à résoudre $x^2 - 2x - 1 > 0$.

**5. a)** Conjecturer la solution à l'aide de la calculatrice.

**b)** Développer $\left(x - 1 - \sqrt{2}\right)\left(x - 1 + \sqrt{2}\right)$.

**c)** Déterminer les solutions de l'inéquation $x^2 - 2x - 1 > 0$.

**d)** En déduire les solutions de $\sqrt{x^2 - 2x} < x^2 - 2x$ (I).

## 126 Vers STMG

Une usine peut produire jusqu'à 20 tonnes d'acier chaque jour. Produire $x$ tonnes d'acier pendant une journée coûte $C(x) = 30x^2 - 150x + 3\,780$ euros.

**1.** À quel intervalle appartient $x$ ?

**2.** Déterminer le coût de production pour 5 tonnes produites.

**3.** On suppose que chaque tonne produite est vendue au prix de 600 euros la tonne.

**a)** Quelle est la recette pour 5 tonnes d'acier produites ?

**b)** Déterminer la recette $R(x)$ (en euros) en fonction du nombre $x$ de tonnes produites.

**4. a)** Déterminer les bénéfices réalisés pour 5 tonnes produites.

**b)** Montrer que les bénéfices journaliers réalisés pour $x$ tonnes produites sont de : $B(x) = -30x^2 + 750x - 3\,780$ euros.

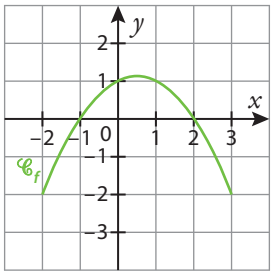
**5.** Montrer que $B(x) = 30(x - 7)(18 - x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 20$.

**6.** Déterminer la quantité d'acier produite pour laquelle un bénéfice est réalisé.

**CARTES FLASH**
Mémoriser le cours
www.lienmini.fr/8270-2

Objectif

## 1 Établir le tableau de signes d'une fonction




On peut lire le signe d'une fonction à partir de sa courbe représentative.
Il s'agit de repérer pour quelles valeurs de $x$ on a $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ et $f(x) < 0$.

Pour la fonction $f$ dont la courbe est donnée ci-dessus, on a :

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$
- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-1\,;\,2[$
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [-2\,;\,-1[\cup]2\,;\,3]$

Ces résultats sont récapitulés dans le tableau de signes ci-dessous.

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Objectif

## 2 Interpréter un tableau de signes

Le tableau de signes d'une fonction récapitule les informations liées au signe d'une fonction.

Par exemple, on peut lire dans le tableau suivant que $f(1) < 0$ ou que $f(x)$ est strictement positif si $x \in ]2\,;\,3[$.

| $x$ | $-1$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

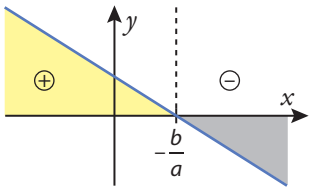
Objectif

## 3 Déterminer le signe d'une fonction affine, d'un produit ou d'un quotient

### Signe d'une fonction affine

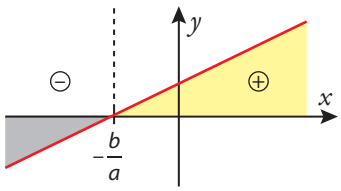
Soit $a$ et $b$ deux nombres réels avec $a \neq 0$ et $f$ une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

**$a < 0$**




| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ax+b$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

**$a > 0$**




| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ax+b$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

### Quotient et produit

En étudiant le signe de ses facteurs pour un produit ou de son numérateur et de son dénominateur pour un quotient, puis en appliquant la règle des signes, on peut déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient.

Objectif

## 4 Résoudre une inéquation

### Se ramener à une étude de signe

Une inéquation peut être résolue en se ramenant à un second terme nul, de la forme $A(x) \geqslant 0$ puis en étudiant le signe du premier terme.

Il suffit ensuite de lire les solutions dans le tableau de signes de $A(x)$.

### Comparer deux expressions

On peut comparer deux expressions $A(x)$ et $B(x)$ en étudiant le signe de leur différence $A(x) - B(x)$.

Comparer les expressions de deux fonctions permet d'obtenir la position relative de leurs courbes dans un repère.

# Préparer le contrôle — Je me teste

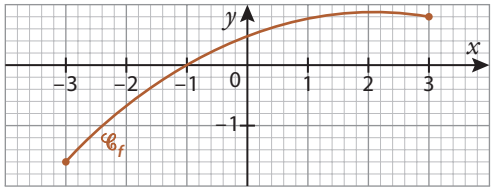
**QCM INTERACTIF**
Tester ses connaissances
www.lienmini.fr/8270-31

## QCM Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Objectif 1

### Établir le tableau de signes d'une fonction

***f*** **est une fonction dont on donne ci-dessous la courbe représentative.**




| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **127** $f(-0{,}5)$ est : | positif. | négatif. | nul. | strictement positif. |
| **128** $f(x)$ est positif si $x$ appartient à : | $[-3\,;2]$ | $[0\,;0{,}9]$ | $[-1\,;3]$ | $[-3\,;3]$ |
| **129** Le tableau de signes de $f$ est : | $x$ : $-3$ ; $2$ ; $3$ — $f(x)$ : $+$ ; $0$ ; $-$ | $x$ : $-1$ ; $0{,}5$ ; $3$ — $f(x)$ : $+$ ; $0$ ; $-$ | $x$ : $-3$ ; $0$ ; $3$ — $f(x)$ : $+$ ; $0$ ; $-$ | $x$ : $-3$ ; $-1$ ; $3$ — $f(x)$ : $-$ ; $0$ ; $+$ |

Objectif 2

### Interpréter un tableau de signes

***f*** **est une fonction dont voici le tableau de signes.**

| $x$ | $-\frac{3}{2}$ | | $0$ | | $1$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **130** $f(4)$ est : | positif. | négatif. | nul. | strictement négatif. |
| **131** $f(x)$ est nul pour : | $x = 0$ | $x = 1$ | $x = -\frac{3}{2}$ | $x = 5$ |
| **132** $f(x)$ est strictement positif pour $x$ appartenant à : | $[2\,;4]$ | $\left[-\frac{3}{2}\,;0\right] \cup [1\,;5]$ | $\left[-\frac{3}{2}\,;0\right[ \cup\, ]1\,;5]$ | $]0\,;5]$ |

Objectif 3

### Déterminer le signe d'une fonction affine, d'un produit ou d'un quotient

**On donne ci-contre les tableaux de signes de deux fonctions** ***f*** **et** ***g*****.**

| $x$ | $-4$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

| $x$ | $-4$ | | $0{,}5$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **133** $f(1) \times g(1)$ est : | positif. | négatif. | nul. | strictement positif. |
| **134** Le tableau de signes de $\frac{f(x)}{g(x)}$ est : | $x$ : $-4$ ; $0{,}5$ ; $2$ ; $3$ — $\frac{f(x)}{g(x)}$ : $-$ ; $\|$ ; $+$ ; $\|$ ; $-$ | $x$ : $-4$ ; $0{,}5$ ; $2$ ; $3$ — $\frac{f(x)}{g(x)}$ : $-$ ; $0$ ; $+$ ; $0$ ; $-$ | $x$ : $-4$ ; $0{,}5$ ; $2$ ; $3$ — $\frac{f(x)}{g(x)}$ : $-$ ; $0$ ; $+$ ; $\|$ ; $-$ | $x$ : $-4$ ; $0{,}5$ ; $2$ ; $3$ — $\frac{f(x)}{g(x)}$ : $-$ ; $\|$ ; $+$ ; $0$ ; $-$ |

Objectif 4

### Résoudre une inéquation

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **135** Les solutions de $(x-2)(-x+5) > 0$ sont les nombres de : | $[2\,;5]$ | $]-5\,;2[$ | $]2\,;5[$ | $]-\infty\,;2[ \cup ]5\,;+\infty[$ |
| **136** $\frac{x+1}{x} > 2$ a pour solution : | $]0\,;1[$ | $]-\infty\,;0[$ | $]-\infty\,;0[ \cup ]1\,;+\infty[$ | $]-\infty\,;1[$ |

↪ Corrigés p. 390

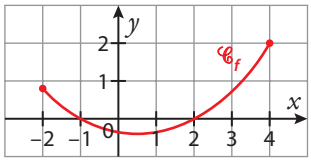
## Parcours différenciés

| | Objectif 1 | Objectif 2 | Objectif 3 | Objectif 4 |
|---|---|---|---|---|
| Parcours A | 1 137 | 3 56 140 | 5 7 61 143 | 146 |
| Parcours B | 50 138 | 58 141 | 81 144 | 9 88 147 |
| Parcours C | 139 | 142 | 76 145 | 148 |

## Exercices

### Objectif 1 Établir le tableau de signes d'une fonction

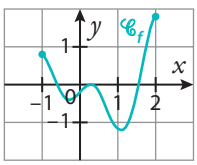
**137** $f$ est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.




**1.** Indiquer pour quelles valeurs de $x$ on a $f(x) > 0$.
**2.** Recopier et compléter le tableau de signes de la fonction $f$.

| $x$ | −2 | | −1 | | … | | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | … | 0 | … | |

**138** $f$ est une fonction dont voici la courbe représentative.




**1.** Décrire le signe de $f(x)$ avec des phrases.
**2.** Dresser le tableau de signes de la fonction $f$.

**139** $f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ dont voici le tableau de variations. On sait de plus que $f$ s'annule en 2 et en 5. Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

| $x$ | −3 | | −1 | | 3 | | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | −2 | ↘ | ‖ | ↗ | 2 | ↘ | −7 |

### Objectif 2 Interpréter un tableau de signes

**140** On donne le tableau de signes d'une fonction $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | − | 0 | + | |

**1.** Donner le signe des nombres suivants $f(-10)$, $f(1)$ et $f(5)$.
**2.** Résoudre $f(x) = 0$.

**141** Soit la fonction $f$ de l'exercice précédent.
**1.** Donner l'ensemble de définition de la fonction $f$.
**2.** Quels sont les nombres $x$ tels que $f(x)$ est strictement négatif ?

**142** $f$ est une fonction dont on donne le tableau de signes. Tracer une courbe pouvant représenter la fonction $f$.

| $x$ | −3 | | 1 | | 2 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | + | 0 | − | |

### Objectif 3 Déterminer le signe d'une fonction affine, d'un produit ou d'un quotient

**143** **1.** Déterminer le signe des fonctions affines $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 7$ et $g(x) = 5x + 2$.
**2.** Étudier le signe de $(-x + 7)(5x + 2)$ et de $\dfrac{-x+7}{5x+2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

**144** Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{3}{x+5} - \dfrac{8}{2x+3}$.

**145** Étudier le signe des expressions suivantes :
$A(x) = -4x(x-2) + 2(x-2)$ et $B(x) = 9 - 4x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

### Objectif 4 Résoudre une inéquation

**146** **1.** Étudier le signe de $A(x) = (x+4)(-x+2)$.
**2.** En déduire les solutions de $A(x) > 0$.

**147** Résoudre les inéquations suivantes.
**a)** $(2x+1)(5x-6) < 0$ **b)** $\dfrac{-8x+16}{x+1} \leqslant 0$

**148** Étudier les positions relatives des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ d'équations respectives $y = 5x^2 + 1$ et $y = x^2 + 4x$.

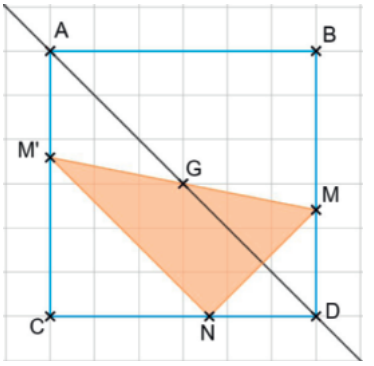
↪ Corrigés p. 390

# Travaux pratiques

Géométrie dynamique — 50 min — Modéliser, Chercher

## 1 Optimisation de l'aire d'un triangle

ABDC est un carré de côté 6 et M est un point de [BD].
M′ est le symétrique de M par rapport au centre G du carré et N est le symétrique de M par rapport à la droite (AD).
M′ est donc un point du segment [AC] et N est un point de [DC].
On souhaite que le triangle NMM′ ait une aire supérieure à 5.




### A ▸ Conjecture

**1.** Justifier que M′ est un point du segment [AC] et que N est un point de [DC].

**2.** Réaliser la figure ci-contre à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

**3.** Conjecturer où doit être situé le point M pour répondre au problème donné.

### B ▸ Résolution algébrique

On note $x = \text{DM}$.
On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du triangle NMM′.

**1.** À quel intervalle appartient $x$ ?

**2.** Exprimer ND et M′C en fonction de $x$.

**3.** Quelle est la nature du quadrilatère ABMM′ ? Montrer que son aire $\mathscr{A}'$ est égale à 18.

**Coup de pouce** L'aire d'un trapèze est donnée par $\dfrac{(\text{grande base} + \text{petite base}) \times \text{hauteur}}{2}$.

**4.** Montrer que $\mathscr{A}(x) = -x^2 + 6x$.

**5.** Montrer que le problème de départ revient à résoudre $-(x-1)(x-5) > 0$.

**6.** Conclure.

**7.** **Pour aller plus loin** Déterminer l'aire maximale possible du triangle MM′N.

Tableur — 20 min — Modéliser, Raisonner

## 2 Signe d'une fonction polynôme du second degré

Le but de ce TP est d'étudier de différentes manières le signe de l'expression $21x^2 - 59x + 40$ sur [0 ; 2].

**1. a)** À l'aide d'un tableur ou une calculatrice, recopier et compléter le tableau de valeurs suivant sur [0 ; 2].

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
| 2 | 21x^2-59x+40 | | | | | | |

**b)** Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $21x^2 - 59x + 40 = 0$.
**c)** On note $x_1$ et $x_2$ ces nombres.
Dresser le tableau de signes de $21x^2 - 59x + 40$ en fonction de $x_1$ et $x_2$.

**2. a)** On note $f : x \mapsto 21x^2 - 59x + 40$.
Tracer la courbe représentative de la fonction $f$.
**b)** Retrouver le tableau de signes de la question **1. c)** et donner une valeur approchée au millième de $x_1$ et de $x_2$.

**3. a)** Montrer que $f(x) = (3x - 5)(7x - 8)$ pour $x \in [0 ; 2]$.
**b)** En déduire les valeurs exactes de $x_1$ et $x_2$.

Python Tableur 40 min Modéliser Chercher

## 3 Calculer un bénéfice

Un artiste vend des impressions de gravure. Il est en mesure d'en produire jusqu'à 140, mais cela nécessite la location d'une presse pour un coût de 2 400 euros. Il souhaite prévoir le bénéfice réalisé et modélise le nombre de ventes, s'il fixe le prix de ses gravures à $x$ euros, par la fonction $N(x) = -x + 140$.

### A ▸ Fonction test en langage Python

**1.** Exprimer le chiffre d'affaires de l'artiste $R(x)$ en fonction de $x$.

**2.** En déduire que le bénéfice réalisé est égal à $B(x) = -x^2 + 140x - 2\,400$.

**3.** Écrire une fonction `benefice(x)` en langage **Python** qui calcule le montant facturé si le prix fixé est de `x`.

**4.** À l'aide de la question précédente, écrire une fonction `test(x)` en langage **Python** qui indique si l'artiste va réaliser un bénéfice pour le prix `x` donné en entrée.

### B ▸ Étude au tableur

**1.** Reproduire et compléter la feuille de tableur suivante, pour $x$ allant de 0 à 140, en utilisant les fonctions de recopie du tableur.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | N(x) | | | | | | | | | | | |
| 3 | B(x) | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | |

**2.** L'artiste souhaite diffuser son œuvre au maximum sans perdre d'argent. Quel prix doit-il fixer ? Combien vendra-t-il d'impressions ?

### C ▸ Étude algébrique

**1.** Montrer que $B(x) = -(x - 20)(x - 120)$ si $x \in [0\,;\,140]$.

**2.** Retrouver le résultat de la question **B. 2.** par le calcul.

Python 20 min Raisonner Communiquer

## 4 Signe d'une fonction affine

On souhaite construire une fonction **Python** permettant de donner le signe d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ lorsque l'on donne en entrée les valeurs de $a$ et de $b$.
Voici une première fonction dont la dernière ligne n'est pas complète.

```
def signe(a,b) :
    if a>0 :
        x=-b/a
        print("f est négative de - infini à ",x, " et positive de ",x, " à +infini ")
    else :
        x=-b/a
        print(...)
```

**1.** À quoi correspond la variable `x` dans le programme pour la fonction `f` ?

**2.** Que renvoie : **a)** `signe(1,4)` ? **b)** `signe(0,4)` ?

**3.** Corriger et compléter le programme pour qu'il réponde à toutes les situations.

11

# Proportions et évolutions

## Les maths au quotidien

Que ce soit dans les supermarchés lors de promotions, dans les magasins de vêtements lors de soldes ou encore dans les actualités, on retrouve la notion de pourcentages pouvant désigner une **proportion** ou une **évolution**.

# Pour prendre un bon départ

EXERCICES Sésamath
Réviser ses acquis
www.lienmini.fr/8270-s22

## 1 Calculer avec des fractions

Vu au collège

Calculer.

**a)** $\frac{3}{4} \times \frac{4}{10}$ **b)** $1 - \frac{3}{100}$ **c)** $1 + \frac{30}{100}$

**d)** $0{,}2 \times \frac{4}{5}$ **e)** $\frac{\frac{20}{3}}{\frac{3}{4}}$ **f)** $\frac{\frac{5}{8}}{3}$

## 2 Calculer avec des pourcentages

Vu au collège

**1.** Exprimer les pourcentages suivants en valeur décimale.

**a)** 20 % **b)** 2 % **c)** 75 %

**2.** Exprimer les valeurs suivantes en pourcentage.

**a)** 0,45 **b)** 0,6 **c)** 0,015

**3.** Calculer 40 % de 300.

## 3 Déterminer des proportions à partir d'effectifs

Vu au collège

Une boîte de 60 chocolats contient 42 chocolats noirs et des chocolats au lait.

**1.** Déterminer la proportion des chocolats noirs dans la boîte.
Donner le résultat sous forme décimale.

**2.** Déterminer la proportion de chocolats au lait dans la boîte.
Donner le résultat sous forme de pourcentage.

## 4 Déterminer des effectifs à partir de proportions

Vu au collège

Une entreprise compte 600 employés, dont 18 % sont des cadres.

**1.** Déterminer le nombre de cadres dans l'entreprise.

**2.** Parmi ces cadres, trois quarts sont des femmes.
Déterminer le nombre de femmes cadres dans l'entreprise.

## 5 Calculer des évolutions données en pourcentage

Vu au collège

**1.** Une paire de sneakers coûte 80 euros.
Son prix augmente de 10 %.
Déterminer son nouveau prix.

**2.** Un casque audio est vendu 150 euros.
Il est soldé et son prix baisse de 30 %.
Déterminer son nouveau prix.

## 6 Associer opérations et pourcentages

Vu au collège

Regrouper les propositions qui consistent à faire les mêmes calculs parmi les suivantes.

**a)** Prendre 20 %. **b)** Diviser par 4. **c)** Prendre la moitié.
**d)** Prendre 25 %. **e)** Multiplier par 0,5. **f)** Prendre un quart.
**g)** Prendre 10 %. **h)** Prendre un cinquième. **i)** Diviser par 10.

CORRIGÉS www.lienmini.fr/8270-32

# Activités

20 min

## 1 Proportion de proportion

Dans un club de sport, proposant deux sports différents, le tennis et le football, 400 membres sont inscrits en 2022. Parmi eux, il y a :

- 160 personnes inscrites au tennis, dont le quart sont des filles,
- 240 personnes inscrites au football, dont le dixième sont des filles.

**1.** On note $p_1$ la proportion des personnes inscrites au football parmi l'ensemble des membres. Donner la valeur de $p_1$ sous différentes formes : fraction irréductible, valeur décimale, pourcentage.

**2.** Combien y a-t-il de filles qui jouent au football ?

**3.** On note $p_1'$ la proportion des filles parmi les joueurs de football et $p_1''$ la proportion des filles jouant au football parmi l'ensemble des membres.

**a)** Donner la valeur de $p_1'$ et $p_1''$.

**b)** Comparer $p_1 \times p_1'$ et $p_1''$.

**4. a)** Combien y a-t-il de filles qui jouent au tennis ?

**b)** On note $p_2$ la proportion des joueurs de tennis parmi l'ensemble des membres, $p_2'$ la proportion des filles parmi les joueurs de tennis et $p_2''$ la proportion des filles jouant au tennis parmi l'ensemble des membres. Comparer $p_2 \times p_2'$ et $p_2''$.

**5.** Pour aller plus loin Si le nombre de filles inscrites au tennis augmente de 10 %, de quel pourcentage augmente le nombre total de membres du club ? Et s'il augmente de 20 % ?

↪ Cours 1 p. 294

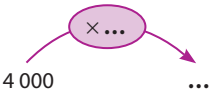
20 min

## 2 Évolution en pourcentage

On s'intéresse au nombre d'abonnés à un magazine. En 2022, on compte 4 000 personnes abonnées à ce magazine.

**1. a)** Si en 2023, le nombre d'abonnés augmente de 10 % par rapport à l'année précédente, combien y aura-t-il d'abonnés ?

**b)** Recopier et compléter le schéma ci-contre représentant l'évolution du nombre d'abonnés.




**2.** Reprendre la question **1.** avec une augmentation de 35 %.

**3.** Reprendre la question **1.** avec une diminution de 20 %.

**4.** On suppose maintenant que le nombre d'abonnés passe de 4 000 à 4 800.

**a)** De combien de personnes le nombre d'abonnés a-t-il augmenté ?

On parle de **variation absolue**.

**b)** Quel pourcentage du nombre d'abonnés de départ cela représente-t-il ?

On parle de **variation relative** ou **taux d'évolution**.

**5.** Pour aller plus loin Si le nombre d'abonnés est divisé par 2, de quel pourcentage a-t-il diminué ? Et s'il double, de quel pourcentage a-t-il augmenté ?

↪ Cours 2 p. 294

20 min

## 3 Évolutions successives

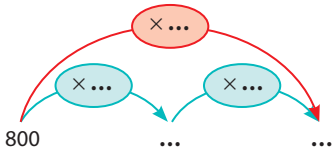
Un magasin d'électroménager vend des télévisions, dont le prix est fixé à 800 euros en 2022.

**1. a)** La gérante du magasin décide d'augmenter le prix de la télévision de 5 % en 2023.
Quel sera alors son prix ?

**b)** En 2024, elle prévoit une nouvelle augmentation de 4 % par rapport à l'année précédente.
Quel sera alors le prix de la télévision ?

**c)** Entre 2022 et 2024, le prix a-t-il augmenté de 9 % ?
Sinon, de quel pourcentage a-t-il augmenté ?

**d)** Recopier et compléter le schéma ci-contre représentant l'évolution du prix de la télévision.




Le coefficient de la bulle rouge s'appelle le **coefficient multiplicateur global.**

**2.** Le magasin a vendu 3 000 télévisions en 2022. La gérante du magasin prévoit qu'en 2023 le nombre de télévisions vendues diminuera de 10 %, puis qu'en 2024 il augmentera de 10 % par rapport à l'année précédente.

**a)** Réaliser un schéma similaire à celui de la question **1. d)**.

**b)** En 2024 retrouve-t-on le nombre de télévisions vendues de 2022 ? Sinon, préciser le taux d'évolution en pourcentage entre 2022 et 2024.

**3.** **Pour aller plus loin** Le magasin vend également des enceintes.
Est-il plus intéressant d'acheter la même enceinte en soldes à –20 % avec –10 % supplémentaires, en soldes à –15 % avec –15 % supplémentaires ou en soldes à –30 % ?

↪ Cours 3 p. 296

20 min

## 4 Évolution réciproque

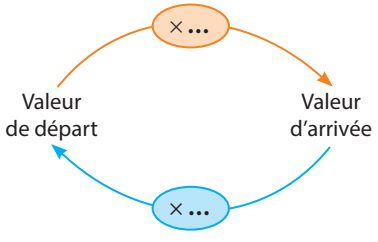
1 500 élèves sont inscrits dans un conservatoire proposant des formations en musique et en danse.

**1. a)** Le nombre d'élèves diminue de 8 %.
Combien d'élèves sont alors inscrits dans le conservatoire ?

**b)** Déterminer de quel pourcentage le nombre d'élèves doit augmenter pour revenir à 1 500.
Arrondir le résultat à 0,1 % près.

**2.** On s'intéresse maintenant à un autre conservatoire, dans lequel on ne connaît pas le nombre d'élèves.
Le nombre d'élèves diminue de 20 %.
On cherche à savoir de quel pourcentage il doit augmenter pour revenir à sa valeur initiale.

**a)** Recopier et compléter le schéma ci-contre.




Le coefficient de la bulle bleue s'appelle le **coefficient multiplicateur réciproque.**

**b)** À l'aide du coefficient multiplicateur réciproque, en déduire le taux d'évolution voulu.

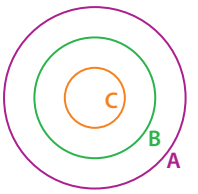
**3.** **Pour aller plus loin** Si une valeur augmente de $t$ % puis diminue de $t$ %, retrouve-t-on la valeur de départ ? une valeur toujours plus petite ? une valeur toujours plus grande ? Justifier la réponse.

↪ Cours 3 p. 296

# 1 Proportion de proportion

**Propriété** **Proportions d'ensembles emboîtés**

**On considère trois ensembles A, B et C emboîtés tels que $C \subset B \subset A$.**
**On note $p$ la proportion de la population de B dans la population de A.**
**On note $p'$ la proportion de la population de C dans la population de B.**
**Alors la proportion de la population de C dans la population A est égale à $p \times p'$.**




**Exemple** La moitié des pages d'un magazine est constituée de publicités. Parmi celles-ci, 25 % sont consacrées à la mode. Ici, A est l'ensemble des pages du magazine, B est l'ensemble des pages de publicités et C est l'ensemble des pages de publicités consacrées à la mode. La proportion des pages de publicités de mode parmi toutes les pages du magazine est donc de $\frac{1}{2} \times \frac{25}{100} = \frac{25}{200} = 0{,}125$, soit 12,5 %.

**Remarque** La proportion de l'exemple précédent peut s'écrire de différentes façons, sous forme :

- de fraction : $p = \frac{25}{200}$ ou $p = \frac{1}{8}$ (fraction irréductible),
- décimale : $p = 0{,}125$,
- de pourcentage : $p = 12{,}5$ %.

# 2 Évolutions d'une quantité

**Propriété** **Coefficient multiplicateur**

**Augmenter un nombre de $t$ %, c'est le multiplier par $1 + \frac{t}{100}$.**
**Diminuer un nombre de $t$ %, c'est le multiplier par $1 - \frac{t}{100}$.**
**Les nombres $1 + \frac{t}{100}$ et $1 - \frac{t}{100}$ sont appelés les coefficients multiplicateurs.**

**Exemple** Une console de jeux coûte initialement 400 €. Son prix baisse de 15 % lors d'une promotion.
Le coefficient multiplicateur est $1 - \frac{15}{100} = 0{,}85$. On a $400 \times 0{,}85 = 340$.
Donc le nouveau prix de la console est 340 €.

**Définition** **Variation absolue et variation relative**

**On suppose qu'une quantité passe d'une valeur de départ $V_D$ à une valeur d'arrivée $V_A$.**
**• la variation absolue est $V_A - V_D$.** **• la variation relative, ou taux d'évolution, est $\frac{V_A - V_D}{V_D}$.**

**Remarques**

- La variation relative est positive lors d'une augmentation et négative lors d'une baisse.
- À partir du coefficient multiplicateur, on peut trouver directement le taux d'évolution.

En notant $c$ le coefficient multiplicateur $c - 1$ donne le taux d'évolution sous forme décimale.

**Exemple** La population d'une ville passe de 55 000 à 74 250 habitants.

- La variation absolue de cette population est de $74\,250 - 55\,000 = 19\,250$.
- La variation relative de cette population est de $\frac{74\,250 - 55\,000}{55\,000} = \frac{19\,250}{55\,000} = \frac{7}{20} = 0{,}35$ soit 35 %.

# Exercices résolus

Méthode 1

## Calculer des proportions de proportions

### Énoncé

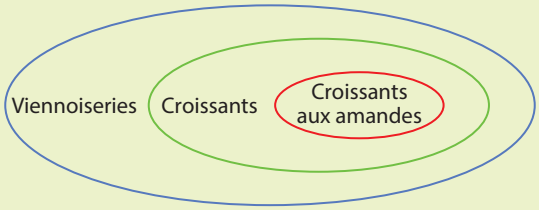
**Dans une boulangerie, 40 % des viennoiseries sont des croissants et 20 % des croissants sont aux amandes. Déterminer la proportion de croissants aux amandes parmi toutes les viennoiseries.**

### Solution

L'énoncé indique la proportion de croissants parmi les viennoiseries et la proportion de croissants aux amandes parmi les croissants. 1

On est bien dans la situation de trois ensembles imbriqués.

La proportion de croissants aux amandes parmi toutes les viennoiseries est donc $\frac{40}{100} \times \frac{20}{100} = 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}08$ soit 8 %. 2




### Conseils & Méthodes

1 Il faut faire attention à quel ensemble de référence se rapporte chacune des proportions de l'énoncé.

2 Lorsqu'une proportion est donnée sous forme de pourcentage, il ne faut pas oublier la division par 100.

### À vous de jouer !

**1** Dans un jeu de Scrabble®, 45 % des lettres sont des voyelles.
Parmi ces dernières, $\frac{1}{3}$ sont des E.
Déterminer la proportion de E dans le jeu.

**2** Un fabricant de meubles dispose d'un stock. Parmi les meubles en bois, un dixième est fait de chêne, alors qu'au total trois quarts des meubles sont fabriqués en bois. Déterminer la proportion de meubles en chêne dans ce stock.

↪ Exercices 44 à 49 p. 300

Méthode 2

## Calculer des variations absolues et des variations relatives

### Énoncé

**Dans une entreprise, un employé a un salaire mensuel de 1 500 euros en 2022.**

**En 2023, il décide de travailler à temps partiel et son salaire mensuel passe à 1 200 euros.**

**Donner la variation absolue et la variation relative de son salaire.**

### Solution

$V_D = 1\,500$ et $V_A = 1\,200$.

La variation absolue est $V_A - V_D = 1\,200 - 1\,500 = -300$ soit une baisse de 300 euros. 1

La variation relative est $\frac{V_A - V_D}{V_D} = \frac{1\,200 - 1\,500}{1\,500} = -0{,}2$ 2

$-0{,}2 \times 100 = -20$. Cela correspond à une baisse de 20 %. 3

### Conseils & Méthodes

1 Il faut bien identifier la valeur de départ $V_D$ et la valeur d'arrivée $V_A$. On calcule ensuite $V_A - V_D$ et non « plus grande valeur – plus petite valeur ».

2 On utilise la formule du cours.

3 Pour convertir une valeur décimale en pourcentage, on multiplie par 100.

### À vous de jouer !

**3** Un journal a 3 500 abonnés en 2022 et 3 920 abonnés en 2023.
Déterminer la variation absolue et la variation relative du nombre d'abonnés entre 2022 et 2023.

**4** Le prix d'un téléphone portable passe de 219 euros à 182 euros. Déterminer le taux d'évolution du prix en pourcentage. Arrondir le résultat à 0,1 % près.

↪ Exercices 61 à 67 p. 302

# 3 Évolutions successives et évolutions réciproques

**Définition** **Évolutions successives**

**Lorsque l'on a une évolution d'une valeur $V_0$ à une valeur $V_1$ suivie d'une autre évolution de la valeur $V_1$ à une valeur $V_2$ alors le taux d'évolution global associé à ces deux évolutions est le taux d'évolution entre $V_0$ et $V_2$. Son coefficient multiplicateur est appelé coefficient multiplicateur global.**

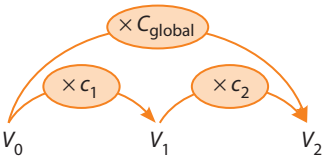
**Propriété** **Coefficient multiplicateur global**

**Lorsque l'on a deux évolutions successives, le coefficient multiplicateur global est :**

$$C_{\text{global}} = c_1 \times c_2$$

**avec :**

- **$c_1$ le coefficient multiplicateur de la première évolution,**
- **$c_2$ le coefficient multiplicateur de la seconde évolution.**




**Remarque** Le taux d'évolution global se calcule à partir du coefficient multiplicateur global : $T_{\text{global}} = C_{\text{global}} - 1$

**Exemple**

Le nombre d'abonnés d'un journal en ligne augmente de 30 % avant de baisser de 10 %.

Il est donc multiplié par $1 + \frac{30}{100} = 1,3$ puis par $1 - \frac{10}{100} = 0,9$.

Alors $C_{\text{global}} = 1,3 \times 0,9 = 1,17$

Le taux d'évolution global est donc $T_{\text{global}} = 1,17 - 1 = 0,17$, ce qui correspond à une hausse de 17 %.

**Remarque** Les pourcentages ne s'additionnent pas.

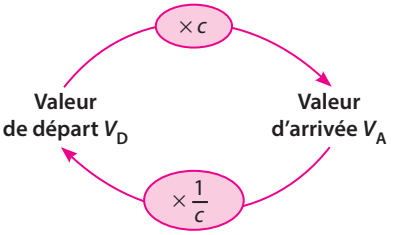
**Définition** **Évolution réciproque**

**Lorsqu'on a une évolution d'une valeur de départ $V_D$ à une valeur d'arrivée $V_A$ alors le taux d'évolution réciproque est le taux d'évolution permettant de revenir de $V_A$ à $V_D$. Son coefficient multiplicateur est appelé coefficient multiplicateur réciproque.**

**Propriété** **Coefficient multiplicateur réciproque**

**Le coefficient multiplicateur réciproque est égal à $\frac{1}{c}$**

**où $c$ est le coefficient multiplicateur de l'évolution de départ.**




**Remarque** Le taux d'évolution réciproque se calcule à partir du coefficient multiplicateur réciproque :

$t_{\text{réciproque}} = c_{\text{réciproque}} - 1$.

**Exemple**

Un prix augmente de 25 % et a donc été multiplié par $1 + \frac{25}{100} = 1,25$.

Le coefficient multiplicateur réciproque qui permettrait de revenir au prix de départ est de $\frac{1}{1,25} = 0,8$.

Or $0,8 - 1 = -0,2$. Le taux d'évolution réciproque est de –20 %, c'est-à-dire qu'il faut appliquer une baisse de 20 % au prix augmenté pour revenir au prix avant augmentation.

# Exercices résolus

VIDÉO ALL MATHS PARNAK
Comprendre une méthode
www.lienmini.fr/8270-33

## Méthode 3 Calculer des évolutions successives

### Énoncé

**La population d'une ville augmente de 1 % entre 2017 et 2018, puis de 2 % entre 2018 et 2019.**

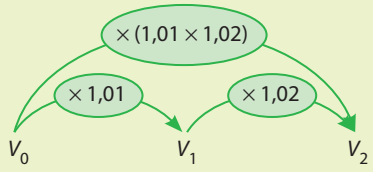
**Déterminer le taux d'évolution global entre 2017 et 2019.**

### Solution

$1 + \frac{1}{100} = 1{,}01$

$1 + \frac{2}{100} = 1{,}02$ 1

On a le schéma ci-contre.




$C_{global} = 1{,}01 \times 1{,}02 = 1{,}030\,2$ 2

$T_{global} = C_{global} - 1 = 1{,}030\,2 - 1 = 0{,}030\,2$ 3

$0{,}030\,2 \times 100 = 3{,}02$. L'évolution globale est une hausse de 3,02 %.

### Conseils & Méthodes

1. On calcule le coefficient multiplicateur associé à chaque évolution.
2. Le coefficient multiplicateur global s'obtient en multipliant tous les coefficients multiplicateurs successifs
3. Le taux d'évolution global s'obtient à partir du coefficient multiplicateur global : on ne peut pas ajouter ou soustraire des pourcentages d'évolution.

### À vous de jouer !

**5** La température moyenne journalière dans un village augmente de 15 % puis diminue de 14 %.
Déterminer le taux d'évolution global associé à ces deux évolutions.

**6** John étudie le nombre de paniers réussis lors de ses séries de cent lancers. Il a remarqué que son total avait augmenté de 10 %, puis diminué de 30 %. Déterminer l'évolution globale du nombre de ses lancers réussis.

↪ Exercices 68 à 76 p. 302

## Méthode 4 Calculer des évolutions réciproques

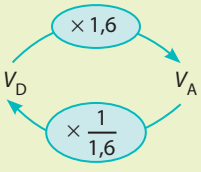
### Énoncé

**Une usine produit des pièces pour machine à laver. Le gérant a noté que le nombre de pièces défectueuses avait augmenté de 60 %. Le gérant souhaite revenir au niveau précédent de pièces défectueuses.**
**Quelle évolution en pourcentage le nombre de pièces doit-il subir ?**

### Solution

$1 + \frac{60}{100} = 1{,}6$

On a le schéma ci-contre.




$c_{réciproque} = \frac{1}{1,6} = 0{,}625$. 1

$t_{réciproque} = c_{réciproque} - 1 = 0{,}625 - 1 = -0{,}375$ 2

Et $-0{,}375 \times 100 = -37{,}5$

Ce nombre doit donc subir une baisse de 37,5 % pour revenir à sa valeur de départ.

### Conseils & Méthodes

1. Le coefficient multiplicateur réciproque s'obtient en prenant l'inverse du coefficient multiplicateur.
2. Le taux d'évolution réciproque s'obtient à partir du coefficient multiplicateur réciproque.

### À vous de jouer !

**7** À la suite de mauvaises récoltes de blé, le prix de la farine augmente de 30 %. Quelle est l'évolution en pourcentage que doit subir le prix de la farine pour revenir à sa valeur de départ ?

**8** Un artisan a décidé d'augmenter son tarif horaire de 10 %. Quelle évolution devrait-il subir pour revenir à son niveau de départ ?

↪ Exercices 77 à 80 p. 303

# Exercices résolution de problèmes

## J'apprends à choisir le bon schéma

**Réflexe 1**
Identifier le type de schéma à réaliser pour visualiser le problème.

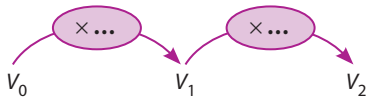
**Réflexe 2**
Faire ce schéma en respectant les hypothèses du problème.

### Énoncé

Après une baisse de 20 % puis une hausse de 15 %, un ordinateur coûte 782 €. **Quel était son prix avant la baisse ?**

### Solution commentée

**Étape 1** Dans cet énoncé, il y a deux évolutions successives.
Le schéma pourra avoir l'allure suivante. **Réflexe 1**




Où

- $V_0$ est le prix initial,
- $V_1$ le prix après la première évolution,
- $V_2$ le prix final après la deuxième évolution.

**Étape 2** Je repère dans l'énoncé les différentes données pour compléter le schéma : les pourcentages des différentes évolutions et la valeur finale.

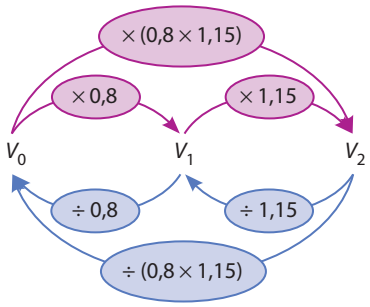
Puis je calcule les coefficients multiplicateurs associés à chaque évolution.
Une baisse de 20 % revient à multiplier par :

$$1-\frac{20}{100}=0,8.$$

Une hausse de 15 % revient à multiplier par :

$$1+\frac{15}{100}=1,15.$$

**Étape 3** Je complète le schéma **Réflexe 2**




*Réponse rédigée*

Une baisse de 20 % revient à multiplier par :

$$1-\frac{20}{100}=0,8.$$

Une hausse de 15 % revient à multiplier par :

$$1+\frac{15}{100}=1,15.$$

Donc le coefficient multiplicateur global est :

$$C_{global}=0,8\times 1,15=0,92.$$

Avec $V_0$ le prix initial et $V_2$ le prix final, on a :

$$V_2=C_{global}\times V_0 \text{ donc } V_0=\frac{V_2}{C_{global}}$$

$V_0=\frac{782}{0,92}=850$. Donc le prix initial de l'ordinateur avant la baisse était 850 €.

## Je m'entraîne à choisir le bon schéma

### 9 Évolution du prix d'un menu

Dans un hôtel, le prix d'une chambre pour une nuit augmente chaque année de 4 %.
En 2023, le prix de la chambre est 54,08 €.
Quel était le prix en 2021 ?

### 10 Augmentation ou diminution ?

Le prix d'un meuble a baissé de 4 % puis augmenté de 15 €, puis baissé de 4 %.
Sachant qu'après ces évolutions, le prix est de 198,72 €, le prix du meuble a-t-il augmenté ou diminué ?

### 11 Évolution d'une production

Diane est une agricultrice produisant du jus de pomme artisanal. En 2022, elle a vendu 1 586 litres de jus de pomme. Entre 2021 et 2022, ses ventes de jus ont augmenté de 22 % et entre 2022 et 2023, elles ont baissé de 6 %.
Combien de litres a-t-elle vendus en 2021 ?
Et en 2023 ?

**CARTES FLASH**
Acquérir des automatismes
www.lienmini.fr/8270-6

# Exercices automatismes

## Rituel 1

### Effectuer des calculs simples avec des nombres décimaux

**12** Calculer $0{,}2 \times 0{,}4$.

**13** Calculer $0{,}6 \times 300$.

### Résoudre une équation du premier degré

**14** Résoudre l'équation $3x - 4 = 19$.

**15** Résoudre l'équation $0{,}1x + 4 = 9$.

### Appliquer un pourcentage d'augmentation ou de diminution

**16** Aurore achète un jeu vidéo 55 €. Elle décide de le revendre d'occasion en baissant le prix de 10 %. Combien le revend-elle ?

**17** En 2023, un festival de jeux de société accueille 100 000 personnes. En 2024, le nombre de festivaliers augmente de 5 % par rapport à l'année précédente. Combien y a-t-il de festivaliers en 2024 ?

## Rituel 2

### Effectuer des calculs simples avec des pourcentages

**18** Calculer 50 % de 350.

**19** Dans une classe de 35 élèves, il y a 60 % de filles. Combien de filles y a-t-il ?

### Utiliser un ordre de grandeur pour contrôler un résultat

**20** Dans un lycée de 1 458 élèves, 476 élèves sont en Seconde.
Simon affirme que les Secondes représentent environ 50 % des élèves du lycée.
Que pensez-vous de son affirmation ?

### Passer d'une écriture à une autre

**21** Écrire $\frac{4}{20}$ sous forme décimale.

**22** Écrire $\frac{9}{10}$ sous forme de pourcentage.

## Rituel 3

### Effectuer des calculs simples avec des fractions

**23** Calculer $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$.

**24** Calculer $\frac{3}{4} \times 800$.

### Passer d'une écriture à une autre

**25** Écrire 0,8 sous forme de pourcentage et sous forme de fraction.

**26** Écrire 60 % sous forme de fraction irréductible.

### Appliquer un pourcentage d'augmentation ou de diminution

**27** À Paris, la longueur des stations de métro était fixée à 75 mètres dans les années 1900.
Dans certaines stations, cette longueur a augmenté de 40 %. Quelle est la longueur de ces stations ?

**28** Un article coûte 250 €.
Après une réduction de 20 %, quel sera son nouveau prix ?

## Rituel 4

### Effectuer des calculs simples avec des pourcentages

**29** Calculer 20 % de 500.

**30** Dans un paquet de bonbons de 200 grammes, 25 % des bonbons sont rouges.
Combien de grammes de bonbons rouges y a-t-il dans le paquet ?

### Résoudre une équation du premier degré

**31** Résoudre l'équation $400 \times (1 - x) = 300$.

**32** Résoudre l'équation $80 \times (1 + x) = 90$

### Effectuer une application numérique

**33** On rappelle la formule $v = \frac{d}{t}$.
Si une voiture roule à vitesse constante et parcourt 40 km en 30 minutes, à quelle vitesse roule-t-elle en km/h ?

**34** La moyenne géométrique de deux nombres $a$ et $b$ est $\sqrt{a \times b}$.
Calculer la moyenne géométrique de 4 et 9.

↪ Travaillez les méthodes des automatismes p. 8

# Exercices d'entraînement

## Je consolide mes acquis

### 35 Proportion avec des effectifs (1)

Un groupe de jazz prévoit de faire des concerts dans 85 villes différentes, dont 20 villes en France. Déterminer la proportion des villes françaises parmi toutes les villes. Donner le résultat sous forme de fraction puis de pourcentage en arrondissant à 0,1 % près.

### 36 Proportion avec des effectifs (2)

Karima étudie les statistiques de son joueur de basket préféré lors d'un match de NBA. Celui-ci a manqué 9 tirs durant le match, sur les 30 tentés.
Déterminer la proportion de tirs réussis par ce joueur.

### 37 Proportion et effectif de la population (1)

Dans une bibliothèque municipale, il y a 1 800 livres. 8 % des livres sont des mangas.
Combien y a-t-il de mangas ?

### 38 Proportion et effectif de la population (2)

Revan fait un sondage auprès de 800 personnes et leur demande leur style de musique préféré.
23 % disent préférer le rap.
Combien de personnes préfèrent le rap ?

### 39 Proportion et effectif de la sous-population (1)

Une agence de voyages propose différents circuits à l'étranger, dont 15 % en Amérique du Nord. Elle propose 12 circuits différents en Amérique du Nord.
Combien de circuits propose-t-elle au total ?

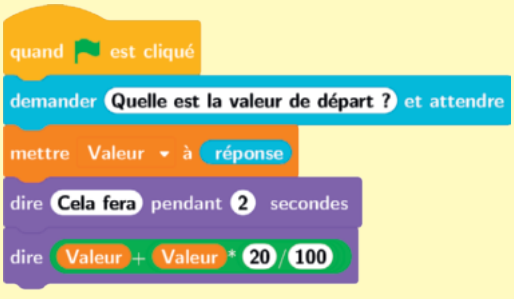
### 40 Proportion et effectif de la sous-population (2) SES

En 2018, le projet de budget de la France prévoyait 42,55 milliards de dépense concernant le ministère de la Défense, ce qui représentait 6 % des dépenses du budget.
Quel est le montant total des dépenses prévues par le projet de budget 2018 ?

(*Source :* Le Monde)

### 41 Scratch

Que renvoie le programme suivant si on choisit au départ **40** ?




## Questions de cours

**42** Comment obtient-on le coefficient multiplicateur global associé à deux évolutions successives ?

**43** Comment obtient-on le coefficient multiplicateur réciproque associé à une évolution ?

## Proportion de proportion

Méthode 1 p. 295

**44** La carte d'un restaurant est composée pour moitié de plats. Parmi eux, 20 % sont végétariens. Déterminer la proportion de plats végétariens dans la carte du restaurant.

**45** À un concours d'une grande École, un quart des élèves inscrits ont été admissibles et sont allés passer l'oral.
Parmi les admissibles, 42 % ont été admis.
1. Quelle est la proportion des élèves admis parmi les élèves inscrits ?
2. Il y avait 1 600 élèves inscrits.
Combien d'élèves ont été admis ?

**46** Dans un lycée, 30 % des élèves s'orientent en filière technologique en fin de Seconde.
Parmi eux, 40 % vont en série STMG.
1. Déterminer la proportion des élèves s'orientant en STMG parmi l'ensemble des élèves de seconde.
2. 54 élèves vont en série STMG.
Combien d'élèves de Seconde y a-t-il dans le lycée ?

**47** Un concours de talents se déroule en trois étapes. 15 % des candidats qui se présentent sont retenus après la première étape, et 20 % des candidats sélectionnés sont retenus après la deuxième étape. Pour la troisième étape, le jury retient les trois meilleurs candidats. Arts
1. Déterminer la proportion des candidats retenus après la deuxième étape parmi tous les candidats.
2. Sachant qu'il y avait 600 candidats au début du concours, quel pourcentage des candidats de la troisième étape les trois meilleurs candidats représentent-ils ?
Arrondir le résultat à 0,1 % près.

**48** **Analyser un problème pour le résoudre**

Laura utilise un site de vidéo en streaming. Elle a remarqué que 7 % des vidéos qu'elle visionnait étaient des séries françaises. Par ailleurs, 35 % des vidéos qu'elle a vues sont des séries.

Déterminer la proportion de séries françaises parmi les séries regardées par Laura.

↳ Résolution de problèmes p. 134 et p. 274

**49** SES

En 2020, selon une étude de l'INSEE 17,6 % des salariés travaillaient à temps partiel.

La proportion de femmes salariées à temps partiel parmi l'ensemble des salariés était alors de 13,9 %.

Déterminer la proportion de femmes parmi les salariés à temps partiel en 2020.

## Coefficient multiplicateur

**50** Déterminer les coefficients multiplicateurs associés aux évolutions suivantes.

**a)** Hausse de 30 %
**b)** Baisse de 10 %
**c)** Hausse de 2,3 %
**d)** Hausse de 100 %

**51** Déterminer les coefficients multiplicateurs associés aux évolutions suivantes.

**a)** Baisse de 5 %
**b)** Hausse de 1,03 %
**c)** Hausse de 300 %
**d)** Baisse de 95 %

**52** Déterminer les taux d'évolution en pourcentage associés aux coefficients multiplicateurs suivants.

**a)** $c = 1{,}2$
**b)** $c = 0{,}89$
**c)** $c = 1{,}03$
**d)** $c = 2$

**53** Déterminer les taux d'évolution en pourcentage associés aux coefficients multiplicateurs suivants.

**a)** $c = 0{,}3$
**b)** $c = 1{,}0087$
**c)** $c = 3{,}32$
**d)** $c = 0{,}876$

**54** **1.** Un opérateur téléphonique propose un forfait mobile à 15 €.

**a)** Si le prix du forfait augmente de 12 %, par quel nombre sera t-il multiplié ?

**b)** Quel sera le nouveau prix ?

**2.** L'opérateur propose également des abonnements internet avec la fibre à 40 € par mois.

Si le prix de l'abonnement baisse de 5 %, quel sera le nouveau prix ?

**55** Développement durable Tableur

Le livret de développement durable et solidaire (LDDS) est un produit d'épargne dont le taux d'intérêt est de 2 % en 2022. Roméo dépose 2 500 euros sur un LDDS en 2022.

**1.** Combien Roméo aura-t-il en 2023 sur son livret ?

**2.** Quelle formule doit-on rentrer dans la cellule B3 du tableur pour obtenir par recopie vers le bas le montant sur le livret chaque année ?

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | Année | Somme |
| 2 | 2022 | 2500 |
| 3 | 2023 | |
| 4 | 2024 | |
| 5 | 2025 | |

**56** Python

On considère le programme en langage **Python** suivant.

```
t=float(input("t="))
c=1+t
print(c)
```

**1.** Que renvoie ce programme si on donne `0.35` en entrée ?

**2.** À quoi ce programme peut-il servir ?

**3.** Que doit-on donner en entrée pour qu'il affiche `1.071` ?

**4.** **a)** Que renvoie le programme si on donne `-1.2` en entrée ?

**b)** Modifier le programme pour qu'il affiche un message d'erreur si on donne une proportion inférieure à –1 en entrée.

**57** Le prix d'un téléphone baisse de 40 % lors d'une promotion. Le prix après réduction est de 135 €.

Quel était le prix avant réduction ?

**58** **1.** La TVA (Taxe sur la Valeur Ajoutée) sur les livres est fixée à 5,5 %. Ryo achète un livre dont le prix HT (Hors Taxes) est 24 €. Quel est son prix TTC (Toutes Taxes Comprises) ?

**2.** Ryo achète aussi un jeu de société à 31,20 € TTC. La TVA sur ce produit est fixée à 20 %. Quel est le prix HT ?

**59** Développement durable

En 2021, les surfaces agricoles sur lesquelles sont conduites de l'agriculture biologique atteignent 2,78 millions d'hectares après une hausse de 9 % en 2020.

Quelle était leur surface en 2020 en millions d'hectares ? Arrondir le résultat à 0,01 près.

**60** Problème ouvert

Quelle est l'offre promotionnelle suivante la plus intéressante ?

**a)** 2 + 1 offert.
**b)** Le 2e à –50 %.
**c)** –30 % de réduction immédiate.

## Variation absolue, variation relative

Méthode 2 p. 295

**61** Dans chaque cas, calculer la variation absolue et la variation relative, arrondie au millième.
**a)** Le prix d'un vêtement passe de 20 € à 15,50 €.
**b)** Un influenceur voit le nombre de ses abonnés passer de 3,55 millions à 4 250 000.

**62** Le prix du litre d'essence est passé de1,67 euros en janvier 2022 à 2,15 euros en juin 2022.
**1.** Déterminer la variation absolue et la variation relative du prix de l'essence entre janvier et juin 2022. Arrondir à 0,001 près.
**2.** Quelle différence de prix cette variation représente-t-elle sur un plein de 30 litres ?

**63** Sophie décide de réduire drastiquement son temps devant les écrans. En 2022, elle passait environ 2 heures et quart par jour devant les écrans. En 2023, elle décide de ne passer que 55 minutes sur les écrans par jour.
Déterminer le taux d'évolution en pourcentage de son temps d'écran par jour. Arrondir le résultat à 0,01 % près.

**64** On compare la composition en trois gaz d'un litre d'air inspiré et d'un litre d'air expiré. Physique-Chimie

| | Air inspiré | Air expiré |
|---|---|---|
| Dioxyde d'azote | 78 cL | 78 cL |
| Oxygène | 21 cL | 17 cL |
| Dioxyde de carbone | 0,03 cL | 4 cL |

Déterminer la variation relative en pourcentage du volume de chacun de ces gaz entre l'air inspiré et l'air expiré. Arrondir le résultat à 0,1 % près.

**65** Un lave-vaisselle de classe C consomme environ 303 kWh par an. Développement durable
Un lave-vaisselle de classe A consomme environ 216 kWh par an.
**1.** Ruben décide de changer son lave-vaisselle de classe C pour en prendre un de classe A.
Quel est le taux d'évolution en pourcentage de sa consommation annuelle ?
Arrondir à 0,1 % près.
**2.** Sachant que le prix d'un kWh est 0,19 €, quel est le montant des économies réalisées grâce à ce changement ?

**66** On étudie l'évolution de la valeur de deux cryptomonnaies en dollars. SES

| | 1er janvier 2016 | 1er janvier 2022 |
|---|---|---|
| MathsCoin | 434 | 46 320 |
| Pythareum | 0,95 | 3 686 |

**1.** Déterminer la variation absolue et la variation relative de la valeur du MathsCoin et du Pythareum entre le 1er janvier 2016 et le 1er janvier 2022.
On arrondira à 0,01 près.
**2.** En déduire dans quelle cryptomonnaie il était plus intéressant d'investir en 2016.

**67** Esprit critique SES
On souhaite analyser quelques statistiques des élections présidentielles d'une ville.

| | 2nd tour 2002 | 2nd tour 2022 |
|---|---|---|
| Inscrits | 17 609 | 12 450 |
| Abstentions | 3 874 | 3 486 |

Jules affirme que le pourcentage d'abstention au 2nd tour a diminué d'environ 10 % entre 2002 et 2022.
Jules a-t-il raison ?

## Évolutions successives

Méthode 3 p. 297

**68** **1.** Un prix augmente de 10 % puis baisse de 40 %.
**a)** Calculer le coefficient multiplicateur global.
**b)** En déduire le taux d'évolution global.
**2.** Reprendre les questions précédentes pour les cas suivants.
**a)** Une baisse de 20 % puis une baisse de 10 %.
**b)** Une baisse de 13 % puis une hausse de 24,3 %.
**c)** Une baisse de 70 % puis une hausse de 200 %.

**69** Déterminer le taux d'évolution global en pourcentage associé aux évolutions successives suivantes.
**a)** Une hausse de 12 % puis une baisse de 5 %.
**b)** Une baisse de 50 % puis une baisse de 60 %.
**c)** Deux hausses successives de 45 %.

**70** Lors de la première démarque des soldes, un magasin annonce –30 % sur toutes les chemises.
Lors de la deuxième démarque, il annonce –10 % supplémentaires sur tous les produits soldés.
Quel est le taux d'évolution en pourcentage du prix d'une chemise ?

**71** Développement durable

Le volume d'eau d'un lac diminue de 6 % en août en raison d'une canicule puis augmente de 4 % en septembre en raison de fortes pluies. Le volume d'eau a-t-il augmenté ou diminué entre début août et fin septembre ? Préciser le pourcentage d'évolution.

**72** Logique & Démo

Démontrer que deux hausses successives de $t$ % donnent toujours une hausse de plus de $2t$ %.

**73** Le prix d'un loyer augmente chaque année de 4 %. De quel pourcentage a-t-il augmenté en trois ans ? Et en 15 ans ?

**74** Recopier et compléter.

**a)** Une hausse de 6 % suivie d'une hausse de … % correspond à une hausse de 21,9 %.

**b)** Trois baisses de 30 % correspondent à une baisse de … %.

**c)** Une baisse de … % suivie d'une baisse de 12 % correspond à une baisse de 34 %.

## 75 Choisir le bon schéma

Entre le 1er devoir et le 3e devoir de mathématiques de seconde, les notes d'Iris ont augmenté de 22 %.
Elles ont augmenté de 7 % entre le 1er et le 2e devoir.
De quel pourcentage les notes d'Iris ont-elles augmenté entre le 2e et le 3e devoir ? On arrondira à 0,1 % près.

↪ Résolution de problèmes p. 298 et p. 358

**76** Oral

Un nouveau stade est construit. La saison suivant son inauguration, il n'a été rempli qu'à moitié (en moyenne). Or, chaque année sa fréquentation moyenne augmente de 2 %.
Au bout de combien de temps, le taux de remplissage moyen du stade dépassera-t-il 90 % ? Expliquer.

## Évolution réciproque

Méthode 4 p. 297

**77** Dans chaque cas, calculer le coefficient multiplicateur réciproque, puis le taux d'évolution réciproque en pourcentage, arrondi à 0,1 % près.

**a)** Une hausse de 8 %.

**b)** Une baisse de 14 %.

**78** Dans une réserve naturelle, la population de tigres diminue de 18 %. De quel pourcentage faut-il qu'elle augmente pour revenir à sa valeur initiale ?
Arrondir à 0,01 % près.

**79** Physique

Lorsque l'on tire sur un ressort, sa longueur augmente de 86 %. De quel pourcentage diminue-t-elle lorsque le ressort retourne à sa position initiale ? Arrondir à 0,01 % près.

**80** SES

Le cours d'une action en bourse s'écroule mardi et chute de 70 %. De quel pourcentage faut-il qu'il augmente mercredi pour compenser cette chute ? Arrondir à 0,1 % près.

## À chacun son rythme

**81** Le tableau suivant donne l'évolution du chiffre d'affaires d'une entreprise sur plusieurs années.

| Année | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Chiffre d'affaires** (en milliers d'euros) | 1 254 | | | | | | 1 528 |
| **Taux d'évolution par rapport à l'année précédente** | | 9,7 % | 7,8 % | 5,1 % | –3,1 % | | |

**Coup de pouce** On peut lire, par exemple, que le chiffre d'affaires a augmenté de 5,1 % entre 2018 et 2019.

**Énoncé A**

1. Déterminer le taux d'évolution du chiffre d'affaires entre 2016 et 2022 à 0,1 % près.
2. Quel est le chiffre d'affaires en 2018 au millier d'euros près ?

**Énoncé B**

Quel est le taux d'évolution global du chiffre d'affaires entre 2016 et 2019 à 0,1 % près ?

**Énoncé C**

En 2021, le chiffre d'affaires était revenu au niveau de 2018. Déterminer le taux d'évolution de ce chiffre d'affaires entre 2020 et 2021 à 0,1 % près

# Exercices de synthèse

## 82 Lycée et stage de Troisième

On considère un lycée dans lequel 30 % des élèves sont en Seconde. Parmi eux, 8 % ont fait leur stage de Troisième dans une pharmacie.

**1.** Déterminer la proportion des élèves en Seconde ayant fait leur stage dans une pharmacie parmi tous les élèves du lycée.
**2.** On sait que 1,8 % des élèves du lycée sont en Seconde et ont fait leur stage dans un restaurant.
Quel est le pourcentage d'élèves ayant fait un stage dans un restaurant parmi les élèves de Seconde ?

## 83 Dans tous les sens

**1.** Recopier et compléter le tableau suivant.

| Valeur de départ | Valeur d'arrivée | Taux d'évolution en pourcentage | Coefficient multiplicateur |
|---|---|---|---|
| 72 | | –20 % | |
| 48 | | +10 % | |
| 55 | | | 0,7 |
| 80 | 96 | | |
| | 42 | | 1,4 |
| | 420 | –16 % | |

**2.** Quel est le taux d'évolution global en pourcentage associé à une hausse de 7 % suivie d'une baisse de 36 % ?
**3.** Quel est le taux d'évolution réciproque en pourcentage associé à une hausse de 68 % ? Arrondir à 0,1 % près.

## 84 Objectif à atteindre

Jeanne est directrice d'une agence bancaire.
Elle souhaite diminuer de 20 % le nombre de photocopies réalisées dans son agence durant l'année.
**1.** Elle prévoit de diminuer le nombre de photocopies de 10 % le 1er semestre et de 10 % le 2e semestre. Est-ce que cela lui permettra d'atteindre son objectif ?
**2.** Au 1er trimestre, le nombre de photocopies a diminué de 7 %, avant d'augmenter de 2 % au 2e trimestre et de diminuer à nouveau de 6 % au 3e trimestre.
On arrondira les résultats à 0,01 % près.
**a)** Déterminer le taux d'évolution global pour les trois premiers trimestres.
**b)** En déduire l'évolution que doit subir le nombre de photocopies lors du dernier trimestre pour que Jeanne puisse atteindre son objectif.

## 85 Salaire et prêt

Tableur

Maya a un prêt à la banque et doit rembourser 630 € chaque mois.
**1.** En 2023, le montant à rembourser représente 30 % de son salaire mensuel.
Quel est le salaire mensuel de Maya ?
**2.** Chaque année, le salaire de Maya augmente de 4 %.
**a)** Quel sera le salaire de Maya en 2024 ? et en 2025 ?
**b)** De quel pourcentage aura augmenté son salaire entre 2023 et 2025 ?
**c)** Quel pourcentage de son salaire représentera la somme qu'elle doit rembourser chaque mois en 2025 ?
On arrondira à 0,1 % près.
**3.** On suppose que le salaire de Maya continue toujours d'augmenter de 4 % par an.
**a)** Quelle valeur faut-il rentrer dans la cellule B2 ?

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | Année | Salaire |
| 2 | 2023 | |
| 3 | 2024 | |
| 4 | 2025 | |

**b)** Quelle formule faut-il rentrer dans la cellule B3 du tableur pour obtenir par recopie vers le bas les salaires de Maya ?

## 86 Cuisine et devis

Léo décide de refaire sa cuisine.
**1.** Il fait un devis pour les meubles de sa nouvelle cuisine. Le montant HT (Hors Taxes) du devis est 6 500 € et la TVA est fixée à 10 %.
**a)** Quel est le montant TTC (Toutes Taxes Comprises) du devis ?
**b)** Léo donne son accord pour le devis.
Il doit régler un acompte de 40 % sur le montant TTC.
Quel montant doit-il payer ?
**c)** Il doit ensuite régler la moitié du montant restant lors de la livraison des meubles. Quel pourcentage du montant total cela représente-t-il ?
**d)** Enfin, il doit payer le reste après la pose. À quelle somme cela correspond-il ?
**2.** Léo décide également d'acheter de l'électroménager.
**a)** Il souhaite acheter un réfrigérateur, qui coûte initialement 699 euros et qui est en soldes à –20 %.
Quel est le prix du réfrigérateur ?
**b)** Léo souhaite également acheter un four. Le prix du four a subi une première baisse de 30 %, puis une seconde baisse de 10 %. Quel est le pourcentage de réduction sur le four ?
**c)** Enfin Léo achète un four à micro-ondes.
Le micro-ondes est soldé à –40 %. Son prix soldé est 63 €.
Quel était son prix avant les soldes ?

## 87 Différences de salaires

Trois amis comparent leurs salaires.
Inès gagne 8 % de plus que Pédro et Pédro gagne 12 % de plus que Flora.
Recopier et compléter les phrases suivantes.
Arrondir les résultats à 0,01 % près.
**a)** Inès gagne … de plus que Flora.
**b)** Pédro gagne … de moins que Inès.
**c)** Flora gagne … de moins que Pédro.
**d)** Flora gagne … de moins que Inès.

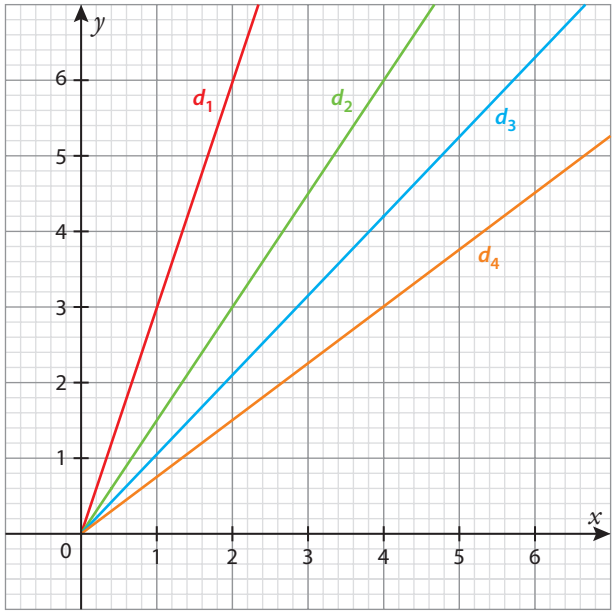
# Exercices d'approfondissement

## 88 Aire et volume

**1.** On considère un rectangle. On diminue de 25 % sa longueur et de 75 % sa largeur.
De quel pourcentage a diminué son aire ?
**2.** On considère un carré. On augmente la longueur de ses côtés d'un même pourcentage, afin que l'aire augmente de 96 %. De quel pourcentage a-t-on augmenté les côtés ?
**3.** On considère un cylindre. On augmente son rayon de 20 % et sa hauteur de 30 %. De quel pourcentage a augmenté son volume ?
**4.** On considère un triangle rectangle. On augmente un des côtés de l'angle droit de $t$ %, et on diminue l'autre côté de l'angle droit de $t$ %. Que peut-on dire de l'aire ?

## 89 Fonction et évolution en pourcentage

**1. a)** Un gérant de supermarché décide d'augmenter tous les prix de ses produits de 2 %. On note $x$ le prix d'un de ses produits. On note $f(x)$ son nouveau prix.
Déterminer une expression de $f(x)$.
**b)** Quelle est la nature de la fonction $f$ ?
**2.** Associer chaque droite représentant une fonction linéaire à l'évolution en pourcentage correspondante.
**a)** Hausse de 50 %. **b)** Baisse de 25 %.
**c)** Hausse de 200 %. **d)** Hausse de 5 %.




**3.** À quelle condition une droite va-t-elle représenter une hausse en pourcentage ? une baisse en pourcentage ?

## 90 Bonnes affaires

Deux magasins situés en face l'un de l'autre se livrent une concurrence acharnée. Chacun propose le kilo de pommes à 2 euros, mais avec des offres différentes.
• Le premier annonce : « Pour deux kilos minimum de pommes achetés, 10 % de réduction immédiate ! »
• Le second propose : « Pour deux kilos minimum de pommes achetés, 10 % de produit en plus ! »
Les offres sont-elles équivalentes ?

## 91 Réductions successives

Défi

En bon client d'un magasin, Vincent dispose d'une carte de fidélité qui lui donne droit à une réduction systématique sur tous les articles. Comme le magasin fête son anniversaire, il bénéficie d'une deuxième remise sur le prix réduit.
Ainsi, pour acheter un ordinateur marqué à 345 €, il ne paie que 301,53 €.

Une fois rentré chez lui, Vincent ne se souvient plus des pourcentages des deux réductions successives. Mais il est sûr qu'ils étaient entiers et inférieurs à 10. Aider Vincent à retrouver ces deux pourcentages
(D'après *Pépinière académique* 2014)

## 92 Inflation

Samuel a constaté que le prix de la maison qu'il convoitait était passé de 150 milliers d'euros en 2016 à 157,6 milliers deux ans plus tard. Samantha lui fait remarquer : « Mais c'est bien plus que l'inflation annuelle de 2 % annoncée ! »
**1.** Déterminer le coefficient multiplicateur global associé à l'évolution du prix de la maison.
Arrondir le résultat à $10^{-4}$ près.
**2.** On cherche à déterminer l'évolution annuelle moyenne en pourcentage.
**a)** Expliquer pourquoi le coefficient multiplicateur annuel moyen $c$ doit vérifier l'équation $c^2 = 1{,}050\,7$.
**b)** En déduire le taux d'évolution annuel moyen.
**c)** Que penser de l'affirmation de Samantha ?

## 93 Rédiger une solution

À la rentrée, Yannick se lance un défi : il veut réduire son temps passé devant les jeux vidéo de 30 % avant le mois de décembre. Pour faire les choses en douceur, il veut étaler cette réduction sur trois mois : il souhaite diminuer son temps d'un même pourcentage $t$ chaque mois de septembre, octobre et novembre.
**1.** Expliquer pourquoi appliquer trois baisses successives de 10 % ne sera pas suffisant.
**2.** Montrer que le problème revient à résoudre $(1 + t)^3 = 0{,}7$.
**3. a)** On pose $X = 1 + t$. Résoudre l'équation $X^3 = 0{,}7$.
Donner une valeur approchée au millième.
**b)** En déduire la solution au problème de Yannick.

↪ Résolution de problèmes p. 54 et p. 246

# Exercices d'approfondissement

## 94 Fréquentation d'un cinéma

**1.** Afin d'augmenter sa recette, le gérant d'un cinéma décide d'augmenter de 10 % le prix de la place de cinéma. Or, sa recette n'augmente que de 4,5 %.
Quel est le taux d'évolution du nombre de tickets vendus ?
**2.** Suite à une étude de marché, il prévoit que s'il augmente de $x$ % le prix de la place de cinéma, le nombre de tickets vendus diminuera de $0{,}5x$ %. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de $x$ afin de maximiser sa recette.

## 95 Modéliser à l'aide d'une indéterminée

Un contrôleur qualité décide de vérifier un lot de tablettes provenant de deux usines différentes. 60 % des tablettes proviennent de l'usine A et parmi celles-ci 4 % ont un défaut.
Au total, 5 % des tablettes du lot ont un défaut.
Quel est le pourcentage de tablettes ayant un défaut parmi celles de l'usine B ?

↪ Résolution de problèmes p. 80 et p. 217

## 96 Différentes réductions

Enzo décide d'acheter une coque pour son téléphone portable ainsi que des écouteurs.
Si la coque est en soldes à –20 % et les écouteurs en soldes à –30 % alors il payera un total de 80 euros.
Si la coque est en soldes à –30 % et les écouteurs en soldes à –20 %, alors il payera un total de 85 euros.
Déterminer le prix de la coque non soldée et des écouteurs non soldés.

# Vers la 1re

## 97 Vers STMG

Afin de pouvoir exploiter plus facilement les évolutions d'une quantité ou de comparer les évolutions de différentes quantités, on utilise la notion d'indice base 100. On affecte la valeur 100 à une date de référence, et on calcule les autres indices par proportionnalité avec les valeurs.
On décide de comparer l'évolution du prix de la baguette de pain, et du SMIC horaire brut.
**1.** Recopier et compléter les deux tableaux suivants. Arrondir les résultats au centième près.

| | 2000 | 2005 | 2010 | 2015 | 2020 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Prix de la baguette** (en euros) | 0,64 | 0,75 | 0,84 | 0,86 | 0,88 |
| **Indice** | 100 | | | | |

| | 2000 | 2005 | 2010 | 2015 | 2020 |
|---|---|---|---|---|---|
| **SMIC** | 6,41 | 7,82 | 8,86 | 9,61 | 10,15 |
| **Indice** | 100 | | | | |

**2.** En 2022, l'indice du prix de la baguette de pain est 143,75. Quel est le prix d'une baguette de pain ?
**3.** Représenter sur un même graphique l'indice du prix de la baguette de pain, et l'indice du SMIC horaire brut. Que peut-on dire sur les évolutions de ces deux quantités ?

## 98 Vers Spécialité Maths

Python

Une ville comptait 12 500 habitants en 2022.
On prévoit que chaque année, le nombre d'habitants augmente de 5 % par rapport à l'année précédente.

**1.** Quel sera le nombre d'habitants en 2023 ?
**2.** On note $u(n)$ la population en 2022 + $n$.
Ainsi, $u(0)$ est la population en 2022, $u(1)$ la population en 2023.
**a)** Donner la valeur de $u(0)$ et de $u(1)$.
**b)** Donner la valeur de $u(2)$ et son interprétation.
**c)** Donner la valeur de $u(3)$ et son interprétation.
**d)** Déterminer une expression de $u(n)$ en fonction de $n$.
**3.** Déterminer en quelle année le nombre d'habitants dépassera 20 000.
**4.** On considère le programme en langage **Python** ci-contre.

**a)** Quelle valeur affiche ce programme ?
**b)** Donner une interprétation concrète de cette valeur.

```
u=12500
n=0
while u<25000:
    u=1.05*u
    n=n+1
print(n)
```

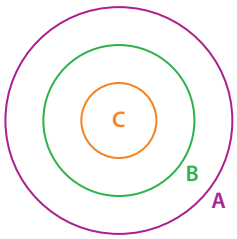
Objectif

## 1 Calculer des proportions

### Proportion de proportion

Soit A, B, C trois ensembles tels que C ⊂ B ⊂ A.
- $p$ est la proportion de B dans A.
- $p'$ est la proportion de C dans B.

▸ Alors $p \times p'$ est la proportion de C dans A.




Objectif

## 2 Calculer des variations absolues et relatives

### Coefficient multiplicateur

▸ **Augmenter** un nombre de $t$ %, c'est le multiplier par :

$$1+\frac{t}{100}.$$

▸ **Diminuer** un nombre de $t$ %, c'est le multiplier par :

$$1-\frac{t}{100}.$$

### Variation absolue, variation relative

Une quantité passe d'une valeur de départ $V_D$ à une valeur d'arrivée $V_A$.

▸ La **variation absolue** est :

$$V_A - V_D$$

▸ La **variation relative** ou **taux d'évolution** est :

$$\frac{V_A - V_D}{V_D}$$

### Coefficient multiplicateur et taux d'évolution

$t$ est le **taux d'évolution** sous forme décimale, $c$ est le **coefficient multiplicateur**.

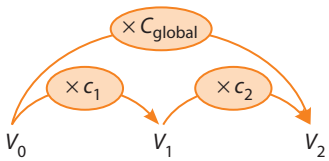
▸ Alors :

$$c = 1 + t \quad \text{et} \quad t = c - 1$$

Objectif

## 3 Étudier des évolutions successives

Une valeur suit deux évolutions successives de coefficients multiplicateurs $c_1$ et $c_2$.




▸ Le coefficient **multiplicateur global** est :

$$C_{global} = c_1 \times c_2$$

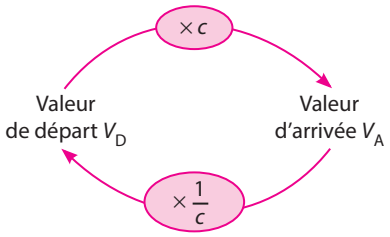
▸ Le **taux d'évolution global** est :

$$T_{global} = C_{global} - 1$$

Objectif

## 4 Étudier des évolutions réciproques

Une valeur suit une évolution de coefficient multiplicateur $c$.




▸ Le **coefficient multiplicateur réciproque** est :

$$c_{\text{réciproque}} = \frac{1}{c}$$

▸ Le **taux d'évolution réciproque** est :

$$t_{\text{réciproque}} = c_{\text{réciproque}} - 1$$

# Préparer le contrôle — Je me teste

**QCM INTERACTIF**
Tester ses connaissances
www.lienmini.fr/8270-34

## QCM Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Objectif 1

### Calculer des proportions

**Pour les exercices 99 et 100, Aurélie regarde les photos de son téléphone. 25 % des photos ont été prises en 2022. Parmi celles-ci, 40 % ont été prises durant l'été.**

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **99** Quelle est la proportion des photos prises pendant l'été 2022 dans tout l'album d'Aurélie ? | 0,65 | 0,15 | 0,1 | 1 000 |
| **100** On suppose qu'il y a 800 photos dans son album photo. Combien de photos ont été prises pendant l'été 2022 ? | 80 | 120 | 200 | 320 |

Objectif 2

### Calculer des variations absolues et relatives

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **101** Effectuer une baisse de 13 % revient à multiplier par : | 0,13 | 1,13 | 0,87 | –0,13 |
| **102** Une population de bactéries cultivée en laboratoire augmente chaque jour de 20 %. Le premier jour, on estimait à 10 milliers le nombre de bactéries. Au bout d'un jour, la population de bactéries est de : | 10 000,2 | 12 milliers | 2 000 | 8 milliers |
| **103** Le prix d'un article passe de 215 € à 184,90 €. La variation absolue est : | 30,10 € | –30,10 € | 14 % | –14 % |
| **104** Le prix d'un article passe de 56 € à 70 €. La variation relative est : | 0,2 | 0,25 | 20 % | 25 % |

Objectif 3

### Étudier des évolutions successives

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **105** Après une hausse de 10 % puis une hausse de 20 %, l'évolution globale est une hausse de : | 32 % | 30 % | 2 % | 132 % |
| **106** Après une baisse de 40 % puis une hausse de 10 %, l'évolution globale est : | Une hausse de 34 % | Une baisse de 34 % | Une hausse de 66 % | Une baisse de 66 % |

Objectif 4

### Étudier des évolutions réciproques

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **107** Le taux d'évolution réciproque associé à une baisse de 37,5 % est : | 1,6 | 0,6 | 60 % | 160 % |
| **108** Le nombre de pièces défectueuses produites par une usine a doublé. Pour revenir à son niveau de départ, ce nombre doit subir une baisse de : | 50 % | 2 % | 0,5 % | 100 % |

↪ Corrigés p. 390

# Préparer le contrôle — Je m'entraîne

## Parcours différenciés

| | Objectif 1 | Objectif 2 | Objectif 3 | Objectif 4 |
|---|---|---|---|---|
| Parcours A | 1 109 | 3 54 112 | 5 115 | 7 118 |
| Parcours B | 45 110 | 54 61 113 | 68 116 | 77 119 |
| Parcours C | 48 111 | 58 63 114 | 74 117 | 80 120 |

## Exercices

### Objectif 1 Calculer des proportions

**109** 22 % des messages qu'a envoyés Julie ce mois-ci ont été envoyés à de la famille, et parmi ceux-ci, 55 % ont été envoyés à sa mère.
Déterminer la proportion des messages envoyés à sa mère parmi tous les messages de Julie.

**110** Dans un zoo, il y a 60 % de mammifères, et parmi ceux-ci il y a 10 % de singes.
On sait qu'il y a 15 singes.
Combien y a-t-il d'animaux dans ce zoo ?

**111** Nour a relevé que son bébé se réveille une nuit sur quatre. Il a aussi noté que la proportion des nuits où son bébé devait boire un biberon pour se rendormir était de 0,08. Déterminer la proportion de nuits où Nour doit préparer un biberon parmi les nuits où son bébé se réveille.

### Objectif 2 Calculer des variations absolues et relatives

**112** Le contenu d'un paquet de céréales pèse 430 grammes.
**1.** Déterminer la masse du contenu si on l'augmente de 15 %.
**2.** Déterminer la variation relative de la masse du contenu s'il passe de 430 grammes à 500 grammes.
Arrondir au millième.

**113** Le tableau suivant donne le montant du SMIC horaire brut au 1er janvier chaque année.

| **Année** | 2019 | 2020 | 2021 |
|---|---|---|---|
| **SMIC horaire** (en euros) | 10,03 | 10,15 | 10,25 |

Le SMIC a-t-il connu une plus grande évolution entre 2019 et 2020 ou entre 2020 et 2021 ?

**114** Ryan achète un tee-shirt coûtant initialement 15 euros, en soldes à –20 % et un pantalon en soldes à –30 %, avec un prix soldé de 28 €.
Quel pourcentage de remise a-t-il eu sur l'ensemble de ses achats ? Arrondir à 0,01 % près.

### Objectif 3 Étudier des évolutions successives

**115** Déterminer l'évolution globale en pourcentage associée à une hausse de 8 % suivie d'une baisse de 26 %.

**116** Noa décide de trier sa boîte mail.
On suppose qu'elle ne reçoit pas de nouveaux mails.
Mardi, elle supprime 12 % de ses mails et mercredi elle supprime le quart des mails restants.
Sachant que jeudi matin, il lui reste 2 277 mails, combien de mails Noa avait-elle dans sa boîte lundi ?

**117** À la suite de deux démarques, un ordinateur se trouve soldé à –44 %. Un autocollant indique que la deuxième baisse était de 20 %. Quel était le taux en pourcentage de la première baisse ?

### Objectif 4 Étudier des évolutions réciproques

**118** Déterminer le taux d'évolution réciproque en pourcentage d'une hausse de 54 %.
Si besoin, on arrondira à 0,1 % près.

**119** Le nombre d'élèves d'un lycée passe de 1 200 à 1 100. De quel pourcentage faut-il qu'il augmente pour revenir à la valeur de départ ?
Si besoin, on arrondira à 0,01 % près.

**120** Une quantité triple, puis baisse de 85 %.
Quelle est l'évolution en pourcentage qu'il faut lui appliquer pour qu'elle retrouve sa valeur initiale ?
Si besoin, on arrondira à 0,1 % près.

↪ Corrigés p. 390

# Travaux pratiques

Tableur — 30 min — Raisonner — Représenter

## 1 Évolution du nombre de voyages

Le tableau suivant donne le nombre de voyages en millions effectués chaque mois par l'ensemble des résidents de France Métropolitaine en prenant en compte tous les motifs et tous les moyens de transport.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | janv-21 | févr-21 | mars-21 | avr-21 | mai-21 | juin-21 | juil-21 | août-21 | sept-21 | oct-21 | nov-21 | déc-21 |
| 2 | Nombre de voyages | 11,2 | 12,2 | 9,8 | 7,3 | 18,2 | 16,7 | 22,9 | 30,2 | 18,4 | 17,7 | 16,1 | 19,9 |
| 3 | Variation absolue | | | | | | | | | | | | |
| 4 | Variation relative | | | | | | | | | | | | |

(*Source :* INSEE)

**1.** Ouvrir un tableur et reproduire le tableau précédent.

**2.** Représenter à l'aide d'un nuage de points le nombre de voyages en fonction du mois.

**3. a)** Dans la cellule C3, entrer une formule permettant d'obtenir la variation absolue entre janvier 2021 et février 2021.
**b)** Recopier cette formule vers la droite pour obtenir les variations absolues dans la ligne 3.

**4.** Compléter de même la ligne suivante pour obtenir les variations relatives.

**5.** Entre quels mois a eu lieu la plus forte baisse ? la plus forte hausse ?

**6.** On suppose que le nombre de voyages baisse chaque année de 30 % entre décembre et janvier.
**a)** Quel nombre de voyages peut-on prévoir en janvier 2022 ?
**b)** Quel aurait été le nombre de voyages en décembre 2020 ?

**7.** Pour aller plus loin En allant sur le site de l'INSEE, dans la rubrique *Statistiques et études*, analyser l'évolution d'une autre série de données de votre choix.

Python — 30 min — Raisonner — Expérimenter

## 2 Algorithme et évolution

### A ▸ Variation relative

**1.** On considère le programme ci-contre écrit en langage **Python**.
Ce programme comporte une erreur. Corriger ce programme.

```
VD=float(input("VD="))
VA=float(input("VA="))
t=(VA-VD)/VA
print(t)
```

**2.** Tester ce programme : **a)** pour `VD = 40` et `VA = 55`. **b)** pour `VD = 15` et `VA = 13`.

**3.** Modifier ce programme pour qu'il indique si l'évolution est une hausse ou une baisse.

### B ▸ Taux d'évolution réciproque

**1.** On souhaite écrire un programme permettant de calculer automatiquement le taux d'évolution réciproque, lorsqu'on lui donne un taux d'évolution. Laquelle des fonctions **Python** suivantes permet de répondre au problème ?

① 
```
def f(t):
    cr=1/t
    tr=cr-1
    return cr
```

② 
```
def f(t):
    cr=1/t
    tr=cr-1
    return tr
```

③ 
```
def f(t):
    cr=1/(1+t)
    tr=cr-1
    return cr
```

④ 
```
def f(t):
    cr=1/(1+t)
    tr=cr-1
    return tr
```

**2.** Quelle est la valeur de retour de la fonction *f* si l'on appelle :
**a)** `f(0.2)` **b)** `f(-0.2)` **c)** `f(2)` **d)** `f(-2)`.

**3.** Modifier ce programme pour qu'il renvoie un message d'erreur lorsque `t<-1`.

**4.** Pour aller plus loin Le programme renvoie `-0.375`. Quelle était la valeur de `t` ?

Tableur 45 min Modéliser Raisonner

# 3 Les soldes

## A ▸ Première démarque

**1.** Ouvrir un tableur, et reproduire la feuille de calcul suivante. On fera varier les prix de 1 euro à 200 €.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Prix | Prix après la 1re démarque | Prix après la 2e démarque | Prix après la 3e démarque | | Pourcentage de la 1re démarque | Pourcentage de la 2e démarque | Pourcentage de la 3e démarque |
| 2 | 1 | | | | | | | |
| 3 | 2 | | | | | | | |

On rentrera le pourcentage de réduction de la première démarque dans la cellule F2, celui de la deuxième démarque dans la cellule G2 et celui de la troisième démarque dans la cellule H2.

**2.** Entrer dans la cellule B2 une formule permettant d'obtenir dans la colonne B les prix après la première démarque, puis recopier cette formule vers le bas.

**Coup de pouce** Si on souhaite bloquer la lettre et/ou le nombre dans une adresse lorsqu'on étend une formule, on utilise le symbole $ devant l'élément que l'on veut bloquer.

**3.** À l'aide du tableur, répondre aux questions suivantes :
**a)** Un pantalon coûte 30 €, quel sera son prix après une première démarque à –30 % ? et à –60 % ?
**b)** Une veste coûte 52 € après une première démarque à –20 %. Quelle était son prix avant les soldes ?

## B ▸ Deuxième et troisième démarques

**1. a)** Entrer dans la cellule C2 une formule permettant d'obtenir dans la colonne C les prix après la deuxième démarque, puis recopier cette formule vers le bas.
**b)** Entrer dans la cellule D2 une formule permettant d'obtenir dans la colonne D les prix après la troisième démarque, puis recopier cette formule vers le bas.

**2.** À l'aide du tableur, répondre aux questions suivantes.
**a)** Un pantalon coûte 30 €, quel sera son prix après une première démarque à –30 %, une deuxième démarque à –20 % et une troisième démarque à –10 % ?
**b)** Après 3 démarques à –10 %, Nicolas achète le vêtement le plus cher mais avec un prix soldé entier et inférieur à 100 €. Quel était le prix avant soldes du vêtement qu'a acheté Nicolas ?

**3.** **Pour aller plus loin** Retrouver les résultats des questions **A.3.** et **B.2.** par le calcul.

Python 15 min Modéliser Expérimenter

# 4 Compte épargne

En 2022, Kenny dépose 500 €, sur un compte épargne avec des intérêts à taux composés. Chaque année, la banque lui verse 2 % de la somme disponible sur le compte. On suppose qu'il ne redépose pas d'argent sur son compte.

**1.** On souhaite savoir quelle sera la somme sur le compte de Kenny en 2025.
**a)** Compléter le programme **Python** ci-contre afin qu'il réponde au problème.

```
s=500
for i in range (1,4):
    s= ...
print(s)
```

**Coup de pouce** `for i in range(1,n)` fait varier `i` de `1` à `n-1` (et non `n`).

**b)** Exécuter le programme et en déduire la réponse.

**2.** Modifier le programme pour qu'il nous donne la somme sur le compte de Kenny en 2042, puis l'exécuter.

**3.** **Pour aller plus loin** On souhaite savoir quand la somme aura doublé.
Écrire un programme en **Python** permettant de répondre à la question posée puis l'exécuter.

# 12 Statistiques descriptives

**Les maths au quotidien**

Les **statistiques descriptives** permettent de documenter l'évolution des températures ces dernières décennies et de mettre en évidence l'influence des humains sur les changements climatiques.

# Pour prendre un bon départ

EXERCICES Sésamath
Réviser ses acquis
www.lienmini.fr/8270-s24

## 1 Moyenne et médiane

Vu au collège

Sara se rend toutes les semaines au marché. Sur les sept premières semaines de l'année, elle a dépensé les sommes suivantes, exprimées en euros

12,54 31,79 21,37 19,99
51,12 36,10 9,15

**1.** Combien Sara a-t-elle dépensé au marché chaque semaine en moyenne sur ces sept semaines ?

**2. a)** Classer ces sommes dépensées par ordre croissant.

**b)** Déterminer l'étendue de cette série statistique des sommes dépensées.

**c)** Déterminer la médiane de cette série statistique des sommes dépensées.

## 2 Avec des effectifs

Vu au collège

| Valeur | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Effectif | 2 | 1 | 3 | 2 |

Pendant 8 jours, Fatou a noté, chaque soir, le nombre de fois où elle a reçu un appel de démarchage téléphonique dans la journée. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessus.

**1.** Combien de jours a-t-elle reçu exactement deux appels de démarchage ? Deux appels ou moins ?

**2.** Interpréter la dernière colonne du tableau en utilisant le contexte de l'énoncé.

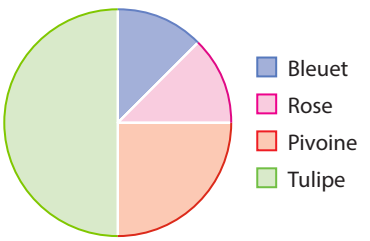
**3.** Calculer la fréquence de la valeur 0 et l'interpréter en utilisant le contexte de l'énoncé.

**4.** Calculer l'étendue, la moyenne et la médiane de cette série statistique.

## 3 Représentations graphiques

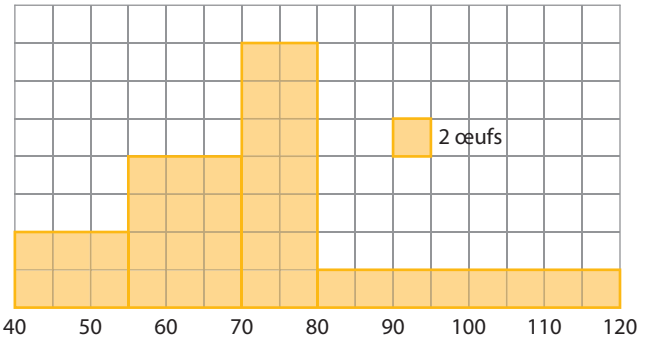
Vu au collège

**1. a)** Donner les valeurs associées à la série représentée par le diagramme circulaire ci-contre.




**b)** Préciser les effectifs de chaque valeur sachant que l'effectif total est 24.

**2.** Dans un poulailler familial, on a relevé la masse, en grammes, de 80 œufs pondus au fil des semaines, les résultats sont donnés par l'histogramme ci-contre. Donner les classes (ou intervalles) associées à cet histogramme et le nombre d'œufs observés dans chacune d'elles.




CORRIGÉS www.lienmini.fr/8270-35

# Activités

Python 20 min

## 1 Moyenne pondérée

Ce trimestre, Joshua n'a eu que des notes sur 20 en SES mais elles ne sont pas toutes **coefficientées** de la même façon. Son professeur lui a expliqué qu'une note coefficient 0,5 comptait comme une note sur $0{,}5 \times 20 = 10$, qu'une note coefficient 3 comptait comme une note sur $3 \times 20 = 60$.

**1.** Sur les cinq notes sur 20 du trimestre, Joshua a eu :

• 17 coefficient 2 • 15 et 14 coefficient 1 • 5 coefficient 0,5 • 4 coefficient 0,25.

**a)** Recopier et compléter la phrase suivante :

Obtenir 17 coefficient 2 compte comme … sur 40.

**b)** Faire de même avec toutes les notes dont le coefficient n'est pas 1.

**c)** En déduire la note trimestrielle en SES de Joshua sur 95.

**d)** Par combien faut-il diviser cette note trimestrielle sur 95 pour la ramener sur 20 ? Quel est le lien avec les coefficients des cinq notes ?

**2.** Expliquer pourquoi la moyenne de Joshua est si haute malgré ces deux « mauvaises » notes.

**3.** En un seul calcul, déterminer la moyenne d'un élève ayant obtenu :

• 12 coefficient 3 • 9 et 16 coefficient 2 • 13 coefficient 0,75.

**4.** Pour aller plus loin Écrire un programme en langage **Python** demandant à l'utilisateur combien de notes il a eu puis lui demandant chacune de ces notes ainsi que le coefficient correspondant.

Le programme affiche alors la moyenne trimestrielle de ces notes coefficientées.

↪ Cours 1 p. 316

Tableur 30 min

## 2 Linéarité de la moyenne

**1.** Préparer une feuille de calcul avec les en-têtes ci-contre.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Valeurs** | **Valeurs*k** | **Valeurs+k** | **Valeurs/k** | **Valeurs−k** | | **k =** | **2** |

**2.** Dans la cellule A2, générer un entier aléatoire entre 1 et 100 avec la commande `=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)` puis recopier vers le bas jusqu'à la cellule A21.

**3. a)** Saisir la formule `=A2*H1` dans la cellule B2 et la recopier vers le bas jusqu'à B21.

**b)** Les valeurs qui apparaissent dans les cellules sont-elles correctes ? Expliquer pourquoi.

**c)** Comment écrire correctement la formule en B2 ?

**Coup de pouce** Quand on utilise l'adresse d'une cellule dans une formule et que l'on souhaite qu'un élément de cette adresse (colonne et/ou ligne) ne soit pas modifié quand la formule est étendue, on écrit le symbole $, devant la lettre donnant la colonne et/ou le nombre donnant la ligne. Cela permet de figer cette lettre ou ce nombre.

**4.** Faire de même pour les colonnes C, D et E (adapter au titre de la colonne !).

**5.** Saisir `=MOYENNE(A2:A21)` dans la cellule A22. À quoi la valeur obtenue correspond-elle ?

**6.** Quelle va être la moyenne des valeurs de la colonne B ?
Vérifier en tirant la formule en A22 d'une **seule** cellule vers la droite.

**7.** Reprendre cette question avec chacune des colonnes.

**8. a)** Modifier la valeur de k en H1 et observer les différentes moyennes dans la ligne 22.

**b)** Énoncer des règles que l'on peut conjecturer sur la moyenne d'une série pour laquelle on multiplie (respectivement ajoute, divise, etc.) toutes les valeurs par un même nombre.

↪ Cours 2 p. 318

Tableur 20 min

## 3 Écart-type

On donne ci-dessous le nombre de buts marqués par certaines joueuses de handball durant les championnats d'Europe 2016, 2018, 2020 et 2022.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Bölk | Tranborg | Van der Heijden | Oftedal | Hagman |
| 2 | 2016 | 16 | 24 | 18 | 20 | 17 |
| 3 | 2018 | 20 | 18 | 14 | 33 | 35 |
| 4 | 2020 | 19 | 19 | 21 | 31 | 14 |
| 5 | 2022 | 28 | 23 | 34 | 34 | 43 |
| 6 | Moyenne de buts | | | | | |
| 7 | Écart-type | | | | | |

À gauche, Stine Bredal Oftedal tenant la balle lors d'un match contre le Danemark le 16 novembre 2022 à Loublin (Slovénie).

**1.** Recopier cette feuille de calcul et saisir `=MOYENNE(B2:B5)` dans la cellule B6 puis recopier vers la droite afin de remplir la ligne 6.

**2. a)** Pourquoi peut-on considérer que les trois premières joueuses sont globalement du même niveau ?

**b)** Classer intuitivement ces trois joueuses de la moins régulière à la plus régulière.

**c)** L'**écart-type** est un indicateur permettant de mesurer si les valeurs d'une série statistique sont plus ou moins proches de sa moyenne : plus il est petit, plus elles en sont proches.

Saisir `=ECARTYPEP(B2:B5)` dans la cellule B7 et recopier vers la droite jusqu'à D7 (**et pas plus loin**).

**d)** Les résultats affichés confirment-ils la réponse à la question **2. b)** ?

**3.** Laquelle des séries des buts marqués par Stine Bredal Oftedal et Nathalie Hagman paraît avoir le plus grand écart-type ? Expliquer pourquoi. Vérifier avec le tableur.

**4.** **Pour aller plus loin** Trouver une raison qui explique des grandes variations dans le nombre total de buts marqués, indépendante de la variation de niveau des joueuses d'une compétition à l'autre.

↪ Cours 3 p. 318

Tableur 25 min

## 4 Quartiles d'une série statistique

**TABLEUR**
**Espérances de vie des femmes et des hommes en 2020**
www.lienmini.fr/8270-tab2

**1.** Télécharger le fichier contenant les séries des espérances de vie des femmes et des hommes par pays en 2020.

**2.** On s'intéresse dans un premier temps à la série des espérances de vie des hommes qui est triée par ordre croissant dans la feuille de calcul.

**a)** Le **premier quartile** de cette série, noté $Q_1$, est 65,767.
Déterminer le pays auquel cette valeur correspond puis déterminer la proportion de pays dans lesquels les hommes ont une espérance de vie inférieure ou égale à 65,767.

**b)** Le **troisième quartile** de cette série, noté $Q_3$, est 75,984.
Déterminer le pays auquel cette valeur correspond puis déterminer la proportion de pays dans lesquels les hommes ont une espérance de vie inférieure ou égale à 75,984.

**c)** Proposer une définition du premier et du troisième quartiles d'une série statistique.

**3. a)** Sélectionner la plage de données A2:C200 puis faire un tri croissant par rapport à la colonne C (onglet **Données** puis **Trier** puis choisir la bonne colonne).

**b)** Déterminer les premier et troisième quartiles $Q_1$ et $Q_3$ ainsi que la médiane méd de la série des espérances de vie des femmes.

**c)** Sans la calculer, déterminer la proportion approximative des pays dans lesquels les femmes ont une espérance de vie dans $[Q_1 ; \text{méd}]$. Dans $[\text{méd} ; Q_3]$.

**d)** Vérifier les résultats de la question **3. c)** par le calcul.

↪ Cours 4 p. 320

# 1 Moyenne

## Propriété Moyenne

**On considère une série statistique de $p$ valeurs distinctes $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'effectifs respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_p$ ou de fréquences respectives $f_1, f_2, \ldots, f_p$ donnée dans les tableaux suivants.**

| Valeur | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_p$ |
|---|---|---|---|---|
| Effectif | $n_1$ | $n_2$ | $\cdots$ | $n_p$ |

ou

| Valeur | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_p$ |
|---|---|---|---|---|
| Fréquence | $f_1$ | $f_2$ | $\cdots$ | $f_p$ |

**La moyenne $m$ de cette série est :**

- **avec les effectifs :** $m = \dfrac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \ldots + n_p \times x_p}{n}$ **où** $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$ **est l'effectif total.**
- **avec les fréquences :** $m = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \ldots + f_p \times x_p$.

### Exemple

Audrey compte le nombre de places assises disponibles sur 20 trajets de train et obtient les résultats ci-contre.

| Valeur | 0 | 1 | 2 | 5 | 6 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 5 | 1 | 3 | 1 | 5 | 4 | 1 |

Le nombre moyen de places assises disponibles sur ces $n = 20$ trajets est : $\dfrac{5 \times 0 + 1 \times 1 + 3 \times 2 + 1 \times 5 + 5 \times 6 + 4 \times 7 + 1 \times 10}{20} = 4$.

**Remarque** La série de l'exemple est constituée de 20 valeurs qui peuvent s'écrire :

0 0 0 0 0 1 2 2 2 5 6 6 6 6 6 7 7 7 7 10.

La formule dit simplement que, pour calculer la moyenne de cette série, plutôt que d'effectuer l'opération $\dfrac{0+0+0+0+0+1+2+2+2+\ldots+10}{20}$, on peut simplifier le numérateur en constatant qu'il est égal à $5 \times 0 + 1 \times 1 + 3 \times 2 + 1 \times 5 + 5 \times 6 + 4 \times 7 + 1 \times 10$.

## Définition Moyenne pondérée

**On considère une série statistique constituée de $p$ valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ affectées de $p$ coefficients (ou poids) $c_1, c_2, \ldots, c_p$.**

**La moyenne pondérée de cette série est :** $m = \dfrac{c_1 \times x_1 + c_2 \times x_2 + \ldots + c_p \times x_p}{c_1 + c_2 + \ldots + c_p}$.

### Exemple

Ce trimestre, Émilia a eu quatre contrôles de mathématiques (notés sur 20) de coefficients 1 ; 1,5 ; 4 et 0,5 auxquels elle a obtenu respectivement les notes 8 ; 9 ; 20 ; 5.

Sa moyenne en mathématiques est donc $m = \dfrac{1 \times 8 + 1{,}5 \times 9 + 4 \times 20 + 0{,}5 \times 5}{1 + 1{,}5 + 4 + 0{,}5} \approx 14{,}9$.

**Remarques**

La formule de la moyenne pondérée semble être la même que celle de la moyenne d'une série donnée sous forme de tableau d'effectifs mais les séries sont de natures différentes.

- **Cas d'un tableau d'effectifs.** La série est constituée de $n_1 + n_2 + \ldots + n_p$ valeurs, précisément : $\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{x_2, \ldots, x_2}_{n_2 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{x_p, \ldots, x_p}_{n_p \text{ fois}}$.
- **Cas des coefficients ou poids.** La série est constituée de $p$ valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ (éventuellement identiques) auxquelles on attribue un coefficient (ou un poids) $c_1, c_2, \ldots, c_p$ qui correspond à l'importance de la valeur : dans l'exemple précédent, la série des notes d'Émilia n'est constituée que de quatre valeurs et non pas $1 + 1{,}5 + 4 + 0{,}5 = 7$. Cependant, chacune de ces valeurs compte plus ou moins selon son coefficient. C'est parce que sa meilleure note, 20, compte beaucoup (coefficient 4 sur 7) qu'elle a une bonne moyenne malgré trois autres notes sous la moyenne.

# Exercices résolus

## Méthode 1 Calculer une moyenne à partir d'effectifs

**Énoncé**

**Le tableau suivant donne les températures maximales relevées à Rennes durant le mois de novembre 2022.**

| **Température** (en °C) | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Nombre de relevés** | 1 | 1 | 2 | 3 | 7 | 6 | 1 | 7 | 2 |

**Déterminer la température maximale moyenne à Rennes en novembre 2022.**

**Solution**

Les températures correspondent aux valeurs et les nombres de relevés aux effectifs. 1

On calcule $\frac{1\times 10+1\times 11+\ldots+7\times 17+2\times 18}{1+1+2+3+7+6+1+7+2}\approx 14{,}8$ 2

La température maximale moyenne à Rennes en novembre 2022 est donc d'environ 14,8 °C.

**Conseils & Méthodes**

1 Dans un tableau d'effectifs, on repère les valeurs et les effectifs. Pour cela, on peut se demander comment écrire la série sans effectif, ici : 10 ; 11 ; 12 ; 12 ; 13 ; 13 ; 13 ; etc.

2 On applique la formule du cours en faisant attention à bien respecter les priorités de calculs dans la calculatrice.

### À vous de jouer !

**1** Dans un lycée général et technologique, la répartition du nombre d'élèves par classe est donnée par le tableau suivant.

| **Nombre d'élèves** | 16 | 24 | 27 | 28 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Nombre de classes** | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 |

| **Nombre d'élèves** | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Nombre de classes** | 2 | 3 | 6 | 2 | 4 |

Calculer le nombre moyen d'élèves par classe dans ce lycée.

**2** On considère la série suivante donnant le nombre de jours de congés payés annuels par pays de l'Union européenne.

| **Nombre de jours de congés payés** | 20 | 22 | 24 | 25 | 28 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Nombre de pays** | 17 | 2 | 2 | 5 | 1 |

Calculer le nombre moyen de jours de congés payés dans les pays de l'Union européenne.

↪ Exercices 40 à 43 p. 324

## Méthode 2 Calculer une moyenne pondérée

**Énoncé**

**En 2022, une personne a consommé 28,3 m³ d'eau froide à 3,50 € le m³ et 11,6 m³ d'eau chaude à 7,40 € le m³. Déterminer le prix moyen du m³ d'eau pondéré par chaque consommation.**

**Solution**

Les valeurs sont les prix 3,50 et 7,40 et leurs coefficients respectifs les consommations 28,3 et 11,6. 1

On calcule $\frac{28{,}3\times 3{,}50+11{,}6\times 7{,}40}{28{,}3+11{,}6}\approx 4{,}60$.

Le prix moyen du m³ d'eau est d'environ 4,60 €.

**Conseils & Méthodes**

1 On repère les valeurs et les coefficients.

2 On applique la formule du cours en faisant attention à bien respecter les priorités de calculs dans la calculatrice

### À vous de jouer !

**3** Bachir s'est préparé un accompagnement riz/lentilles aux proportions respectives 2 tiers/1 tiers.
Le riz coûte 2,15 € le kg et les lentilles 3,30 € le kg.
Déterminer le prix moyen au kg du riz et des lentilles pondérés par leurs proportions respectives.

**4** Najat a obtenu :

• 14,5 coefficient 2 • 17 coefficient 1 • 12 coefficient 0,5 à ses contrôles de Français du trimestre.
Calculer sa moyenne trimestrielle en Français.

↪ Exercices 44 à 49 p. 325

## 2 Linéarité de la moyenne

**Propriété** **Linéarité de la moyenne**

**Soit deux nombres réels $a$ et $b$ et une série statistique $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de moyenne $m$.**

- **La série statistique $a \times x_1, a \times x_2, \ldots, a \times x_p$ a pour moyenne $a \times m$.**
- **La série statistique $x_1 + b, x_2 + b, \ldots, x_p + b$ a pour moyenne $m + b$.**
- **La série statistique $a \times x_1 + b, a \times x_2 + b, \ldots, a \times x_p + b$ a pour moyenne $a \times m + b$.**

**Exemples**

• Un commerçant achète des articles dont le prix moyen est de 22 €. Il les revend en multipliant les prix par 1,5 pour avoir un bénéfice.
On est dans le premier point de la propriété où les prix à l'achat sont les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ dont la moyenne est $m = 22$ et $a = 1{,}5$. La moyenne des prix de vente est donc $1{,}5 \times 22 = 33$ €.

• Dans un autre magasin, le prix moyen d'un article est de 43 €. Pour liquider son stock, le gérant décide de baisser les prix de tous les articles de 5 €.
On est dans le deuxième point de la propriété où les prix sont les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ dont la moyenne est $m = 43$ et $b = -5$. La moyenne des prix soldés est donc $43 + (-5) = 43 - 5 = 38$ €.

**Remarque** Le dernier point de la propriété dit que l'on peut enchaîner les deux opérations.

## 3 Écart-type

**Définition** **Écart-type**

**L'écart-type $s$ d'une série statistique est un indicateur de dispersion de cette série statistique autour de la moyenne. Concrètement il donne une certaine mesure de l'écart entre les valeurs de la série et la moyenne de celle-ci :**

- **plus l'écart-type $s$ d'une série est petit, plus les valeurs de la série sont concentrées autour de la moyenne, donc plus la série est homogène.**
- **plus l'écart-type $s$ d'une série est grand, plus les valeurs de la série sont éloignées de la moyenne, donc moins la série est homogène.**

**Remarques**

• Nous utiliserons principalement la calculatrice pour déterminer l'écart-type mais il existe des formules pour le calculer. ↪ TP 1 p. 336

• Pour la série $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de moyenne $m$, l'écart-type est :

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + \ldots + (x_n - m)^2}{n}}$$

• Pour la série donnée dans le tableau ci-contre de moyenne $m$ et d'effectif total $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$, l'écart-type est :

$$s = \sqrt{\frac{n_1 \times (x_1 - m)^2 + n_2 \times (x_2 - m)^2 + \ldots + n_p \times (x_p - m)^2}{n}}.$$

| Valeur | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_p$ |
|---|---|---|---|---|
| Effectif | $n_1$ | $n_2$ | ... | $n_p$ |

• Plus le diagramme en barres représentant une série statistique est « resserré », plus l'écart-type est petit.

• Les valeurs éloignées de la moyenne ont de l'influence sur l'écart-type. Plus précisément, elles le font augmenter.

• On peut utiliser le couple (moyenne, écart-type) pour résumer une série et en comparer plusieurs.

# Exercices résolus

## Méthode 3 Utiliser la linéarité de la moyenne

### Énoncé

**Dans une entreprise, le budget « photocopies » mensuel des différents services est en moyenne de 120 €. La direction décide d'abord de diviser par 2 les budgets « photocopies » mais celui-ci n'étant plus suffisant, elle décide d'ajouter 10 € à chaque budget. Quel est le budget « photocopies » moyen après ces deux évolutions ?**

### Solution

Les budgets des différents services sont tous divisés par 2, c'est-à-dire multipliés par $\frac{1}{2} = 0{,}5$ puis augmentés de 10. (1)
Par linéarité de la moyenne, il en va de même pour la moyenne qui est donc de $0{,}5 \times 120 + 10 = 70$ €. (2)

**Conseils & Méthodes**

(1) Identifier les multiplications ou les additions effectuées sur les valeurs.
(2) Appliquer ces opérations à la moyenne.

### À vous de jouer !

**5** La moyenne d'une série est 5. Toutes les valeurs sont alors multipliées par 7 puis on leur soustrait 3.
Quelle est la moyenne des valeurs ainsi obtenues ?

**6** En utilisant la linéarité de la moyenne, calculer de tête la moyenne de 3 504 ; 3 501 et 3 507.

↪ Exercices 50 à 56 p. 325

## Méthode 4 Utiliser l'écart-type

### Énoncé

**On considère deux entreprises de 10 employés dans lesquelles le salaire moyen est 3 000 € :**
- **l'entreprise 1 dans laquelle 5 employés gagnent 2 500 € et 5 employés gagnent 3 500 € par mois.**
- **l'entreprise 2 dans laquelle 9 employés gagnent 1 200 € et 1 employé gagne 19 200 € par mois.**

**1. Déterminer les écarts-types des séries des salaires de chacune de ces deux entreprises.**
**2. Interpréter la différence entre ces deux écarts-types dans les termes de l'énoncé.**

### Solution

1. En utilisant la calculatrice, on trouve un écart-type de 500 € pour les salaires de l'entreprise 1 et de 5 400 € pour les salaires de l'entreprise 2. (1)
**Remarque :** on peut aussi utiliser la formule. Par exemple, pour l'entreprise 1, $m = 3\,000$ donc l'écart-type est $\sqrt{\frac{5(2\,500 - 3\,000)^2 + 5(3\,500 - 3\,000)^2}{10}} = 500$.

**Conseils & Méthodes**

(1) On calcule les écarts-types avec la calculatrice ↪ TP 1 p. 336.
(2) Un écart-type moins élevé indique une série plus homogène.

2. On constate que l'écart-type des salaires de l'entreprise 1 est beaucoup moins élevé (environ 11 fois moins) que celui de l'entreprise 2 : cela indique que la grille des salaires est plus homogène autour du salaire moyen dans l'entreprise 1. (2)
Les employés de l'entreprise 1 ont globalement des salaires assez proches du salaire moyen, 3 000 €, alors que dans l'entreprise 2 les salaires sont assez éloignés de 3 000 €, soit plus bas soit plus haut.

### À vous de jouer !

**7** Le tableau suivant donne les temps (en minutes) des 5 entraînements hebdomadaires de Kaifu ces deux dernières semaines.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Semaine 1 | 22 | 33 | 35 | 25 | 12 |
| Semaine 2 | 25 | 25 | 26 | 23 | 27 |

1. Sans calcul, dire quelle semaine l'écart-type de la série des temps est le plus petit.
2. Vérifier en déterminant ces écart-types.

**8** La moyenne de deux classes est similaire : 12 sur 20. Cependant les écarts-types des notes y sont respectivement 1,2 et 5,4.
Décrire la différence entre ces deux classes.

↪ Exercices 63 à 66 p. 326

# 4 Quartiles et écart interquartile

## Définition Quartiles

**• Le 1er quartile $Q_1$ d'une série statistique est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25 % des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.**

**• Le 3e quartile $Q_3$ d'une série statistique est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75 % des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.**

**Exemple** On considère la série ordonnée de valeurs 1 3 7 8 10 11 12 12 58. On a alors :

Plus de 25 % des valeurs / Moins de 25 % des valeurs : $\overbrace{1-3-7}^{\text{Moins de 25 \% des valeurs}} - 8 - 10 - 11 - 12 - 12 - 58$ donc $Q_1 = \mathbf{7}$

Plus de 75 % des valeurs / Moins de 75 % des valeurs : $\overbrace{1-3-7-8-10-11-12}^{\text{Plus de 75 \% des valeurs}} - 12 - 58$ donc $Q_3 = \mathbf{12}$

## Propriété Quartiles

**Pour une série ordonnée d'effectif $n$, $Q_1$ (respectivement $Q_3$) est la $k$-ième valeur où $k$ est le plus petit entier supérieur ou égal à $0{,}25 \times n$ (respectivement $0{,}75 \times n$).**

**Exemples**

• Dans l'exemple précédent, l'effectif est $n = 9$.
Pour trouver $Q_3$, on calcule $0{,}75 \times n = 0{,}75 \times 9 = 6{,}75$ et le plus petit entier supérieur ou égal à 6,75 est 7.
$Q_3$ est donc la 7e valeur : on retrouve bien $Q_3 = 12$.

• On considère la série statistique ci-contre d'effectif $n = 40$.
Pour trouver $Q_1$, on calcule $0{,}25 \times n = 0{,}25 \times 40 = 10$ donc $Q_1$ est la 10e valeur, c'est-à-dire $Q_1 = 4$.

| Valeur | 1 | 4 | 7 | 8 | 10 | 12 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 3 | 9 | 8 | 3 | 4 | 6 | 7 |

## Propriété Médiane

**Pour une série ordonnée d'effectif $n$, la médiane est :**
**• la valeur de rang $\frac{n}{2} + 0{,}5$ si $n$ est impair. • la moyenne des valeurs de rang $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2} + 1$ si $n$ est pair.**

**Exemple** Dans l'exemple précédent :

• dans la première série, $n = 9$ est impair. $\frac{9}{2} + 0{,}5 = 5$ donc la médiane est la 5e valeur, c'est-à-dire 10.

• dans la deuxième série, $n = 40$ est pair. $\frac{40}{2} = 20$ et $\frac{40}{2} + 1 = 21$ donc la médiane est la moyenne des 20e et 21e valeurs, c'est-à-dire $\frac{7+8}{2} = 7{,}5$.

**Remarque** Pour une série statistique de valeur minimale $x_{\text{min}}$ et de valeur maximale $x_{\text{max}}$, chacun des intervalles $[x_{\text{min}} ; Q_1]$, $[Q_1 ;$ médiane$]$, $[$médiane$ ; Q_3]$ et $[Q_3 ; x_{\text{max}}]$ contient au moins 25 % des valeurs de la série (et environ 25 % si la série est de grand effectif et constituée essentiellement de valeurs différentes).

## Définition Écart interquartile

**L'écart interquartile d'une série statistique est $Q_3 - Q_1$. Il s'agit d'un indicateur de dispersion.**

**Remarques**

• Plus l'écart interquartile est petit, plus les valeurs de la série qui sont dans l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$ sont proches les unes des autres. Les valeurs en dehors de $[Q_1 ; Q_3]$ n'ont pas d'influence sur l'écart interquartile.

• On peut utiliser la médiane et les quartiles pour résumer une série et en comparer plusieurs.

# Exercices résolus

## Méthode 5 Calculer une médiane, les quartiles et l'écart interquartile

### Énoncé

**On considère une série statistique donnée par le tableau suivant.**

| Valeur | 10 | 12 | 14 | 15 | 18 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 17 | 16 | 23 | 25 | 22 | 11 |

**1. Calculer la médiane de cette série.**
**2. Calculer les quartiles puis l'écart interquartile de cette série.**

### Solution

On dresse le tableau des effectifs cumulés croissants (ECC) qui donne le nombre de valeurs inférieures ou égales à chaque valeur du tableau. (1)

| Valeur | 10 | 12 | 14 | 15 | 18 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 17 | 16 | 23 | 25 | 22 | 11 |
| ECC | 17 | 33 | 56 | 81 | 103 | 114 |

Par exemple, le nombre de valeurs inférieures ou égales à 10 est 17,
le nombre de valeurs inférieures ou égales à 12 est 17 + 16 = 33,
le nombre de valeurs inférieures ou égales à 14 est 17 + 16 + 23
ou plus simplement 33 + 23 = 56, etc.

**1.** L'effectif total est $n = 114$ (2) qui est pair. On a $\frac{114}{2} = 57$ et $\frac{114}{2} + 1 = 58$ donc la médiane est la moyenne des 57e et 58e valeurs. (3)

D'après les ECC, de la 57e à la 81e valeur, ce sont des 15 (4) donc $\frac{15+15}{2} = 15$.

**2.** • $0{,}25 \times 114 = 28{,}5$ donc $Q_1$ est la 29e valeur : $Q_1 = 12$. (4)

• $0{,}75 \times 114 = 85{,}5$ donc $Q_3$ est la 86e valeur : $Q_3 = 18$. (4)

L'écart interquartile est donc $Q_3 - Q_1 = 18 - 12 = 6$. (5)

**Conseils & Méthodes**

1. On calcule les effectifs cumulés croissants.
2. On lit l'effectif total $n$ dans la dernière colonne des ECC.
3. Selon si $n$ est pair ou impair, on applique la bonne définition de la médiane.
4. On utilise le tableau des ECC pour trouver la valeur de rang cherché.
5. L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1$.

### À vous de jouer !

**9** Reprendre les questions de la **méthode 5** avec :

| Valeur | 2 | 10 | 15 | 47 | 72 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 51 | 13 | 14 | 9 | 2 |

**10** Reprendre les questions de la **méthode 5** avec :

| Valeur | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 2 | 4 | 5 | 11 | 2 |

↪ Exercices 67 à 71 p. 326

## Méthode 6 Comparer deux séries avec la médiane et les quartiles

### Énoncé

**On donne le tableau résumant les temps d'entraînement d'un coureur sur 400 m sur deux mois. Comparer ces temps sur ces deux mois.**

| | $Q_1$ | Médiane | $Q_3$ |
|---|---|---|---|
| Mois 1 | 52 | 55 | 58 |
| Mois 2 | 50 | 52 | 54 |

### Solution

On constate que le premier quartile du 1er mois est égal à la médiane du 2e mois : 52. Cela veut dire qu'il court en 52 s ou moins environ 25 % des courses le 1er mois et environ 50 % des courses le 2e mois : cela indique une amélioration des résultats (on peut aussi comparer les mêmes indicateurs deux à deux). (1) L'écart interquartile est passé de 6 à 4 donc le coureur a aussi progressé en régularité. (2)

**Conseils & Méthodes**

1. On compare quartiles et médiane des deux séries et on interprète en termes de proportions des valeurs.
2. Un écart interquartile plus faible indique une série plus homogène.

### À vous de jouer !

**11** Clara a noté dans le tableau ci-contre le nombre de pages lues par jour dans deux livres.
Interpréter ces résultats.

| | $Q_1$ | Médiane | $Q_3$ |
|---|---|---|---|
| Livre 1 | 20 | 22 | 35 |
| Livre 2 | 12 | 20 | 22 |

**12** Sur deux années, l'écart interquartile de la série des nombres de clients quotidiens dans un magasin a été divisé par 2. Peut-on affirmer que ce magasin a moins de clients la deuxième année ?

↪ Exercices 72 à 74 p. 327

# Exercices résolution de problèmes

## J'apprends à vérifier un résultat

**Réflexe 1**
Vérifier que la solution n'est pas aberrante.

**Réflexe 2**
Vérifier que la solution est cohérente avec le problème posé.

**Réflexe 3**
Si cela est possible, faire une vérification numérique.

### Énoncé

On considère ci-dessous une série statistique donnant les temps en minutes des élèves ayant participé au CROSS de leur lycée.

| Valeur | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 1 | 4 | 5 | $e$ | 12 | 15 | 10 | 11 | 5 | 3 |

On sait que le temps moyen à ce cross est de 29,625 minutes.

**Quelle est la valeur de $e$ ?**

**a)** –5 ? **b)** 8 ? **c)** 22 ? **d)** 29 625 ?

### Solution

**Étape 1** Je constate que la réponse –5 n'est pas adaptée car je cherche un effectif.
Or un effectif ne peut pas être négatif, j'exclus donc cette valeur aberrante. **Réflexe 1**

Un effectif peut éventuellement être de 29 625 mais cela est incohérent avec le contexte puisqu'il n'y a pas de lycée ayant autant d'élèves, j'exclus donc cette valeur incohérente avec l'énoncé. **Réflexe 2**

**Étape 2** Je peux :

- soit modéliser la situation par une équation d'inconnue $e$ (↪ Résolution de problèmes p. 80 et 217) mais dans ce cas, il n'aura servi à rien d'exclure –5 et 29 625.
- soit tester l'une des deux solutions restantes en choisissant celle qui entraîne des calculs plus simples ou un calcul d'ordre de grandeur.

Ici, je choisis 8, le plus petit nombre, mais comme j'utiliserai la calculatrice ce n'est pas essentiel.

*Brouillon*

$\dfrac{1\times 25 + 4\times 26 + 5\times 27 + \mathbf{8}\times 28 + \ldots}{1+4+5+\mathbf{8}+\ldots} \approx 29{,}93$

qui est différent de 29,625. **Réflexe 3**

8 n'est donc pas la bonne réponse : cette bonne réponse est donc 22. Je peux éventuellement vérifier que 22 convient de la même manière que j'ai testé 8 mais ce n'est pas utile.

**Remarque** On ne se laisse pas tromper par une éventuelle logique des effectifs 1 – 4 – 5 – ? – 12 qui n'a pas de raison objective d'être vérifiée.

*Réponse rédigée*

La bonne réponse est la réponse **c**.
22 élèves ont réalisé leur CROSS en 28 minutes.

## Je m'entraîne à vérifier un résultat

### 13 Vérifier la moyenne

En voulant calculer la taille moyenne de ses crayons de couleurs, Philippe a trouvé 500 cm.
Que peut-on en penser ?

### 14 Vérifier une médiane et des quartiles

Sacha travaille sur la série des espérances de vie dans les 27 pays de l'Union Européenne. Il a trouvé :

- $Q_1 = 7$,
- médiane = 81,6,
- $Q_3 = 78$.

Quelle(s) erreur(s) peut-on lui signaler ?

### 15 Répondre à un QCM

On considère la série suivante donnant les températures moyennes, en degrés Celsius, dans une ville française les 5 premiers jours de février :

1 –5 $x$ 7 3

Pour laquelle de ces valeurs possibles de $x$ l'écart-type de la série est-il approximativement de 4,27 ?

**a)** –1
**b)** 6
**c)** 32
**d)** 1 573

# Exercices automatismes

## Rituel 1

### Effectuer mentalement des calculs simples

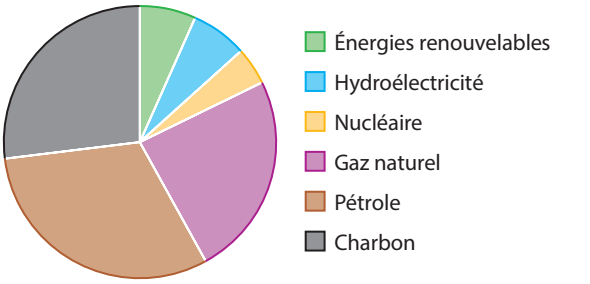
**16** Calculer $\dfrac{12+8+15+25}{4}$.

**17** Calculer $44 \times 0{,}25$.

### Utiliser un ordre de grandeur

**18** En 2021, la consommation mondiale en énergie est donnée par le graphique suivant.

**Consommation mondiale en énergie primaire : 165 417 TWh**




(*Source :* Connaissances des énergies, *BP Statistical Review on World Energy*, juin 2022)

Donner la consommation approximative de gaz naturel.

### Appliquer un pourcentage de baisse

**19** Un club de sport comptait 120 adhérents. Son nombre d'adhérents a diminué de 10 %, quel est son nouvel effectif ?

## Rituel 3

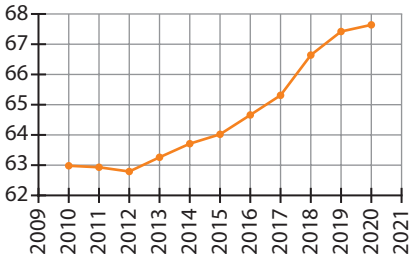
### Effectuer mentalement des calculs simples

**24** Calculer $20 \times 0{,}75$.

**25** Calculer $\dfrac{19{,}2+4{,}8}{2}$

### Préciser sur un graphique les grandeurs et les unités

**26** Le graphique suivant donne l'évolution de la population active (en millions) au Japon entre 2010 et 2020.




(*Source :* Statista, 2023)

Quelles sont les grandeurs représentées sur chaque axe ?

## Rituel 2

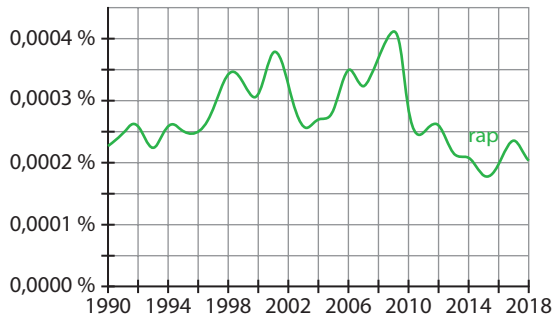
### Effectuer mentalement des calculs simples

**20** Dans une série d'effectif 120, on a 40 valeurs négatives. Quelle proportion des valeurs cela représente-t-il en % ?

**21** Calculer $\dfrac{53}{2}+0{,}5$.

### Estimer graphiquement un seuil ou une valeur atteinte

On donne ci-dessous la fréquence du mot « rap » dans un grand échantillon de livres numérisés en français de 1990 à 2019.



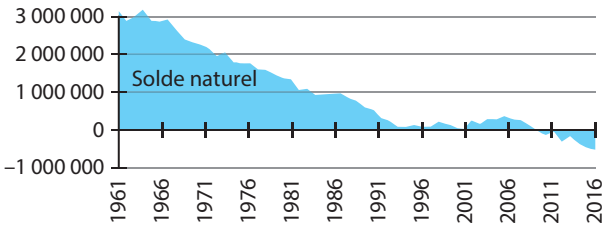

**22** Quelle est l'année où le mot « rap » a été le plus fréquent ?

**23** Entre 2002 et 2006, quelles ont été les fréquences maximale et minimale du mot « rap » ?

## Rituel 4

### Estimer graphiquement un seuil

**27** On donne ci-dessous le solde naturel des pays de l'Union Européenne.
En quelle décennie le solde naturel est-il passé sous les deux millions pour la première fois ?




(*Source* : *Eurostat* © L'INSTITUT PARIS REGION 2021)

### Appliquer un pourcentage de hausse

**28** La cote d'une action a augmenté de 100 % alors qu'elle était au départ de 55 €. Quelle est sa nouvelle cote ?

### Utiliser un ordre de grandeur

**29** Donner une valeur approchée de $401 \times 199$ sans calculatrice.

↪ Travaillez les méthodes des automatismes p. 8

# Exercices d'entraînement

## Je consolide mes acquis

### 30 Médiane et moyenne

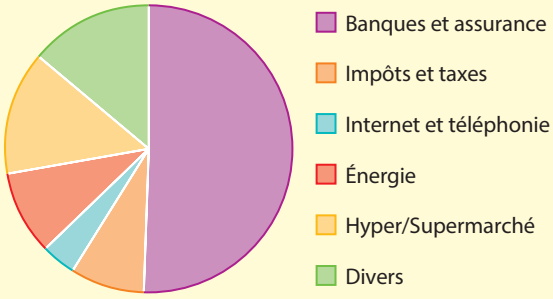
On a comparé les prix d'un smartphone sur un comparateur de prix sur Internet. Les différents prix obtenus (en euro, arrondis à l'euro) sont les suivants :

773 773 780 798 798 810 817
829 829 829 842 867 884 899

Le prix moyen est-il plus grand que le prix médian ?

### 31 Diagramme circulaire

Sur son application bancaire, les dépenses de Grace le mois dernier sont données par le diagramme circulaire suivant.




**1.** Sachant que Grace a dépensé au total 2 178 €, estimer la proportion de ses dépenses consacrée à l'énergie.

**2.** Ce mois-ci, elle a fini de rembourser l'emprunt de son logement de sorte que le poste de dépense « Banque et assurance » a beaucoup diminué.
Ses dépenses sont données par le tableau suivant.
Tracer le diagramme circulaire associé à ses dépenses ce mois-ci.

| | |
|---|---|
| **Banque et assurance** | 258 € |
| **Impôts et taxes** | 173 € |
| **Internet et téléphonie** | 84 € |
| **Énergie** | 205 € |
| **Hyper/Supermarché** | 347 € |
| **Divers** | 412 € |

### 32 Interprétation de données

En 2020, le PIB par habitant est de 57 600 € en Île-de-France et le PIB par habitant en France est de 34 100 € en France.
Cela veut-il dire que les habitants d'Île-de-France sont globalement plus riches que l'ensemble des habitants de France ?

### 33 Scratch

Écrire un programme Scratch demandant successivement deux valeurs et calculant leur moyenne.

## Questions de cours

**34** Donner la formule permettant de calculer la moyenne de quatre valeurs, $x_1$, $x_2$, $x_3$ et $x_4$ pondérées par les coefficients respectifs $c_1$, $c_2$, $c_3$ et $c_4$.

**35** Que peut-on dire de la moyenne d'une série de valeurs si on les multiplie toutes par 1,2 ?

**36** Que permettent de comparer les écarts-types de deux séries statistiques de même nature ?

**37** Pour une série ordonnée d'effectif $n$ impair, quel est le rang de la valeur médiane ?

**38** Donner la définition de l'écart interquartile.

**39** Quelle proportion approximative des valeurs d'une série statistique est dans l'intervalle [médiane ; $Q_3$] ?

## Moyenne avec effectifs

Méthode 1 p. 317

**40** Un service de streaming vidéo a mené une enquête portant sur 812 comptes répartis selon leur nombre d'utilisateurs. Les résultats sont donnés ci-dessous.

| **Nombre d'utilisateurs** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Effectif** | 299 | 162 | 130 | 122 | 99 |

Calculer le nombre moyen d'utilisateurs par compte.

**41** Une ville compte 3 159 logements.
La répartition du nombre d'habitants par logement est donnée par le tableau suivant.

| **Nombre d'habitants** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Nombre de logements** | 249 | 1 062 | 973 | 388 | 324 | 117 | 46 |

Calculer le nombre moyen d'habitants par logement dans cette ville.

**42** La durée moyenne, en minutes, des films sortis la semaine du 5 octobre 2022 est donnée par le tableau suivant.

| **Durée** | [50 ; 60[ | [80 ; 110[ | [110 ; 180[ | [200 ; 210[ |
|---|---|---|---|---|
| **Nombre de films** | 2 | 9 | 5 | 1 |

Calculer la durée moyenne de ces films à l'aide des informations de l'énoncé.

**Coup de pouce** On considérera que c'est la moyenne des centres des classes (les « milieux » des intervalles, par exemple 55 pour [50 ; 60]).

**43** Dans une salle d'escape game, deux jeux sont proposés à des tarifs différents par groupe selon le jeu et le jour (le tarif est réduit hors week-end et vacances scolaires).

• **1er jeu :** le tarif réduit est de 115 €, il est choisi par 18 % des groupes, et le plein tarif est de 130 €, il est choisi par 25 % des groupes.
• **2e jeu :** le tarif réduit est de 205 €, il est choisi par 24 % des groupes, et le plein tarif est de 220 €, il est choisi par 33 % des groupes.
Quel est le prix moyen payé par groupe ?

## Moyenne pondérée

Méthode 2 p. 317

**44** Calculer la moyenne pondérée des valeurs 12 ; 25 ; 5 et 12 affectées des coefficients respectifs 3 ; 1,5 ; 2 et 7.

**45** Pour le Brevet, la note de contrôle continu est coefficient 20, les notes des épreuves de Mathématiques, Français et Oral sont coefficients 5 et les notes des épreuves de Sciences et Technologie et Histoire-Géographie/EMC sont coefficients 2,5.
Calculer la moyenne au Brevet d'une élève ayant obtenu 16,3 ; 15,5 ; 18 ; 20 ; 16,5 et 18 à ces épreuves respectives.

**46** Manu et Aga ont acheté un terrain en Vendée comprenant une partie de 500 $m^2$ non constructible à 7 € du $m^2$ et une partie de 120,5 $m^2$ constructible à 191 € du $m^2$.
**1.** Calculer la moyenne des prix au $m^2$, constructible ou non, pondérés par leur surface.
**2.** À quoi correspond concrètement la moyenne pondérée calculée à la question **1** ?

**47** Un fournisseur d'électricité propose un tarif heures creuses/heures pleines : 0,147 € par kWh en heures creuses et 0,184 1 € par kWh en heures pleines.
**1.** Une famille a calculé que 40 % de sa consommation se fait en heures creuses et 60 % en heures pleines.
Calculer le prix moyen du kWh pour cette famille.
**2.** Ce fournisseur d'électricité propose un autre tarif dit « de base » où tout kWh coûte 0,174 €.
Par ailleurs, pour le tarif de base, il faut payer un abonnement annuel de 169,89 € et, pour le tarif heures creuses/heures pleines, il faut payer un abonnement de 183,63 €.
À partir de combien de kWh consommés cette famille est-elle gagnante avec le tarif heures creuses/heures pleines ?

**48** Écrire un programme en langage **Python** qui demande à l'utilisateur deux valeurs et deux coefficients et qui calcule et affiche la moyenne de ces deux valeurs pondérées par ces deux coefficients.

**49** On considère la série statistique suivante.

| **Valeur** | 5 | 12 | 15 | $x$ |
|---|---|---|---|---|
| **Coefficient** | 1,5 | 4 | 2 | $c$ |

**1.** Si $c = 5$, quelle doit être la valeur de $x$ pour que la moyenne pondérée de la série soit 22 ?
**2.** Si $x = 36$, quel doit être le coefficient $c$ pour que la moyenne pondérée de la série soit 20,625 ?

## Linéarité de la moyenne

Méthode 3 p. 319

**50** Oral **1.** Calculer de tête la moyenne de : 9 ; 8 ; 3 et 4.
**2.** En déduire sans calcul la moyenne de :
**a)** 9 000 ; 8 000 ; 3 000 et 4 000. **b)** 59 ; 58 ; 53 et 54.

**51** Oral Calculer de tête la moyenne de :
**a)** 837 ; 813 et 810. **b)** 15 000 ; 12 000 ; 1 000 et 4 000.

**52** Dans une entreprise, le salaire mensuel moyen est de 2 102 €. L'entreprise annonce qu'elle va verser une prime de 150 € à tous ses employés le mois prochain.
Quel sera alors le revenu moyen (salaire plus prime) des employés de cette entreprise ?

**53** La veille des soldes, Esteban a repéré un certain nombre d'articles dans une boutique dont l'achat lui reviendrait en moyenne à 35,40 euros par article
**1.** Si la boutique solde tous ses articles à –50 % :
**a)** par combien seront multipliés tous les prix ?
**b)** quel sera le prix moyen d'un article repéré ?
**2.** Quel sera le prix moyen d'un article repéré si la boutique solde tous ses articles à –30 % ?

**54** Dans un supermarché, les personnes ayant la carte du magasin peuvent cagnotter une certaine somme d'argent en faisant leurs courses. En moyenne, les clients cagnottent 2,53 € par passage en caisse.
Pour faire la promotion du magasin, la gérante a décidé qu'aujourd'hui tous les clients bénéficieraient d'un bonus de 10 % sur la somme cagnottée. Quel sera alors le gain moyen cagnotté par passage en caisse ?

**55** Tous les termes d'une série statistique ont augmenté de $t$ % de sorte que sa moyenne est passée de 15,4 à 20,02.
Déterminer $t$.

**56** Oral Calculer de tête la moyenne de :
**a)** 407 ; 907 et 507. **b)** 8541 ; 9541 ; 541 ; 5541 et 3541.

# Exercices d'entraînement

## Détermination d'écart-type

**57** Calculer l'écart-type de chaque série.

**a)** 125 ; 36 ; 12 ; 5 ; 52 ; 64 ; 1

**b)**

| Valeurs | −5 | −2 | 1 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 3 | 4 | 15 | 1 | 9 |

**58** Les résultats d'une enquête portant sur 891 personnes auxquelles on a demandé : « Combien de fruits et légumes avez-vous mangé hier ? » sont donnés ci-dessous.

| Nbre de fruits et légumes | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 9 | 112 | 93 | 102 | 120 | 127 | 101 | 227 |

Calculer la moyenne et l'écart-type du nombre de fruits et légumes mangés la veille par ces 891 personnes.

**59** Le tableau ci-dessous donne le nombre de buts marqués par match en championnat par la handballeuse Pauletta Foppa lors de la saison 2021-2022. Sans utiliser les fonctions avancées de la calculatrice, calculer l'écart-type des buts marqués par match par Pauletta Foppa sur cette saison.

| Nombre de buts | 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de matchs | 1 | 4 | 2 | 5 | 3 | 4 | 1 |

**60** Les opérateurs téléphoniques doivent mettre à disposition de leurs clients une offre de service en langue des signes française. Le rapport du 3e trimestre 2022 de l'ARCEP donne les notes données à ce service par les utilisateurs.

| Note | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 1 239 | 384 | 1 135 | 3 182 | 21 909 |

1. Calculer la moyenne $m$ et l'écart-type $s$ des notes.
2. Quel pourcentage des notes se trouvent dans l'intervalle $[m - 2s ; m + 2s]$ ?

### 61 Vérifier un résultat

Pour un exercice de mathématiques, 15 élèves ont mesuré un même angle avec leur rapporteur. Les résultats sont donnés ci-dessus.

| Angle (en °) | 11 | 12 | 13 | 91 |
|---|---|---|---|---|
| Effectif | 4 | 5 | 5 | 1 |

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série.
2. Un des élèves propose de retirer une des valeurs qui lui paraît aberrante. Laquelle est-ce ?
3. Reprendre la question 1. avec la nouvelle série.
4. D'après 1. et 3., les valeurs extrêmes d'une série ont-elles de l'influence sur sa moyenne et son écart-type ?

Résolution de problèmes p. 188 et p. 322

**62** En utilisant la même méthode que pour la moyenne, calculer l'écart-type des séries données sous forme de classe à l'exercice 42 p. 324.

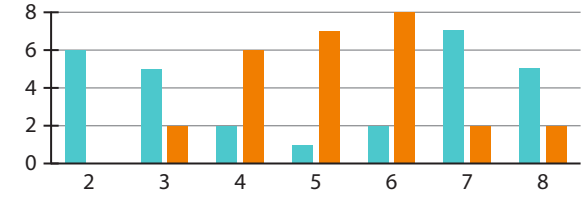
## Utiliser l'écart-type

Méthode 4 p. 319

**63** Oral Les températures moyennes dans les villes de Quimper et Grenoble sont relativement similaires mais le climat y est très différent : à Quimper, les températures sont relativement douces toute l'année, alors qu'à Grenoble il fait très froid l'hiver et très chaud l'été.
Laquelle de ces deux villes a le plus grand écart-type sur ses températures ?

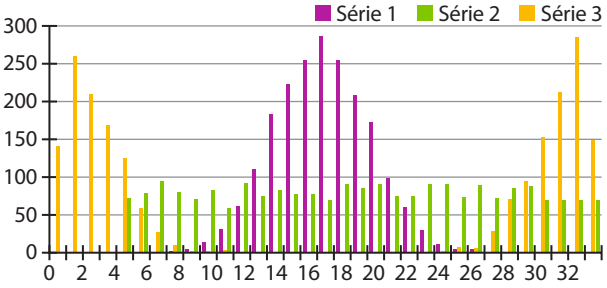
**64** Oral On a relevé chaque jour pendant un mois la cotation de deux actions.
Leur cotation moyenne sur ce mois est proche de 25 € pour toutes les deux. En revanche, la série des valeurs quotidienne de l'action n° 1 a un écart-type d'environ 5 € et celle de l'action n° 2 un écart-type d'environ 1 €.
Interpréter ces deux écarts-types.

**65** On donne ci-dessous les diagrammes en barres représentant deux séries de valeurs dont la moyenne est approximativement 5.




Comparer leurs écart-types.

**66** On donne ci-dessous les diagrammes en barres représentant trois séries de valeurs dont la moyenne est approximativement 16.




Comparer leurs écart-types $s_1$, $s_2$ et $s_3$.

## Déterminer médiane et quartiles

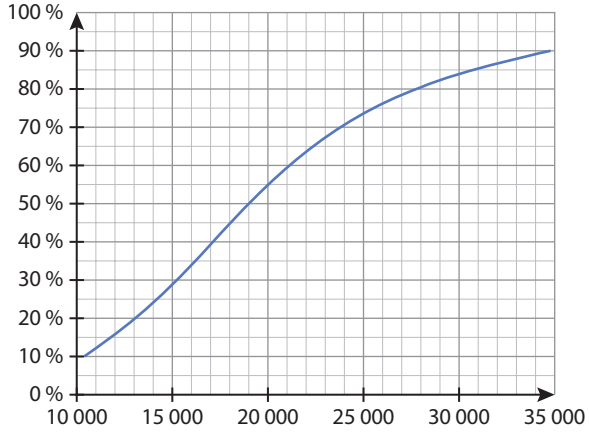
Méthode 5 p. 321

**67** Calculer la médiane, les quartiles et l'écart interquartile de la série de l'exercice 58.

**68** Calculer la médiane, les quartiles et l'écart interquartile de la série de l'exercice 59.

**69** Calculer la médiane, les quartiles et l'écart interquartile de la série de l'exercice 60.

**70** SES On donne ci-dessous la répartition des revenus en euros des personnes vivant seules en France en 2018.




(*Source :* INSEE, 2021)

**1.** Quelle proportion de ces personnes a un revenu annuel de 20 000 € ou moins ?
**2.** Déterminer la médiane et les quartiles de cette série et les interpréter concrètement.

**71 Analyser un problème pour le résoudre**
Déterminer une série de 20 valeurs dont la médiane est 12 et l'écart interquartile est 25.

↪ Résolution de problèmes p. 134 et p. 274

## Comparer avec la médiane et les quartiles

Méthode 6 p. 321

**72** On considère les séries statistiques des nombres de licences féminines et masculines dans les fédérations unisport olympiques en France en 2021.
Les minimum, maximum, quartiles et médiane sont donnés ci-dessous.

| | Licence féminine | Licence masculine |
|---|---|---|
| **Minimum** | 830 | 1 242 |
| **$Q_1$** | 11 634 | 18 553 |
| **Médiane** | 29 402 | 50 756 |
| **$Q_3$** | 113 705 | 154 139 |
| **Maximum** | 557 724 | 1 722 059 |

(*Source :* INJEP-MEDES)

**1.** Calculer et interpréter les écarts interquartiles des deux séries.
**2.** Quelle proportion approximative des fédérations ont :
**a)** un nombre de licenciées féminines compris entre 830 et 11 634 ?
**b)** un nombre de licenciés masculins compris entre 18 553 et 154 139 ?
**3.** Comparer ces deux séries à l'aide des indicateurs présents dans le tableau.

**73** Esprit critique Une étude menée en 2019 sur un échantillon de piscines communales s'est intéressée au coût de fonctionnement au m² des piscines selon qu'elles disposent d'un bassin intérieur ou extérieur.

Ces deux séries statistiques des coûts au m² en euros sont résumées dans le tableau suivant.

| | $Q_1$ | Médiane | $Q_3$ |
|---|---|---|---|
| **Bassin intérieur** | 1 208 | 1 517 | 1 884 |
| **Bassin extérieur** | 215 | 264 | 417 |

**1.** Quelle proportion approximative des piscines avec :
**a)** bassin intérieur ont un coût de fonctionnement au m² compris entre 1 208 € et 1 884 € ?
**b)** bassin extérieur ont un coût de fonctionnement au m² inférieur ou égal à 417 € ?
**2.** Comparer ces deux séries et donner des éléments pouvant expliquer vos conclusions.

**74** Développement durable Les autorités d'une île isolée ont décidé d'installer une éolienne. L'éolienne choisie fonctionne lorsque le vent atteint au moins 8 nœuds et il faut l'arrêter lorsque le vent atteint ou dépasse 48 nœuds.
**1.** Les autorités décident de mesurer pendant un mois la vitesse du vent, en nœuds, au sommet d'une montagne. Une mesure est effectuée chaque jour. Voici les résultats :

| Vitesse | 7 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Effectif** | 1 | 2 | 1 | 1 | 4 | 5 |

| Vitesse | 24 | 26 | 27 | 30 | 44 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Effectif** | 3 | 4 | 4 | 2 | 1 | 2 |

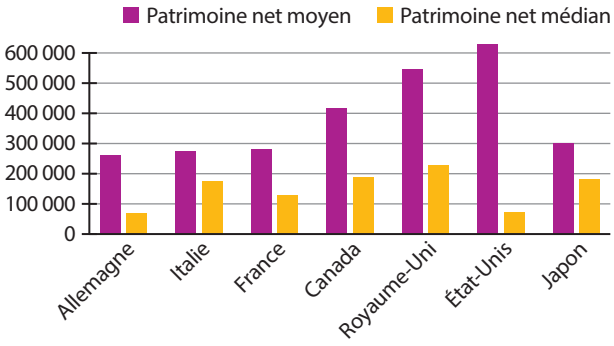
Par exemple, il y a 5 jours où la vitesse est de 22 nœuds.
**a)** Quelle proportion des jours de ce mois l'éolienne aurait-elle pu fonctionner ?
**b)** Déterminer la médiane et l'écart interquartile de cette série statistique.
**2.** Un emplacement sur une falaise a été également retenu. Le même mois, on y a mesuré les vitesses du vent et on a obtenu : $Q'_1 = 14$, médiane' $= 22$ et $Q'_3 = 34$.
Peut-on affirmer que la vitesse du vent est comprise entre 22 et 34 inclus au moins 50 % du temps ? Justifier.
**3.** Sachant qu'une éolienne a un rendement optimal aux alentours de 23 nœuds, quel site paraît le plus intéressant pour l'installation de l'éolienne ?

(*D'après Bac*)

## Comparaisons graphiques

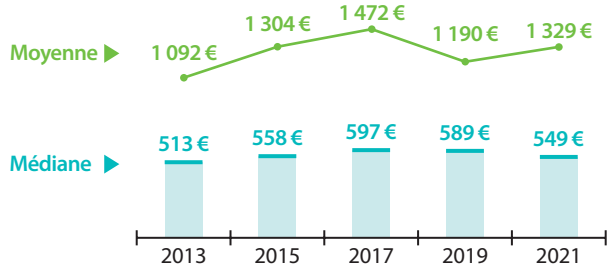
**75** SES Le diagramme en barres ci-dessous donne les patrimoines moyens et médians des ménages des pays du G7.

(*Source :* OCDE, 2021)




Que remarque-t-on sur le lien entre le patrimoine moyen et le patrimoine médian ? Que peut-on en déduire ?

**76** Le graphique ci-dessous donne les budgets moyens et médians en prestations d'entretien et d'aménagement des foyers faisant appel à des spécialistes du jardinage

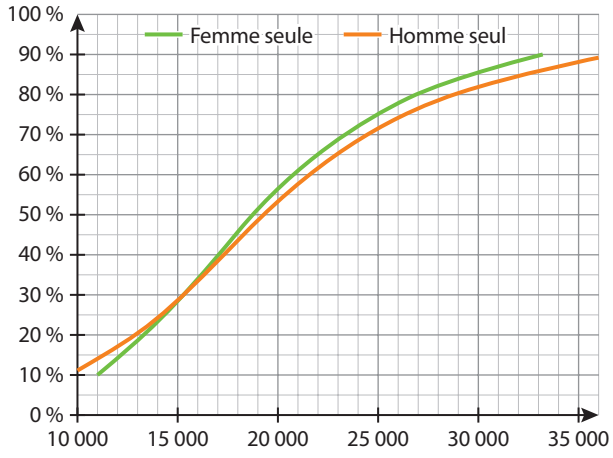



(*Source* : AgriMer)

Que remarque-t-on sur le lien entre le budget moyen et le budget médian ? Que peut-on en déduire ?

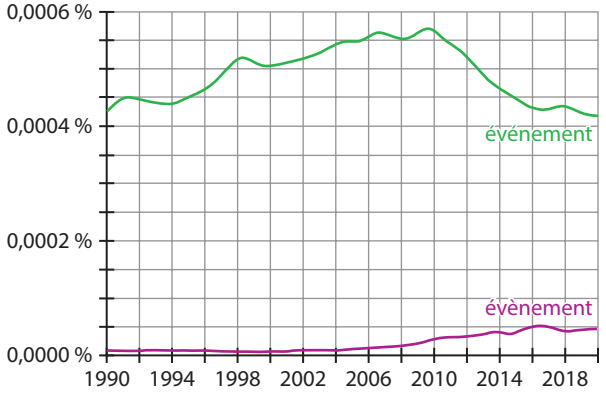
**77** SES On donne ci-dessous la répartition des revenus en euros des femmes et des hommes vivant seuls en France en 2018.

(*Source* : INSEE, 2021)




1. Déterminer les quartiles et médianes de ces deux séries.
2. Comparer ces deux séries.

**78** Français On considère ci-dessous un graphique donnant l'évolution de la fréquence des mots « événement » et « évènement » dans un grand échantillon de livres français entre 1990 et 2019.




1. Commenter les évolutions des fréquences de ces deux orthographes du même mot.
2. Faire une recherche documentaire sur ces deux orthographes permettant d'expliquer la réponse à la question 1.

**79** EMC On considère le tableau suivant donnant les participations au deuxième tour des élections présidentielles de 1981, 2002 et 2022.

| Année | 1981 | 2002 | 2022 |
|---|---|---|---|
| Abstention | 5 149 210 | 8 358 874 | 13 655 861 |
| Votes exprimés | 30 350 568 | 31 062 988 | 32 057 325 |
| Votes nuls | 898 984 | 1 769 307 | 805 249 |

1. Dresser les diagrammes circulaires représentant ces trois séries (utiliser la même couleur pour chaque catégorie sur chaque diagramme).
2. Que peut-on observer lorsque l'on compare ces trois diagrammes circulaires ?

**80** Développement durable Tableur On donne ci-dessous les sources de production de l'électricité les 20 décembre 2012 et 2022 en MW.

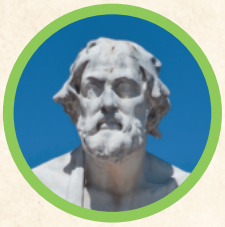
| | 20 décembre 2012 | 20 décembre 2022 |
|---|---|---|
| Fioul | 472 | 173 |
| Charbon | 4 548 | 420 |
| Gaz | 3 743 | 7 363 |
| Hydraulique | 12 215 | 6 594 |
| Nucléaire | 56 291 | 40 024 |
| Solaire | 320 | 1 786 |
| Éolien | 3 453 | 10 167 |
| Bioénergies | 689 | 792 |

(*Source :* RTE France)

1. **a)** Représenter la série des productions le 20 décembre 2012 à l'aide d'un diagramme circulaire.
On pourra utiliser un tableur.
**b)** Même question pour la série du 20 décembre 2022.
2. Commenter ces deux graphiques.
3. **a)** À l'aide des deux graphiques, quelle série semble avoir le plus grand écart-type ? Pourquoi ?
**b)** Vérifier en calculant ces écart-types.
4. Interpréter ces résultats.

## Études statistiques

**81** **Histoire des sciences**



Thucydide
(460 av. J.-C. –400 av. J.-C.)

L'historien Thucydide explique dans *La Guerre du Péloponnèse* ayant eu lieu en –428 av. J.-C. comment des habitants de la ville assiégée de Platée ont déterminé la taille des échelles à construire pour escalader la muraille ennemie :

« […] en dénombrant les rangées de briques sur la partie de la muraille qui leur faisait face […]. Plusieurs hommes à la fois comptaient les rangées et, en admettant que quelques-uns se trompassent, la plupart devaient trouver le nombre exact ; d'ailleurs ce calcul fut répété fréquemment. »

Thucydide, *La guerre du Péloponnèse*, trad. Louis Bodin, Jacqueline de Romilly, Raymond Weill©Les Belles Lettres, 1953-1972

Quel est l'indicateur retenu par les habitants de Platée pour trouver le bon nombre de briques ?

**82** Une entreprise fabrique des carreaux de ciment qu'elle conditionne par cartons de 25.
Sur les 120 derniers cartons envoyés, elle a reçu des plaintes (car beaucoup de carreaux étaient cassés) selon la répartition suivante.

| Nombre de carreaux cassés | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de cartons | 24 | 16 | 22 | 28 | 25 | 5 |

**1. a)** Déterminer le minimum, le maximum, la médiane, les quartiles et l'écart interquartile de cette série.
**b)** Sans calcul supplémentaire, peut-on affirmer qu'au moins 75 % des cartons contenaient 4 carreaux cassés ou plus ?
**2. a)** Déterminer la moyenne $m$ et l'écart-type $s$ de cette série.
**b)** Quelle proportion des valeurs de la série est dans l'intervalle $[m - 2s ; m + 2s]$ ?
**3.** Cette société a décidé de changer le type de cartons utilisé pour emballer ses carreaux.
Sur les 50 premiers cartons envoyés de ce nouveau type, la série du nombre de carreaux cassés par carton est résumée par les indications suivantes.
- $Q_1 = 3$,
- médiane = 4,
- $Q_3 = 5$,
- $m = 4{,}14$
- $s \approx 0{,}94$.

**a)** Ce changement de type de carton est-il efficace ?
**b)** Les nouveaux cartons coûtent 50 centimes de plus que les précédents et l'entreprise rembourse les carreaux cassés, à 60 centimes pièce.
Quel type de carton peut-on lui conseiller ?

**83** On donne ci-dessous le nombre moyen d'élèves par classe en école élémentaire dans les pays de l'Union européenne sur l'année 2019-2020 (les données pour la Belgique, l'Irlande, les Pays-Bas et le Luxembourg sont manquantes).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20,9 | 18,3 | 19,6 | 21,9 | 18,7 | 18,7 |
| 22,1 | 17 | 22 | 18,7 | 16,8 | 17,7 |
| 16,6 | 20,5 | 18,3 | 20,3 | 18,7 | 20,3 |

(*Source :* DEPP, l'Europe de l'éducation en chiffres.)

**1. a)** Déterminer le minimum, le maximum, les quartiles et la médiane de cette série.
**b)** En 2010, ces indicateurs étaient les suivants pour ces pays.

| Min | $Q_1$ | Médiane | $Q_3$ | Max |
|---|---|---|---|---|
| 15,3 | 17,9 | 18,8 | 20,1 | 22,7 |

(*Source :* OCDE, les données de la Suède ne sont pas disponibles)

Commenter l'évolution de ces données entre 2010 et 2020.
**c)** En 2010, la moyenne des nombres moyens d'élèves par classe dans ces pays était d'environ 19 et l'écart-type de 1,9. La moyenne et l'écart-type semblent-ils confirmer la réponse à la question précédente ?
**2.** On s'intéresse dans cette question au nombre moyen d'élèves par classe au collège dans ces pays sur les deux mêmes périodes dont on donne les indicateurs ci-dessous.

| | 2010 | 2019-2020 |
|---|---|---|
| Minimum | 16,8 | 16,7 |
| $Q_1$ | 20,3 | 19,5 |
| Médiane | 21,4 | 20,5 |
| $Q_3$ | 22,1 | 21,9 |
| Maximum | 24,7 | 25,6 |
| Moyenne | 21,3 | 20,8 |
| Écart-type | 2 | 2,3 |

L'évolution des nombres moyens d'élèves par classe en collège sur ces deux périodes est-elle similaire à celles des nombres moyens d'élèves en école élémentaire ?

**3.** Le tableau suivant donne les nombres moyens d'élèves par classe en France.

| | 2010 | 2019-2020 |
|---|---|---|
| École élémentaire | 22,7 | 22,1 |
| Collège | 24,5 | 25,6 |

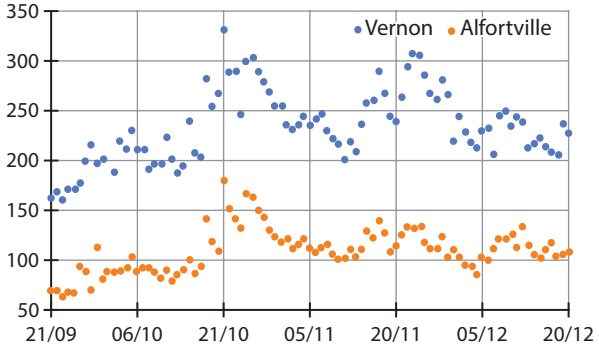
Le nombre moyen d'élèves par classe en France en école élémentaire et en collège a-t-il suivi la tendance européenne ?

**84** Esprit critique Pour les vacances, Tao a obtenu un job d'été dans un péage autoroutier.
Comme il s'ennuie, il relève pendant 10 minutes les numéros de départements sur les plaques d'immatriculation des voitures et il obtient :

| Numéro | 25 | 39 | 68 | 70 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 54 | 12 | 4 | 22 | 41 |

**1.** Calculer la moyenne de cette série et interpréter si possible son résultat.
**2.** Sa grande sœur Zia, étudiante en statistique, lui explique que le caractère qu'il étudie n'est pas vraiment quantitatif mais qu'il est plutôt qualitatif puisqu'on observe des numéros plutôt que des nombres et qu'on pourrait les remplacer par les noms des départements.
Représenter cette série par un diagramme adapté.

**85** Géographie Les courbes ci-dessous donnent les débits de la Seine en $m^3/s$ durant tout l'automne 2022 dans les stations hydrométriques d'Alfortville et de Vernon.




**1.** Dans laquelle ce ces deux villes :
**a)** le débit moyen est-il le plus élevé ?
**b)** le débit semble-t-il être le plus homogène ?
**2.** On rassemble les débits quotidiens en $m^3/s$ sur l'automne 2022 en classes.

| Débit à Alfortville | [50 ; 100[ | [100 ; 150[ | [150 ; 200[ |
|---|---|---|---|
| Nombre de jours | 28 | 58 | 5 |

| Débit à Vernon | [150 ; 200[ | [200 ; 250[ | [250 ; 300[ | [300 ; 350[ |
|---|---|---|---|---|
| Nombre de jours | 14 | 51 | 21 | 5 |

**a)** Calculer les moyennes et les écarts-types de ces deux séries en prenant les centres des classes comme valeurs puis contrôler vos résultats à la question **1**.
**b)** Donner un encadrement du 1er quartile de la série des débits quotidiens de la Seine à Vernon durant l'automne 2022.
**c)** Justifier que le débit de la Seine à Vernon a été supérieur à celui d'Alfortville au moins 75 % de l'automne 2022.
**4.** Comment expliquer que le débit de la Seine soit largement plus élevé à Alfortville qu'à Vernon ?

**Coup de pouce** Alfortville (ci-contre) se trouve juste avant Paris et Vernon un peu avant Rouen sur le parcours de la Seine.

## À chacun son rythme

**86** Chaque pays de l'Union européenne a déterminé l'âge moyen du départ du domicile parental des enfants en 2012 et 2021. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-contre.

| Âge | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif 2012 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 3 | 4 | 2 | 2 | 2 | 6 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Effectif 2021 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 4 | 2 | 1 | 5 | 2 | 0 | 1 | 1 |

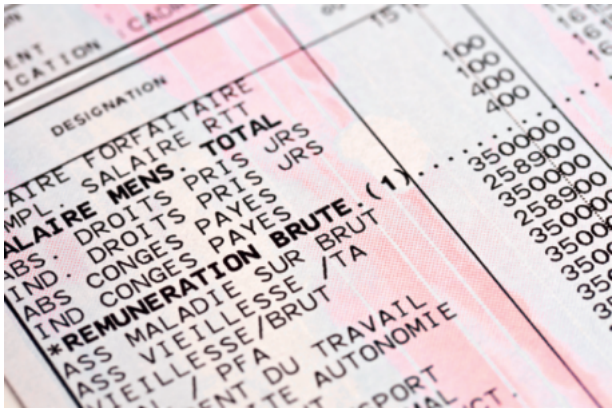
**Énoncé A**
**1. a)** Calculer la moyenne $m$ et l'écart-type $s$ de la série des âges de départ en 2012.
**b)** Quelle proportion des valeurs de la série de 2012 est dans l'intervalle $[m - 2s ; m + 2s]$ ?
**2.** Calculer la médiane et l'écart interquartile de la série des âges de départ en 2021.

**Énoncé B**
**1.** Calculer la médiane et l'écart interquartile de la série des âges de départ en 2012.
**2.** Sans calcul supplémentaire, peut-on affirmer :
**a)** qu'au moins la moitié des valeurs de la série de 2012 est dans l'intervalle [25 ; 29] ?
**b)** qu'au moins 75 % des valeurs de la série de 2012 sont supérieures ou égale à 29 ?

**Énoncé C**
Comparer les deux séries.

## 87 Moyenne, médiane, écart-type et quartiles

**Partie A ▶** Dans une entreprise, le salaire mensuel moyen est de 2 339,50 euros.




L'entreprise propose une augmentation généralisée du salaire de ses employés, selon deux modalités possibles :

- **modalité 1 :** tous les salaires augmentent de 10 %.
- **modalité 2 :** tous les salaires augmentent de 200 euros.

**1.** Déterminer quel serait le nouveau salaire mensuel moyen si la modalité 1 est choisie.

**2.** Même question avec la modalité 2.

**3.** L'entreprise réalise un vote auprès de ses employés pour savoir quelle modalité choisir.
À votre avis, quelle modalité va être choisie par les employés ?

**Partie B ▶** La répartition des salaires dans l'entreprise est la suivante.

| Salaire | 1 450 | 1 510 | 1 925 | 5 125 |
|---|---|---|---|---|
| Nombre d'employés | 15 | 10 | 15 | 10 |

**1.** Justifier que le salaire mensuel moyen est bien de 2 339,50 euros puis calculer l'écart-type associé.

**2.** Calculer la médiane, les quartiles $Q_1$ et $Q_3$ et l'écart interquartile de cette série des salaires dans l'entreprise.

**3.** De manière « très surprenante », le résultat du vote réalisé dans l'entreprise afin de choisir la modalité d'augmentation montre que les employés préfèrent la modalité 2.
Expliquer pourquoi.

## 88 Moyenne pondérée et écart-type

On considère l'évolution de la cote d'une cryptomonnaie sur six jours.

| Numéro du Jour | Cote (en euros) |
|---|---|
| 1 | 17 761 |
| 2 | 17 840 |
| 3 | 17 349 |
| 4 | 16 755 |
| 5 | 16 389 |
| 6 | 16 874 |

**1.** Dans un repère, tracer les points donnant l'évolution de la cote de cette cryptomonnaie.
Graduer l'axe des ordonnées à partir de 16 300 euros en prenant 1 cm pour 200 euros.

**2.** Plutôt que de prendre les valeurs brutes, les analystes financiers utilisent parfois la moyenne mobile sur les trois dernières cotes en pondérant la cote du jour par 3, celle de la veille par 2 et celle de l'avant-veille par 1.

**a)** Peut-on calculer la moyenne mobile les deux premiers jours ? Pourquoi ?

**b)** Justifier que la moyenne mobile le troisième jour est environ 17 581 euros.

**c)** Calculer les moyennes mobiles des trois jours suivants.

**d)** Les moyennes mobiles les jours 1 et 2 sont 17 457 et 17 701 (obtenues à partir des cotes des jours précédents, non présentes dans le tableau). Sur le graphique précédent, tracer d'une autre couleur les points donnant l'évolution de la moyenne mobile de la cote de cette action entre les jours 1 et 6.

**3. a)** De la série des cotes ou de la série des moyennes mobiles, dire sans aucun calcul laquelle a le plus petit écart-type.

**b)** Vérifier à l'aide de la calculatrice.

**4.** Quel est l'intérêt d'utiliser la moyenne mobile plutôt que la cote ?

## 89 Comparaison de séries

Sur une plate-forme de location de logements, un appartement a obtenu les notations suivantes.

| Nombre d'étoiles | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de clients | 5 | 32 | 65 | 23 | 2 |

**1.** Déterminer la moyenne et l'écart-type de cette série.

**2. a)** Déterminer la médiane, les quartiles et l'écart interquartile de cette série.

**b)** Sans calcul, peut-on affirmer qu'au moins 75 % des clients ont donné une note inférieure ou égale à 3 étoiles ? Justifier.

**3.** Représenter cette série statistique par un diagramme en bâtons dont les hauteurs des barres sont les fréquences des valeurs.

**4.** Les propriétaires de l'appartement y ont fait faire des travaux d'aménagement. Depuis les travaux, le logement a obtenu les notations suivantes.

| Nombre d'étoiles | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de clients | 2 | 5 | 9 | 22 | 10 |

**a)** Représenter cette série sur le diagramme en barres précédent.

**b)** Que peut-on en déduire graphiquement en termes d'homogénéité et de qualité des notes ?

**c)** Confirmer la réponse à l'aide de calculs.

## 90 Moyenne et médiane

Déterminer une série d'effectif 100 dont la moyenne est 30 et la médiane 25.

# Exercices d'approfondissement

## 91 Moyenne des sous-groupes

**1.** On considère deux séries statistiques $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_p$ de moyennes respectives $\overline{x}$ et $\overline{y}$.
Justifier que la moyenne de la série $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p$ (c'est-à-dire la série constituée de toutes les valeurs des deux séries de départ) est $\dfrac{n\overline{x} + p\overline{y}}{n+p}$.

**2.** Dans une course à pied, 51 concurrents sont inscrits en tant que professionnels et 1 026 en tant qu'amateurs.
Le temps moyen pour les professionnels est de 21 minutes contre 52 minutes pour les amateurs.
Calculer le temps moyen mis par les participants à cette course.

## 92 Notation somme

La notation $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ utilisée plusieurs fois dans ce chapitre n'étant pas très rigoureuse, on définit :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

qui se lit : « somme pour $i$ allant de 1 à $n$ des $x_i$ ».

**1.** Écrire $x_5 + x_6 + \ldots + x_{10}$ à l'aide de cette notation.

**2.** Écrire $\sum_{i=1}^{8} x_{2i+1}$ en faisant apparaitre tous ses termes.

**3.** Même question pour $\sum_{i=1}^{10} i^2$.

## 93 Une autre formule

Montrer que la formule $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}$ donne également l'écart-type de la série des $x_1, x_2, \ldots x_n$.

## 94 Décomposer un problème en sous problèmes

Python

On considère le programme en langage **Python** suivant.

```
n = input("Saisir effectif : ")
n = int(n)
print("Votre série doit être triée !")
x = input("Saisir 1re valeur : ")
x = float(x)
i=1
while i<n/4:
    x = input("Saisir valeur : ")
    x = float(x)
    i = i + 1
print(x)
```

**1.** Que fait-ce programme ?
**2.** Le modifier pour qu'il affiche le 3e quartile d'une série ordonnée rentrée par l'utilisateur.
**3.** Le modifier pour qu'il affiche la médiane d'une série ordonnée rentrée par l'utilisateur.

**Coup de pouce** L'instruction `p%2` donne le reste de la division euclidienne de $p$ par 2.

↪ Résolution de problèmes p. 31

## 95 Linéarité de l'écart-type ?

Démo

**1.** Quand on ajoute le même nombre $a$ à toutes les valeurs d'une série statistique d'écart-type $s$, l'écart-type de la nouvelle série est-il $s + a$ ?
**2.** Démontrer qu'il n'est pas modifié.

# Vers la 1re

## 96 Vers la Spécialité Maths

Lorsque l'on réalise une expérience aléatoire dont les issues sont des nombres, on dit que l'espérance associée à cette expérience aléatoire est la moyenne des issues, pondérée par leurs probabilités.
Calculer l'espérance associée à chacune des expériences aléatoires suivantes.
**a)** On lance un dé à 6 faces non truqué : on gagne 10 euros si le résultat est 6 et on perd 2 euros autrement : le résultat de l'expérience est le gain algébrique (qui peut être négatif) réalisé.
**b)** On joue 10 euros à quitte ou double sur le noir à la roulette et on considère le gain algébrique (on rappelle que dans une roulette standard, il y a 18 cases rouges, 18 cases noires et 1 case verte, le 0).
**c)** Lorsque l'on va prendre le bus, on attend 1 ; 2 ; 3 ou 4 minutes avec les probabilités respectives 0,2 ; 0,35 ; 0,15 et 0,3 : on considère le temps passé à attendre le bus.

## 97 Vers STL

Lorsque l'on réalise $n$ fois une mesure expérimentalement (avec $n \geqslant 10$), il y a environ « 95 % de chance » que la quantité mesurée soit dans l'intervalle $\left[m - 2\dfrac{s}{\sqrt{n-1}} ; m + 2\dfrac{s}{\sqrt{n-1}}\right]$ où $m$ est la moyenne des mesures réalisées et $s$ l'écart-type associé.
Les élèves d'une classe ont mesuré le pH d'une même solution et les résultats de leurs mesures sont donnés ci-dessous :
2,98 ; 2,86 ; 3,04 ; 2,94 ; 3,02 ; 2,88 ; 3,08 ; 3,09 ; 2,85 ; 3,07 ; 2,83 ; 3,1 ; 3,06 ; 2,89 ; 3,1 ; 2,82 ; 3,13 ; 3,07 ; 2,95 ; 2,92.
Dans quel intervalle est-on « sûr à 95 % » que se trouve le pH de la solution ?

Objectif
## 1 Calculer une moyenne

### Moyenne et effectifs

- La moyenne d'une série de $p$ valeurs $x_i$ d'effectifs respectifs $n_i$ est :

$$m = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \ldots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}$$

### Moyenne pondérée

- La moyenne pondérée d'une série de $p$ valeurs $x_i$ affectées de coefficients $c_i$ est :

$$m = \frac{c_1 \times x_1 + c_2 \times x_2 + \ldots + c_p \times x_p}{c_1 + c_2 + \ldots + c_p}$$

### Linéarité de la moyenne

- Pour une série $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de moyenne $m$, la moyenne de la série $a \times x_1 + b, a \times x_2 + b, \ldots, a \times x_p + b$ est : $a \times m + b$.

Objectif
## 2 Déterminer un écart-type

### Écart-type

- L'écart-type de la série $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de moyenne $m$, est : $s = \sqrt{\frac{(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + \ldots + (x_n - m)^2}{n}}$.
- L'écart-type de la série de moyenne $m$ et d'effectif total $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$ est :

$$s = \sqrt{\frac{n_1 \times (x_1 - m)^2 + n_2 \times (x_2 - m)^2 + \ldots + n_p \times (x_p - m)^2}{n}}$$

- On peut également l'obtenir à l'aide de la calculatrice ↪ TP 1 p. 336.

Objectif
## 3 Utiliser la médiane et les quartiles

### Calculs de la médiane et des quartiles

Soit une série statistique ordonnée de $n$ valeurs. Pour trouver la médiane et les quartiles, on dresse généralement le tableau des effectifs cumulés croissants, on détermine ensuite la médiane et les quartiles à l'aide des définitions suivantes :

- $Q_1$ est la $k$-ième valeur où $k$ est le plus petit entier supérieur ou égal à $0{,}25 \times n$.
- La médiane est la valeur de rang $\frac{n}{2} + 0{,}5$ si $n$ est impair ; la médiane est la moyenne des valeurs de rang $\frac{n}{2}$ et $\frac{n+1}{2}$ si $n$ est pair.
- $Q_3$ est la $k$-ième valeur où $k$ est le plus petit entier supérieur ou égal à $0{,}75 \times n$.
- L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1$.

### Interprétation de la médiane et des quartiles

Pour une série statistique de valeur minimale $x_{\text{min}}$ et de valeur maximale $x_{\text{max}}$, chacun des intervalles $[x_{\text{min}} ; Q_1]$, $[Q_1 ;$ médiane$]$, [médiane ; $Q_3]$ et $[Q_3 ; x_{\text{max}}]$ contient au moins 25 % des valeurs de la série (et environ 25 % si la série est de grand effectif et constituée essentiellement de valeurs différentes).

Objectif
## 4 Comparer deux séries statistiques

### Interpréter un graphique

- Sur un graphique, représentant des évolutions, on peut comparer les augmentations, baisses, stagnation, changements de tendance, etc.

### Interpréter l'écart-type

- Plus l'écart-type $s$ d'une série est petit, plus les valeurs de la série sont concentrées autour de la moyenne, donc plus la série est homogène.
- Plus l'écart-type $s$ d'une série est grand, plus les valeurs de la série sont éloignées de la moyenne, donc moins la série est homogène.

### Interpréter l'écart interquartile

- Plus l'écart interquartile d'une série est petit, plus les valeurs centrales de cette série, celles de l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$, sont globalement proches de la médiane.
- Plus l'écart interquartile d'une série est grand, plus les valeurs centrales de cette série, celles de l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$, sont globalement éloignées de la médiane.

QCM INTERACTIF
Tester ses connaissances
www.lienmini.fr/8270-37

## QCM Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Objectif 1

### Calculer une moyenne

**Un restaurant a relevé son nombre de clients par soir pendant deux mois. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-contre (série 1) :**

| Nombre de clients | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de soirs | 7 | 9 | 4 | 3 | 8 | 6 | 7 | 5 | 4 | 8 |

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **98** L'effectif de cette série est : | 8 | 10 | 61 | 135 |
| **99** La moyenne de cette série est : | ≈ 13,4 | 13,5 | ≈ 6,1 | Autre réponse. |
| **100** Si deux clients de plus s'étaient présentés chaque jour : | La moyenne aurait augmenté de 2. | L'effectif aurait augmenté de 2. | La moyenne serait inchangée. | L'effectif serait inchangé. |

Objectif 2

### Déterminer un écart-type

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **101** L'écart-type de la série de l'objectif 1 est : | 818 | 11 514 | environ 3,01. | environ 2,99. |
| **102** Si trois clients de plus s'étaient présentés chaque jour, l'écart-type serait : | inchangé. | augmenté de 3. | augmenté de 9. | Autre réponse. |

Objectif 3

### Utiliser la médiane et les quartiles

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **103** La médiane de cette série est : | 13 | 13,5 | 14 | environ 13,4. |
| **104** L'écart interquartile de cette série est : | 5 | 6 | 10 | 16 |
| **105** Sans calcul, quelle proportion, au minimum, des valeurs de cette série est entre son minimum et son troisième quartile ? | 25 % | 50 % | 75 % | 100 % |

Objectif 4

### Comparer deux séries statistiques

**À la suite d'une campagne publicitaire dans un journal local, le nombre de clients observé par soir le mois suivant est donné dans le tableau ci-contre (série 2).**

| Nombre de clients | 10 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 17 | 18 | 20 | 21 | 45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de soirs | 1 | 5 | 2 | 1 | 4 | 2 | 4 | 6 | 3 | 1 | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **106** Par rapport à la série 1, l'écart interquartile de la série 2 : | a augmenté. | a diminué. | est resté constant. | a plus que doublé. |
| **107** Par rapport à la série 1, l'écart-type de la série 2 : | a augmenté. | a diminué. | est resté constant. | a plus que doublé. |
| **108** Par rapport à la série 1, la moyenne de la série 2 : | a augmenté. | a diminué. | est restée constante. | a augmenté de plus de 3. |
| **109** Par rapport à la série 1, la médiane de la série 2 : | a augmenté de 3. | a augmenté de 3,5. | a augmenté de 4. | est restée constante. |
| **110** Un client dépense en moyenne 35 € dans ce restaurant et la campagne a coûté 500 €. Au bout de combien de soirs la campagne sera-t-elle rentabilisée à ce rythme ? | 3 | 4 | 5 | 6 |

↪ Corrigés p. 390

# Préparer le contrôle — Je m'entraîne

## Parcours différenciés

| | Objectif 1 | Objectif 2 | Objectif 3 | Objectif 4 |
|---|---|---|---|---|
| Parcours A | 1 3 5 111 | 7 114 | 9 117 | 11 120 |
| Parcours B | 41 45 52 112 | 58 115 | 67 118 | 73 121 |
| Parcours C | 49 113 | 59 116 | 71 119 | 85 122 |

## Exercices

### Objectif 1 Calculer une moyenne

**111** Calculer la moyenne de 17 ; 25 et 11 pondérés respectivement par 1 ; 2,5 et 3.

**112** Sans calculatrice, déterminer la moyenne de 312 ; 712 ; 912 et 112.

**113** On considère les valeurs 5, 12 et 8 affectées respectivement des coefficients 2 ; 3 et $c$.
Trouver $c$ sachant que la moyenne pondérée de ces trois valeurs est 8,96.

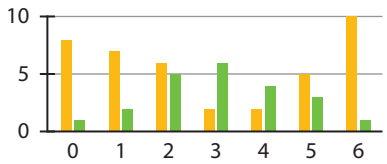
### Objectif 2 Déterminer un écart-type

**114** Sur un site marchand, on a cherché les prix des téléviseurs neufs de moins de 89 cm coûtant 250 € ou moins.
Ces prix en euros sont donnés ci-dessous.

| Prix | 180 | 200 | 210 | 230 | 250 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 4 | 4 | 2 | 2 | 3 |

Déterminer l'écart-type de ces prix à l'aide de la calculatrice.

**115** On donne ci-dessous les diagrammes en barres représentant deux séries statistiques (en vert et en jaune) de moyennes proches de 3.




L'une a un écart-type d'environ 2,3 et l'autre d'environ 1,5.
Associer chaque série à son écart-type.

**116** Retrouver le résultat de l'exercice **114** par le calcul.

### Objectif 3 Utiliser la médiane et les quartiles

**117** Les 40 élèves d'une école de tennis font une série de 10 services et on considère la série des nombres de services réussis.

| Valeur | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 5 | 4 | 6 | 3 | 7 | 6 | 5 | 4 |

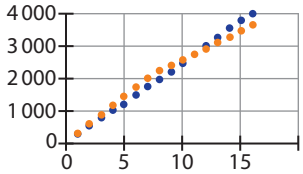
1. Calculer la médiane de cette série.
2. Déterminer les premier et troisième quartiles de cette série et en déduire son écart interquartile.

**118** En utilisant les résultats de l'exercice précédent et sans calculer de proportion, dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.
**a)** Au moins 50 % des élèves ont réussi entre 5 et 9 services.
**b)** Au moins 25 % des élèves ont réussi 6 services ou plus.

**119** Créer une série d'effectif 8 de médiane 12, de troisième quartile 15 et d'écart interquartile 10.

### Objectif 4 Comparer deux séries statistiques

**120** À chaque minute d'une course, on a relevé la distance totale parcourue, en mètres, par deux coureurs.




Comparer la stratégie des deux coureurs.

**121** Deux magazines vendent en moyenne environ 2200 magazines par mois avec des écart-types respectifs de 123 et 612 magazines vendus par mois.
Comparer leurs « types » de ventes.

**122** On reprend l'énoncé de l'exercice **117** dans lequel $Q_1 = 3$, médiane $= 5$ et $Q_3 = 6$. Après 3 mois d'entraînement supplémentaires, les résultats sont donnés ci-contre.

| Valeur | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 9 | 7 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 13 |

Le groupe est-il devenu globalement plus performant ? plus homogène ?

↪ Corrigés p. 390

# 1 Calculatrice, moyenne et écart-type

Soit la série ci-contre donnant les prix d'un même smartphone sur différents sites marchands.
On souhaite déterminer la moyenne de cette série à l'aide de la calculatrice.

| **Valeur** (en euros) | 499,90 | 517,90 | 600 |
|---|---|---|---|
| **Effectif** | 3 | 4 | 1 |

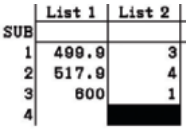
## Casio Graph 90+E

Appuyer sur la touche MENU.
Choisir le menu **Statistique**.

Si la liste List1 (resp. List2) n'est pas vide, se déplacer sur List1 (resp. List2) avec les flèches, puis appuyer sur F6 pour obtenir le choix de menu suivant.

Puis choisir **DEL-ALL** avec F4 et sélectionner **oui** avec F1.

Compléter les colonnes List1 (pour les valeurs) et List2 (pour les effectifs).



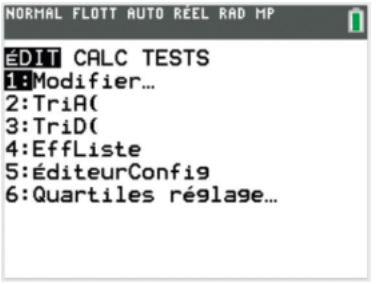

Appuyer deux fois sur F6 puis accéder au menu CALC.
Sélectionner **SET** et compléter les deux premières lignes comme ci-dessous.

```
1Var XList   :List1
1Var Freq    :List2
```

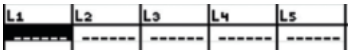
Pour inscrire List1 dans 1Var XList, appuyer sur F1 puis 1 et valider ; pour inscrire List2 dans 1Var Freq, appuyer sur F2 puis 2 et valider.
**S'il n'y a pas d'effectif, on règle 1 Var Freq sur 1.**
On vient ainsi de dire à la calculatrice que List1 contient les valeurs et List2 les effectifs.

## TI-83 Premium CE

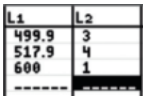
Appuyer sur la touche stats.



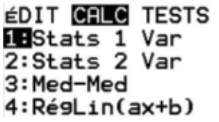

Puis choisir 1 : Modifier.




Si les listes L1 et L2 ne sont pas vides, se déplacer sur L1 et L2 avec les flèches puis appuyer sur annul puis entrer.
Compléter les colonnes L1 (pour les valeurs) et L2 (pour les effectifs).




Appuyer sur la touche stats puis accéder au menu CALC (avec la flèche de droite) et choisir 1 : Stats 1 Var.




Compléter comme ci-dessous. S'il n'y a pas d'effectif, **on laisse** ListeFréq **vide (avec** suppr**)**.

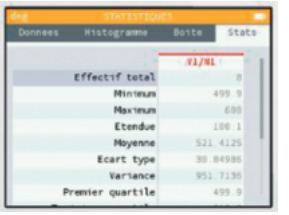
On vient de dire à la calculatrice que $L_1$ contient les valeurs et $L_2$ les effectifs.

## Numworks

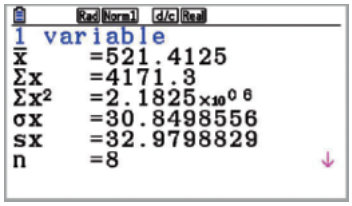
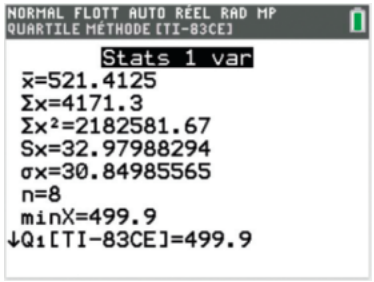
Appuyer sur la touche home.
Choisir le menu **Statistiques**.
Avec les flèches, se déplacer sur **Données** et valider avec EXE.

Si les listes ne sont pas vides, on se place sur la première case de la colonne **Valeurs** et on supprime les valeurs une à une en appuyant sur la touche clear.
Compléter les colonnes des valeurs et effectifs.

Avec les flèches, se déplacer sur **Stats** et valider avec EXE.




On peut lire directement la moyenne et l'écart-type.

| Casio Graph 90+E | TI-83 Premium CE |
|---|---|
| Appuyer sur EXIT puis choisir **1-Var** avec F1. | Puis aller sur calculer et valider. |
|  |  |
| La moyenne est la première valeur $\overline{x}$ et l'écart-type est la quatrième valeur $\sigma x$. | La moyenne est la première valeur $\overline{x}$ et l'écart-type est la cinquième valeur $\sigma x$. |

Dans ce cas :
- la moyenne est environ égale à 521.
- l'écart-type est environ égal à 31.

**Remarque** On peut remplacer les effectifs par des coefficients pour calculer des moyennes pondérés.

Python — 50 min — Calculer

## 2 Calcul de la moyenne et de l'écart-type

L'écart-type de $n$ valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est donné par la formule $\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2}$
(↪ Exercice 94 p. 332).

**1.** En utilisant cette formule, calculer l'écart-type de la série formée des trois valeurs 2 ; 12 et 15.
Dans la suite, on va écrire une fonction admettant un paramètre `n` (égal au nombre de valeurs) et calculant la moyenne et l'écart-type de ces valeurs. Le début du principe de son fonctionnement est le suivant :
- on introduit deux variables `somme1` et `somme2` initialisées à 0 en début de fonction ;
- la fonction va demander $n$ fois consécutivement à l'utilisateur de saisir une valeur de la série ;
- à chaque nouvelle valeur $x_i$ saisie, la fonction va l'ajouter à `somme1` (de sorte qu'après $n$ valeurs saisies `somme1` soit égale à $0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$) et la fonction va ajouter $x_i^2$ à `somme2` (de sorte qu'après $n$ valeurs saisies `somme2` soit égale à $0 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$).

**2.** Programmer le début de la fonction décrite ci-dessus. On pourra s'appuyer sur l'ébauche de fonction ci-contre.

```
import math
def calcul_moyenne_ecarttype(…) :
    somme1=…
    somme2=…
    for i in range(1,…+1) :
        x= float(input("nouvelle valeur ?"))
        somme1=…
        somme2=…
```

**3. a)** Exprimer la moyenne de la série en utilisant des variables de cette fonction en fin de boucle `for`.
**b)** Même question pour l'écart-type.

**4.** Terminer d'écrire la fonction de sorte qu'elle affecte la moyenne à une variable `m` et l'écart-type à une variable `s` puis qu'elle les affiche (en précisant laquelle est la moyenne et laquelle est l'écart-type).

**5.** Tester la fonction avec la série donnée dans la question **1**.

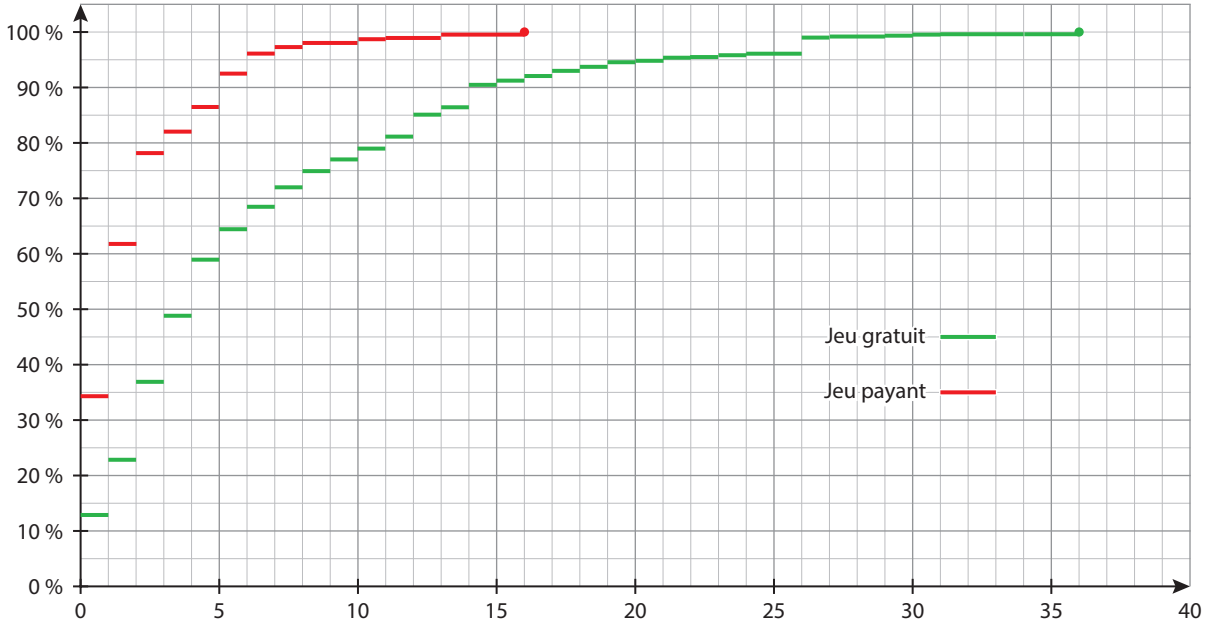
**6.** Tester la fonction avec une autre série de valeurs réelles ou simulées et comparer les résultats à ceux donnés par la calculatrice ↪ TP 1 p. 336.

**7.** Compléter la fonction :
- pour qu'elle redemande à l'utilisateur de saisir les $n$ valeurs.
- pour qu'elle vérifie pour chacune d'entre elles si elle est dans l'intervalle $[m - 2s ; m + 2s]$, c'est-à-dire si elle est supérieure ou égale à $m - 2s$ et (*and*) inférieure ou égale à $m + 2s$.
- pour qu'elle compte dans une variable `compteur_intervalle` le nombre de valeurs qui vérifient cette condition.
- pour qu'elle calcule puis affiche le pourcentage des valeurs dans $[m - 2s ; m + 2s]$.

TICE 30 min Représenter Communiquer

## 3 Des applis et des traceurs

Dans une étude, des chercheurs ont comparé le nombre de traceurs présents dans 6 355 jeux mobiles gratuits et 396 jeux mobiles payants. Cela leur a permis de dresser le graphique suivant.




(*Source* : Pierre Laperdrix, Naif Mehanna, Antonin Durey, Walter Rudametkin *The Price to Play: a Privacy Analysis of Free and Paid Games in the Android Ecosystem*, ACM Web Conference 2022, ©ACM, avril 2022, Lyon, France)

### A ▸ Compréhension du graphique

**1. a)** L'étude précise que 13,21 % des jeux gratuits n'ont pas de traceur. Sur quelle partie du graphique peut-on lire cette information ?
**b)** Préciser les légendes des deux axes.

**2.** De la même manière, dire sur quelle partie du graphique on peut lire la proportion des jeux gratuits qui ont 3 traceurs ou moins. Donner ensuite cette proportion.

**3.** Proposer un titre à ce graphique.

**4.** Déterminer quelle proportion :
**a)** des jeux gratuits ont 5 traceurs ou moins.
**b)** des jeux gratuits ont 12 traceurs ou moins.
**c)** des jeux payants ont 0 traceur.
**c)** des jeux payants ont 7 traceurs ou moins.

### B ▸ Analyse des résultats

**1.** Déterminer les quartiles et la médiane de la série du nombre de traceurs dans les jeux gratuits.

**2.** Même question pour les jeux payants.

**3.** Comparer ces indicateurs et interpréter les résultats.

**4.** Quelle particularité du graphique permettait d'anticiper ces comparaisons des quartiles et médianes ?

**5.** Pour aller plus loin Le jeu payant qui a le plus de traceurs en possède 16. Quelle proportion des jeux gratuits ont plus de traceurs que lui ?

TICE 45 min Calculer Communiquer

# 4 Trouver le meilleur joueur

Lors de la saison de NBA le championnat de basket américain 2021-2022, les deux basketteurs Joël Embiid et Nikola Jovic étaient à la lutte pour le titre de MVP (*Most Valuable Player*), récompensant le meilleur joueur de la saison.
Le but de ce TP est d'étudier l'attribution de ce titre du point de vue des trois catégories statistiques les plus importantes au basket-ball : les points, les passes décisives et les rebonds.

## A ▸ Comparaison des points marqués

**1.** Télécharger le fichier tableur contenant les nombres de points marqués, passes décisives délivrées et rebonds obtenus par match par ces deux joueurs lors de cette saison.
Les valeurs ont été triées par ordre croissant.

**TABLEUR**
**Statistiques de Joël Embiid et Nikola Jovic**
www.lienmini.fr/8270-tab3

**2. a)** Combien de points Embiid a-t-il marqué au minimum lors d'un match ? au maximum ?
**b)** Déterminer le nombre de matchs auquel Embiid a participé.
**c)** En déduire les quartiles et la médiane du nombre de points marqués par match par Embiid lors de cette saison.

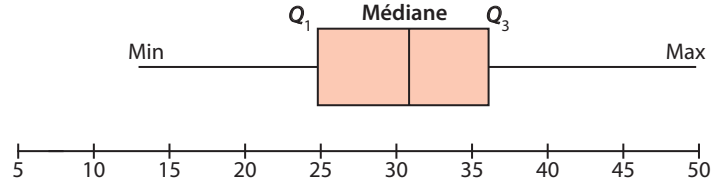
**3. a)** Dans la cellule J3, saisir `=MIN(B3:B70)`. À quoi correspond cette valeur ?
**b)** Compléter la cellule J7 de la même manière.
**c)** Compléter les cellules J4, J5 et J6.

**Coup de pouce** Pour obtenir la médiane, la syntaxe est `=MEDIANE(PLAGE DE DONNEES)` et pour obtenir un quartile, la syntaxe est `=QUARTILE(PLAGE DE DONNEES;1 ou 3)` selon que l'on souhaite le 1er ou 3e quartile.

**d)** Les valeurs trouvées aux questions **2. c)** et **3. c)** sont-elles similaires ? Sont-elles significativement différentes ?

**4. a)** Compléter les cellules K3 à K7 de la feuille de calcul.

**5.** On a tracé ci-dessous le **diagramme en boîte** correspondant à la série des points marqués par match parJoël Embiid.




**a)** Recopier ce diagramme en boîte et compléter le graphique en traçant au-dessus le diagramme en boîte correspondant à la série des points marqués par match par Nikola Jovic.
**b)** Lequel des deux joueurs a-t-il été le meilleur marqueur lors de cette saison ?
Comment cela se manifeste-t-il sur les diagrammes en boîte ?

## B ▸ Rebonds et passes décisives

**1.** En utilisant le fichier, dresser :
**a)** les diagrammes en boîte des séries des passes décisives délivrées par match par les deux joueurs.
**b)** les diagrammes en boîte des séries des rebonds obtenus par match par les deux joueurs.

**2.** Au vu de ces résultats statistiques, conjecturer lequel des deux joueurs à obtenu le titre de MVP lors de cette saison 2021-2022 ? Vérifier sur Internet.

**3.** **Pour aller plus loin** Les moyennes semblent-elles confirmer les interprétations faites à partir des médianes et quartiles ?

13

# Probabilités et échantillonnage

## Les maths au quotidien

Certaines situations comme des familles dans lesquelles tous les enfants ont le même sexe peuvent paraître surprenantes.
Les **probabilités** de naître fille ou garçon sont-elles réellement d'une sur deux ?
La modélisation des phénomènes aléatoires permet de proposer des explications à de telles situations.

# Pour prendre un bon départ

EXERCICES Sésamath
Réviser ses acquis
www.lienmini.fr/8270-s26

## 1 Calculer des fréquences

Vu au collège

Le tableau suivant présente le nombre de pots de peinture vendus en un mois selon la couleur.

| Couleur | Jaune | Blanc | Rouge | Bleu | Vert | Noir |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 256 | 7 489 | 458 | 156 | 785 | 4 123 |

**1.** Calculer les fréquences arrondies au centième.
**2.** Exprimer les fréquences en pourcentage arrondies à l'unité.

## 2 Calculer des pourcentages

Vu au collège

Dans une boulangerie, Mariette achète :
15 pains au chocolat, 12 tartelettes, 22 éclairs,
10 croissants, 8 pains aux raisins et 20 brioches.
**1.** Déterminer le pourcentage de viennoiseries parmi les achats.
**2.** Parmi les desserts, quelle est la proportion d'éclairs ?

## 3 Calculer des effectifs

Vu au collège

En 2022, 830 700 candidats se sont présentés à la série générale de l'examen du Diplôme National du Brevet.
87,5 % des candidats ont été reçus et 9 candidats sur 10 maîtrisaient le socle commun de compétences.
**1.** Combien de candidats ont été reçus ?
**2.** Combien de candidats ont la maîtrise du socle commun de compétences ?

## 4 Dénombrer

Vu au collège

**1.** Le code d'un cadenas est composé de trois chiffres.
Déterminer le nombre de codes possibles.
**2.** Le code d'entrée d'un immeuble est composé de quatre chiffres et d'une lettre. Déterminer le nombre de codes possibles.

## 5 Calculer des probabilités

Vu au collège

En week-end dans une station de ski, Guilhem se trouve en haut des pistes. Il a, en face de lui, deux pistes noires, deux pistes rouges et une piste bleue, qui arrivent toutes à un restaurant d'altitude. Bon skieur, il emprunte une piste au hasard.
**1.** Quelle est la probabilité que la piste empruntée soit une piste rouge ?
**2.** À partir du restaurant, 7 autres pistes mènent au bas de la station :
3 pistes noires, 1 piste rouge, 1 piste bleue et 2 pistes vertes.
Quelle est la probabilité que Guilhem emprunte alors, au hasard, une piste bleue ?

CORRIGÉS www.lienmini.fr/8270-38

10 min

# 1 Modéliser une loi de probabilité

## A ▸ Modèles implicites

Pour chaque expérience aléatoire ci-dessous, donner les issues et leur probabilité.
On pourra présenter les réponses sous forme d'un tableau comme ci-contre.

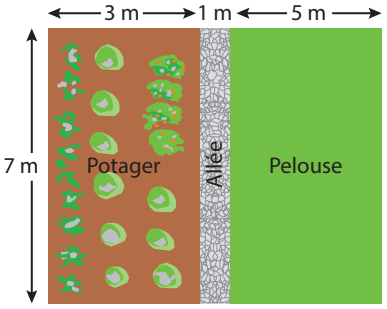
| Issue | … | … | … | … |
|---|---|---|---|---|
| Probabilité | … | … | … | … |

**1.** On lance un dé cubique bien équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

**2.** Un sac opaque contient 5 billes vertes et 3 billes jaunes.
On sort au hasard une bille du sac et on s'intéresse à sa couleur.

**3. a)** On tourne la roue de loterie ci-contre et on s'intéresse au gain obtenu, en euros.
**b)** On relance la roue mais, cette fois, on s'intéresse à la couleur obtenue.

**4.** Des enfants ont envoyé malencontreusement leur avion en papier dans le jardin du voisin (voir le plan ci-dessous).
On s'intéresse à l'endroit où il a atterri.



## B ▸ Modèles statistiques

**1.** Voici la répartition des groupes sanguins dans la population française. On choisit une personne au hasard dans cette population et on s'intéresse à son groupe sanguin.

| Groupe sanguin | O | A | B | AB |
|---|---|---|---|---|
| Fréquence | 42 % | 44 % | 10 % | 4 % |

**a)** Quelles sont les issues de cette expérience aléatoire ?
**b)** Quelle probabilité peut-on associer à chaque issue ?

**2.** Dans une entreprise de fabrication de clous, un responsable souhaite réaliser une étude statistique sur « l'état » des clous en sortie de chaîne de production et constate que 2 % d'entre eux présentent un défaut à la tête et 3 % sur la tige, les clous restants sont en bon état.
On choisit un clou au hasard dans la chaîne de production et on s'intéresse à son état.
**a)** Quelles sont les issues de cette expérience aléatoire ?
**b)** Quelles probabilités peut-on associer à chaque issue ?

**3.** **Pour aller plus loin** Un lycée propose quatre enseignements optionnels pour les élèves de Seconde, chaque élève ne pouvant en choisir qu'un. Un quart des élèves a choisi de ne pas suivre d'enseignement optionnel, un cinquième a choisi de suivre l'enseignement « Sciences de l'ingénieur », trois dixièmes ont choisi «Langue et culture de l'Antiquité : latin », et les élèves restants se répartissent équitablement dans les deux spécialités « principes fondamentaux de l'économie et de la gestion » et « LVC : italien ». On choisit un élève au hasard parmi les élèves de seconde et on s'intéresse à son enseignement optionnel éventuel.
Déterminer la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire.

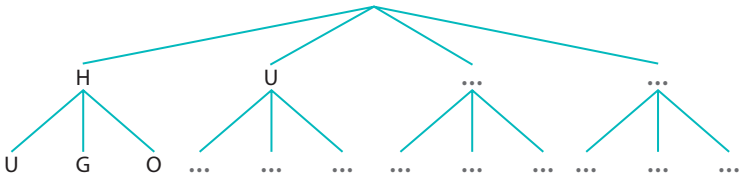
↪ Cours 1 p. 346

15 min

## 2 Utiliser un arbre de dénombrement

Hugo et Sara jouent au jeu suivant : le joueur dispose de quatre jetons sur lesquels figurent les lettres de leur nom. Le joueur choisit au hasard, successivement et sans remise, un jeton parmi les siens, et constitue ainsi un mot de deux lettres.

**1.** On s'intéresse à Hugo. Il a commencé à constituer l'arbre des possibles (ou arbre de dénombrement) pour son propre jeu.
**a)** Recopier et compléter cet arbre.
**b)** Déterminer le nombre d'issues de cette expérience aléatoire.




**2.** On considère l'événement C : « Le mot n'est constitué que de consonnes. »
**a)** Déterminer l'ensemble des issues réalisant cet événement.
**b)** En déduire $p(C)$, la probabilité que l'événement C soit réalisé.

**3.** Même question avec l'événement B : « Les deux lettres du mot sont classées dans l'ordre alphabétique ».

**4.** On s'intéresse maintenant à Sara. Représenter l'arbre de dénombrement pour son propre jeu puis reprendre les questions **2.** et **3.** précédentes, avec le jeu de Sara.

**5.** Pour aller plus loin Combien d'anagrammes Hugo peut-il former avec son prénom ? Et Sara ?

↪ Cours 1 p. 346

10 min

## 3 Langage des événements

Un sac contient cent jetons numérotés de 1 à 12 répartis de tel façon qu'on obtient la loi de probabilité suivante.

| Numéro | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,09 | 0,08 | 0,12 | 0,07 | 0,2 | 0,05 | 0,1 | 0,1 | 0,03 | 0,08 | 0,06 | 0,01 |

On tire au hasard un jeton du sac. On considère les événements suivants.
- A : « le numéro du jeton tiré est pair. »
- B : « le numéro du jeton tiré est inférieur ou égal à 5. »

**1. a)** Décrire l'événement A sous forme d'ensemble : A = {...}
**b)** Déterminer $p(A)$ la probabilité d'obtenir un nombre pair.

**2. a)** Décrire l'événement B sous forme d'ensemble : B = {...}
**b)** Déterminer $p(B)$ la probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 5.

**3. a)** On note $A \cap B$ (lire : « A inter B »), l'intersection de A et B, l'événement qui est constitué des issues qui appartiennent à la fois à A et à B. Décrire $A \cap B$ sous forme d'ensemble : $A \cap B = \{...\}$
**b)** Décrire $A \cap B$ par une phrase.
**c)** Calculer $p(A \cap B)$.

**4. a)** On note $A \cup B$ (lire : « A union B »), la réunion de A avec B, l'événement qui est constitué des issues qui appartiennent au moins à l'un des deux événements A ou B. Décrire $A \cup B$ sous forme d'ensemble : $A \cup B = \{...\}$
**b)** Décrire $A \cup B$ par une phrase.
**c)** Calculer $p(A \cup B)$.

**5. a)** On note $\overline{A}$ (lire : « A barre »), l'événement contraire de A, qui est constitué de toutes les issues qui n'appartiennent pas à A. Décrire $\overline{A}$ sous forme d'ensemble : $\overline{A} = \{...\}$
**b)** Décrire $\overline{A}$ par une phrase.
**c)** Calculer $p(\overline{A})$.

**6.** Pour aller plus loin Décrire par une phrase les événements $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.

↪ Cours 3 p. 350

Tableur Python 20 min

## 4 Simuler une expérience aléatoire

**1.** Écrire le programme en langage **Python** ci-contre puis l'exécuter plusieurs fois. Que fait la commande `random.random()` ?

```
import random
print(random.random())
```

**2.** Quelle est la probabilité que le résultat de la commande `random.random()` soit inférieur à :

**a)** 0,5 ? **b)** 0,25 ? **c)** à $\frac{1}{5}$ ?

**3.** Recopier et compléter : « Lorsque l'on lance un dé équilibré à 6 faces, la probabilité d'obtenir 6 est $p = \ldots$ c'est-à-dire la même que la probabilité que le résultat de `random.random()` soit inférieur à ... . »

**4.** Écrire et compléter le programme ci-contre permettant de simuler le lancer d'un dé suivant que le résultat soit 6 ou non.

```
import random
  if random.random()<...:
       print( "Le résultat est 6.")
  else:
       print("Le résultat n'est pas 6.")
```

**5. a)** Reprendre la question **1.** en remplaçant `random.random()` par `random.randint(1,4)` puis par `random.randint(5,12)`.

**b)** Écrire un programme simulant le lancer d'un dé à 10 faces à l'aide de la commande `random.randint`.

**6.** **Pour aller plus loin** Écrire un programme simulant le lancer d'un dé à 10 faces selon que le résultat soit au moins égal à 7 ou non.

↪ Cours 4 p. 354

30 min

## 5 Fluctuation d'échantillonnage et loi des grands nombres

On rappelle que la fonction `ALEA()` du tableur renvoie un nombre décimal dans l'intervalle [0 ; 1[.
En 2022, dans la population française, il y a 23,7 % de personnes âgées de moins de 20 ans.

**1. a)** Si l'on interroge une personne au hasard dans la population française quelle est la probabilité $p$ qu'elle ait moins de 20 ans ?

**b)** Écrire dans la cellule A1 : `=SI(ALEA()<0,237;"MOINS DE 20";"20 OU PLUS")`

**Coup de pouce** Cette commande signifie que si la condition `ALEA()<0,237` est vérifiée alors le tableur affiche `MOINS DE 20` sinon il affiche `20 OU PLUS` .

**c)** Recopier et compléter : « Dans la cellule A1, on a simulé le tirage au sort d'une personne dans la population française en tirant au hasard un nombre décimal entre ... et ... et en considérant que si ce nombre est ... alors la personne tirée au sort a moins de 20 ans. »

**2. a)** Simuler un échantillon de 500 personnes choisies au hasard dans la population en recopiant le contenu de la cellule A1 vers le bas jusqu'à la cellule A500.

**b)** Saisir `=NB.SI(A1:A500;"MOINS DE 20")` dans la cellule C1. À quoi ce résultat correspond-il ?

**c)** Simuler un nouvel échantillon de 500 personnes en appuyant sur la touche F9. Qu'observe-t-on ?

**d)** Saisir une formule dans la cellule C2 faisant référence à la cellule C1 et permettant d'obtenir la fréquence $f$ d'individus de moins de 20 ans dans l'échantillon. Calculer l'écart entre $f$ et $p$.

**e)** Simuler quelques autres échantillons à l'aide de la touche F9 et calculer l'écart entre $f$ et $p$ dans chaque cas.

**3. a)** Simuler un échantillon de 10 000 personnes choisies au hasard dans la population en recopiant le contenu de la cellule A500 vers le bas jusqu'à la cellule A10000.

**b)** Modifier les formules des cellules C1 et C2 afin qu'elles affichent respectivement le nombre de personnes de moins de 20 ans et la fréquence $f$ de ces personnes dans l'échantillon de taille 10 000.

**c)** Simuler plusieurs échantillons et calculer l'écart entre $f$ et $p$ dans chaque cas.

**d)** Comparer les écarts obtenus à la question précédente avec ceux obtenus à la question **2. e)**. Que peut-on conclure ?

↪ Cours 5 p. 356

Python 20 min

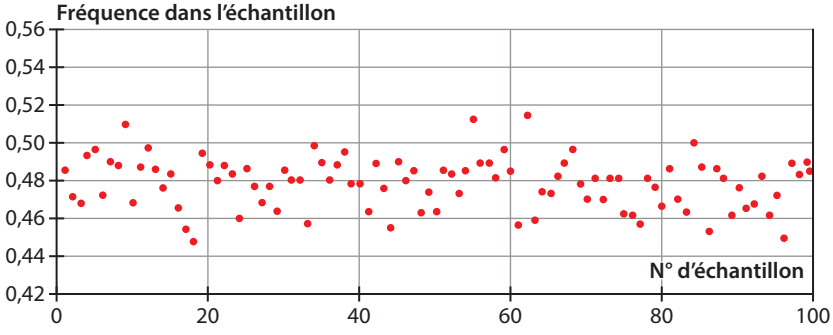
# 6 Estimer un paramètre

## A ▸ Principe de l'estimation

En France, 48 % des foyers sont reliés à la fibre optique.
Le programme suivant permet de simuler un échantillon de taille 1 000 associé à l'expérience aléatoire consistant à sélectionner un foyer français au hasard et à observer s'il est relié à la fibre optique ou non.

```
import random
effectif= 0
for i in range(1,1000):
    if random.random()<0.48:
        effectif=effectif+1
print(effectif,"Foyers reliés à la fibre optique dans cet échantillon")
```

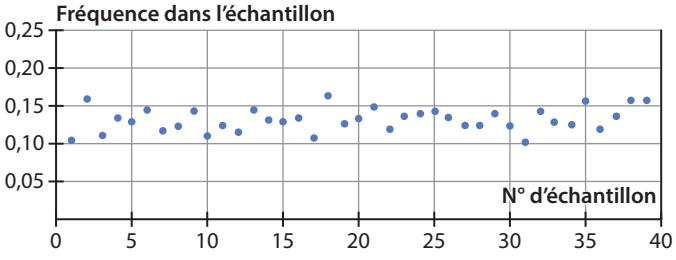
**1.** Écrire le programme en le modifiant afin qu'il affiche la fréquence de foyers reliés à la fibre optique dans l'échantillon plutôt que l'effectif, puis l'exécuter.




**2.** En simulant 100 tels échantillons de taille 1 000, on obtient le graphique ci-contre.
**a)** Lire approximativement la fréquence des foyers recevant la fibre optique dans l'échantillon n° 80 puis dans l'échantillon n° 20.
**b)** Sur quelle valeur semblent être approximativement « centrées » ces fréquences dans les 100 échantillons ?
**c)** À quoi cette valeur correspond-elle dans l'énoncé ?

## B ▸ Estimation d'une proportion *p*

Une étude statistique sur la proportion d'élèves gauchers en France a été effectuée en choisissant dans plusieurs établissements scolaires des échantillons de 500 élèves du CP à la terminale. Pour chacun de ces échantillons le nombre d'élèves gauchers a été relevé et la fréquence a été calculée. Les résultats ont été placés sur le graphique ci-contre.




**1.** Donner une estimation de la proportion réelle d'élèves gauchers en France d'après ces résultats statistiques.

**2.** Pour aller plus loin Télécharger le programme qui simule 100 échantillons de taille 1 000 associés à une expérience aléatoire dont l'une des issues a pour probabilité *p* inconnue et affiche la fréquence de cette issue dans chacun des 100 échantillons.

**CONSOLE PYTHON**
Estimer une proportion
www.lienmini.fr/8270-tab4

Exécuter ce programme, observer le graphique et estimer la valeur de *p*, puis la saisir dans la console Python

↪ Cours 5 p. 356

# Cours

## 1 Loi de probabilité

**Définition** **Expérience aléatoire et univers**

**Une expérience aléatoire est une expérience dont les issues sont connues sans que l'on puisse déterminer laquelle sera réalisée.**
**L'univers associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de ses issues.**

**Comment lit-on ?**

• L'univers se note souvent Ω qui se lit « oméga ».

**Exemple**

On lance une pièce de monnaie et on regarde de quel côté elle tombe.

Les résultats sont *Pile* et *Face*. Pour cette expérience aléatoire, l'univers est $\Omega = \{Pile, Face\}$.

**Définition** **Loi (ou distribution) de probabilité**

**Donner une loi de probabilité (ou distribution de probabilité) associée à une expérience aléatoire, c'est en donner toutes les issues et attribuer une probabilité (un nombre compris entre 0 et 1) à chacune d'elles de sorte que la somme des probabilités des issues soit égale à 1.**
**On peut présenter les résultats sous la forme d'un tableau.**

**Exemples**

• On lance un dé cubique bien équilibré, ayant trois faces rouges, deux faces bleues et une face verte, et on s'intéresse à la couleur obtenue. On a alors :

| **Issue** | Vert | Bleu | Rouge |
|---|---|---|---|
| **Probabilité** | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |

On peut vérifier que : $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{6}{6}=1$

• Une étude du chauffage des ménages français montre que 39 % d'entre eux se chauffent au gaz, 35 % à l'électricité, 12 % au fioul, 5 % au bois et 9 % utilisent d'autres énergies.
On choisit au hasard un ménage français et on note son type de chauffage.
Cette expérience aléatoire peut être modélisée à l'aide de la loi de probabilité suivante.

| **Issue** | Gaz | Électricité | Fioul | Bois | Autres |
|---|---|---|---|---|---|
| **Probabilité** | 0,39 | 0,35 | 0,12 | 0,05 | 0,09 |

On a bien :

$0,39 + 0,35 + 0,12 + 0,05 + 0,09 = 1$

**Définition** **Loi équirépartie**

**Une loi est dite équirépartie lorsque chaque issue a la même probabilité de se réaliser, qui est alors :**

$$\frac{1}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{1}{n}$$

**Exemple**

Lors d'un lancer d'un dé cubique équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6, aucune des faces n'est favorisée, donc chacune des 6 faces a autant de chances qu'une autre d'être obtenue.

Chaque issue {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} a donc une probabilité d'apparition de $\frac{1}{6}$.

**Remarque** On dit aussi qu'on est dans une situation d'**équiprobabilité**.

# Exercices résolus

## Méthode 1 Modéliser une expérience aléatoire

### Énoncé

**1. Un sac opaque contient 10 jetons marqués d'une lettre, indiscernables au toucher : 5 jetons portent la lettre A, 3 jetons portent la lettre B et 2 jetons portent la lettre C. On tire au hasard un jeton du sac et on observe la lettre obtenue. Quelle est la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire ?**

**2. L'association sportive du collège a clôturé ses inscriptions pour l'année scolaire. $\frac{3}{8}$ des élèves se sont inscrits au basket, $\frac{1}{4}$ à l'athlétisme, $\frac{1}{8}$ au badminton, et le reste au tennis de table. On choisit au hasard un élève inscrit à l'association sportive et on note le sport qu'il a choisi. Quelle est la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire ?**

**3. Dans une classe de 25 élèves un professeur interroge au hasard un élève. Quelle est la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire ?**

### Solution

**1.** De la phrase : « On tire au hasard un jeton du sac et on observe la lettre obtenue » on déduit que les issues sont les lettres A, B, C. (1)
Le sac est opaque et les jetons sont indiscernables au toucher, on peut donc dire que chaque jeton a la même « chance » d'être obtenu. La probabilité d'obtenir telle ou telle lettre ne dépend donc que du nombre de jetons marqués de la lettre correspondante. (2)
La loi de probabilité est donc la suivante.

| Issue | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Probabilité | $\frac{5}{10} = 0{,}5$ | $\frac{3}{10} = 0{,}3$ | $\frac{2}{10} = 0{,}2$ |

(3)

**Conseils & Méthodes**

(1) Identifier les issues à partir des indications de l'énoncé décrivant l'expérience aléatoire.
(2) En analysant l'expérience aléatoire, on peut déterminer les probabilités de chaque issue.
(3) On en déduit les probabilités de chaque issue (on peut vérifier que la somme des probabilités est égale à 1).

**2.** Les issues sont les 4 sports proposés : basket, athlétisme, badminton, tennis de table. (1)
On connaît la fréquence de trois d'entre eux, donc on connaît la probabilité que l'élève pratique chacun d'entre eux.
On peut donc calculer la probabilité du quatrième. On a : $1-\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ (2)

| Issue | Basket | Athlétisme | Badminton | Tennis de table |
|---|---|---|---|---|
| Probabilité | $\frac{3}{8} = 0{,}375$ | $\frac{1}{4} = 0{,}25$ | $\frac{1}{8} = 0{,}125$ | $\frac{1}{4} = 0{,}25$ |

(3)

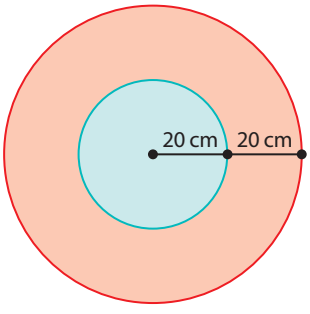
**3.** Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité (2) où chacun des 25 élèves de la classe est une issue (1) qui a la même probabilité de se réaliser : $\frac{1}{25}$ (3)

## À vous de jouer !

**1** On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes et on observe sa « couleur » (pique, cœur, carreau, trèfle). Quelle est la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire ?

**2** Une étude indique que 6,7 % des résidences principales en France ont une bonne isolation thermique (catégorie A-B), 16,7 % sont très mal isolées (catégories F-G), les autres ont une isolation moyenne (C-D-E). On s'intéresse à l'isolation thermique d'une habitation française choisie au hasard. Quelle est la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire ?

**3** Mona lance une fléchette sur la cible ci-contre de rayon 40 cm. Elle note alors la couleur dans laquelle la fléchette s'est plantée. Proposer une loi de probabilité qui permettrait de modéliser le résultat de cette expérience aléatoire.




↪ Exercices 61 à 74 p. 360

# 2 Notion d'événement

**Définition** **Événement**

**Un événement est un sous-ensemble de l'univers.**
**Il peut s'écrire comme un ensemble d'issues ou être décrit à l'aide d'une phrase.**

**Exemple**

On lance un dé cubique équilibré et on observe le résultat. Alors l'univers associé est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
L'événement A : « Obtenir un nombre pair » est $A = \{2 ; 4 ; 6\}$.

**Remarque** Si une issue appartient à un événement, on dit qu'elle réalise cet événement.

**Définition** **Probabilité d'un événement**

**La probabilité d'un événement A est égale à la somme des probabilités des issues qui réalisent cet événement.**

**Remarques**

- Un événement **impossible** est un événement qui ne se réalise jamais : **sa probabilité vaut 0**.
- Un événement **certain** est un événement qui est sûr de se réaliser : **sa probabilité vaut 1**.

**Exemple**

Une étude menée sur la répartition des groupes sanguins en France donne les résultat suivants.

- 45 % de la population est du groupe A,
- 9 % du groupe B,
- 4 % du groupe AB,
- 42 % du groupe O.

On choisit au hasard une personne en France et on note son groupe sanguin.
Cette expérience aléatoire peut être modélisée à l'aide du tableau des fréquences suivant.

| **Issue** | A | B | AB | O |
|---|---|---|---|---|
| **Probabilité** | 0,45 | 0,09 | 0,04 | 0,42 |

La probabilité qu'une personne en France ait un groupe sanguin différent de A est égale à :
$0,09 + 0,04 + 0,42 = 0,55$.

**Propriété** **Cas d'équiprobabilité**

**Dans une situation d'équiprobabilité, où il y a n issues, la probabilité d'un événement A réalisé par $k$ issues est :** $p(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues qui réalisent A}}{\text{nombre total d'issues}} = \dfrac{k}{n}$.

**Exemple**

Dans le cas du lancer d'un dé cubique équilibré à 6 faces, la loi peut se modéliser par une loi équirépartie sur l'ensemble $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
Le nombre total d'issues est $n = 6$.
L'événement A : « Obtenir un nombre pair. » s'écrit $A = \{2 ; 4 ; 6\}$.
Le nombre d'issues qui réalisent l'événement A est $k = 3$.
La probabilité de l'événement A est donc : $p(A) = \dfrac{3}{6} = 0,5$.

# Exercices résolus

## Méthode 2 Probabilité d'un événement dans le cas général

**Énoncé**

**On a étudié le moyen de transport utilisé par des élèves pour venir au lycée. On choisit au hasard un élève au lycée et on s'intéresse à son moyen de transport.**
**Un sondage réalisé en début d'année a permis de définir la loi de probabilité ci-contre.**
**Déterminer la probabilité que l'élève soit venu en transport motorisé.**

| Moyen de transport | Vélo | Marche | Bus | Voiture | Tram |
|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,05 | 0,55 | 0,15 | 0,2 | 0,05 |

**Solution**

Les véhicules motorisés sont le bus, la voiture et le tram. (1)
Cette probabilité vaut 0,15 + 0,2 + 0,05 = 0,4. (2)

**Conseils & Méthodes**

(1) On identifie les issues qui réalisent l'événement.
(2) On additionne leurs probabilités.

### À vous de jouer !

**4** Loane possède un dé pipé. Le tableau suivant donne la probabilité d'apparition de chaque face. On lance le dé.

| Résultat | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |

Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre impair.

**5** Lorsque Killian démarre sa voiture, le levier de vitesse peut être dans les états suivants.

| État | Marche arrière | Point mort | Première |
|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,35 | 0,45 | 0,2 |

Déterminer la probabilité qu'une vitesse soit enclenchée.

↪ Exercices 75 à 81 p. 361

## Méthode 3 Probabilité d'un événement dans le cas d'une loi équirépartie

**Énoncé**

**Inès a, dans son placard, une bouteille de jus d'orange, une bouteille de jus d'ananas, une bouteille de jus de citron, une bouteille de jus de raisin et une bouteille de jus de pomme.**
**Elle choisit une bouteille au hasard.**
**Quelle est la probabilité que ce soit du jus d'agrumes ?**

**Solution**

Cette expérience aléatoire peut être modélisée par la loi équirépartie pour chaque bouteille de jus de fruits. (1)
Le nombre total de bouteilles est 5, et le nombre de bouteilles de jus d'agrumes est 2 (orange et citron). (2)
La probabilité est donc égale à $\frac{2}{5} = 0,4$. (3)

**Conseils & Méthodes**

(1) Repérer la loi équirépartie.
(2) Identifier les issues qui réalisent l'événement et leur nombre.
(3) Appliquer la formule du cours.

### À vous de jouer !

**6** Un club de foot possède 23 maillots identiques numérotés de 1 à 23.
Alban arrive en premier au club et choisit au hasard un maillot.
Quelle est la probabilité qu'il ait un numéro compris entre 7 et 11 ?

**7** On choisit une lettre de l'alphabet au hasard.
Quelle est la probabilité que ce soit une voyelle ?

**8** On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes.
Quelle est la probabilité d'obtenir un as ?

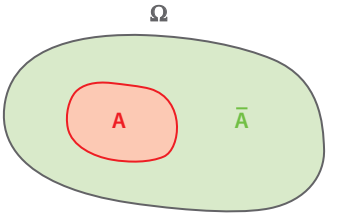
↪ Exercices 82 à 89 p. 362

# 3 Opérations sur les événements

**Définition** **Événement contraire**

**On considère une expérience aléatoire d'univers Ω.**

**Soit A un événement. L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas A, autrement dit $\overline{A}$ est réalisé par les issues de Ω qui ne sont pas dans A.**




**Propriété** **Probabilité de l'événement contraire**

**Soit A un événement, on a $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.**

**Comment lit-on ?**

- $\overline{A}$ se lit « A barre ».

**Exemple**

Dans le cas du lancer de dé à 6 faces, le contraire de l'événement A : « Obtenir un nombre pair. » est $\overline{A}$ : « Obtenir un nombre impair. ».
On a donc $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

**Définition** **Union et intersection de deux événements**

**Soit A et B deux événements :**

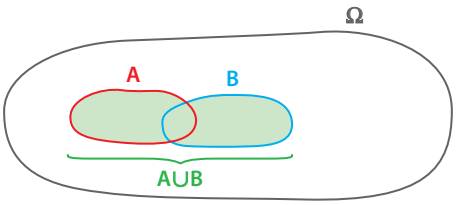
- **l'événement A ∪ B est la réunion de A et de B : c'est l'ensemble des issues qui réalisent A ou B (ou les deux à la fois).**
- **l'événement A ∩ B est l'intersection de A et de B : c'est l'ensemble des issues qui réalisent A et B.**

**Comment lit-on ?**

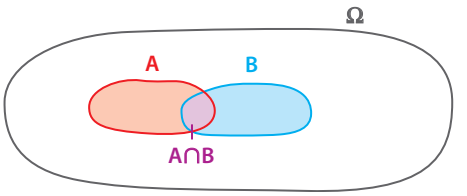
- A ∩ B se lit : « A inter B ».
- A ∪ B se lit : « A union B ».

**Remarque** Le diagramme de Venn permet de représenter les différents événements.

- La réunion de A et de B.




- L'intersection de A et de B.




**Exemple** On lance un dé à 6 faces et on considère les événements A : « Obtenir un nombre pair » et B : « Obtenir un multiple de 3 ». A = {2 ; 4 ; 6} et B = {3 ; 6}. Alors A ∩ B = {6} et A ∪ B = {2 ; 3 ; 4 ; 6}.

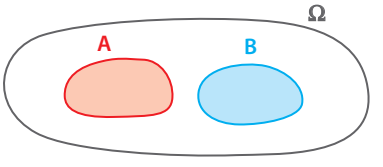
**Propriété** **Relation entre union et intersection**

**On a $p(A) + p(B) = p(A \cup B) + p(A \cap B)$. En particulier, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.**

**Exemple**

Dans l'exemple précédent, on a : $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\quad p(A \cap B) = \frac{1}{6}$

On a alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.




**Remarque**

On dit que A et B sont des **événements disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.
On a alors, **dans ce cas seulement**, $p(A \cap B) = 0$ et $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

# Exercices résolus

Méthode 4

## Opérations sur les événements et calcul de probabilités

### Énoncé

| | T-shirts | Pantalons | Total |
|---|---|---|---|
| Noir | 4 | 3 | 7 |
| Blanc | 5 | 1 | 6 |
| Couleur | 9 | 3 | 12 |
| Total | 18 | 7 | 25 |

**Zoé a dans sa garde-robe différents vêtements qui se répartissent suivant le tableau ci-contre. Elle choisit au hasard un vêtement.**
**On considère les événements :**
**• A : « Le vêtement choisi est un pantalon. »**
**• B : « Le vêtement choisi est blanc ».**

**1. Déterminer $p(A)$ et $p(B)$.**

**2. Exprimer par une phrase l'événement $\overline{A}$, puis déterminer $p(\overline{A})$.**

**3. Exprimer par une phrase l'événement $A \cap B$, puis déterminer $p(A \cap B)$.**

**4. Exprimer par une phrase l'événement $A \cup B$, puis déterminer $p(A \cup B)$.**

### Solution

1. On est dans une situation d'équiprobabilité sur chacun des vêtements.
Donc $p(A) = \frac{7}{25} = 0{,}28$ et $p(B) = \frac{6}{25} = 0{,}24$.

2. $\overline{A}$ : « Le vêtement choisi n'est pas un pantalon. » donc $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}28 = 0{,}72$.
On peut dire aussi $\overline{A}$ : « Le vêtement choisi est un T-shirt »
donc $p(\overline{A}) = \frac{18}{25} = 0{,}72$.

3. $A \cap B$ : « Le vêtement choisi est un pantalon blanc. »
donc $p(A \cap B) = \frac{1}{25} = 0{,}04$. (1)

4. $A \cup B$ : « Le vêtement choisi est un pantalon ou est blanc »,
donc $p(A \cup B) = \frac{3+1+3+5}{25} = \frac{12}{25} = 0{,}48$. (2)

On peut aussi utiliser la formule : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}28 + 0{,}24 - 0{,}04 = 0{,}48$

### Conseils & Méthodes

(1) Deux conditions doivent être réalisées : il s'agit d'une intersection. On regarde dans le tableau : une seule case correspond à cette intersection, puis on calcule la probabilité correspondante en divisant ce nombre par le nombre total d'issues.

(2) Une condition **ou** une autre doit être réalisée : il s'agit d'une réunion. On regarde dans le tableau : quatre cases correspondent à cette réunion. On calcule la probabilité correspondante en additionnant ces nombres et en divisant par le nombre total d'issues.

## À vous de jouer !

**9** Un vendeur ambulant vend des fleurs rouges et jaunes de deux sortes.
Il dispose de 15 roses rouges et 12 jaunes ainsi que de 20 tulipes rouges et 22 jaunes. Il propose une fleur au hasard à un client.
On considère les événements suivants.

• J : « La fleur proposée est jaune. »

• T : « La fleur proposée est une tulipe. »

1. Déterminer la probabilité :

**a)** de J.

**b)** de T.

**c)** de $\overline{J}$.

**d)** de $\overline{T}$.

2. Décrire les événements $T \cap J$ et $T \cup J$, puis déterminer leur probabilité.

**10** Dans un club de danse, chaque adhérent pratique une danse. La répartition des danses pratiquées est donnée dans le tableau suivant.

| | Rock | Tango | Swing | Valse |
|---|---|---|---|---|
| Femme | 21 | 13 | 26 | 25 |
| Homme | 35 | 15 | 17 | 28 |

On choisit au hasard une personne dans le club de danse.
On considère les événements suivants
• F : « La personne est une femme. »
• R : « La personne danse le rock. »
• S : « La personne danse le swing. »

1. Déterminer la probabilité de F, de S, de $\overline{F}$ et de $\overline{R}$.

2. Définir à l'aide d'une phrase les événements $F \cap S$ et $F \cup S$, puis déterminer leur probabilité.

↪ Exercices 95 à 106 p. 363

# Exercices résolus

Méthode 5

## Utiliser un tableau à double entrée pour dénombrer

### Énoncé

**On lance un dé vert et un dé rouge parfaitement équilibrés et numérotés de 1 à 6. On regarde les nombres indiqués par les dés.**

**Quelle est la probabilité que la somme soit égale à 7 ?**

### Solution

On peut étudier les résultats de cette expérience aléatoire à l'aide du tableau 1 :

| Dé vert \ Dé rouge | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

2

On constate qu'il y a six tirages différents pour lesquels la somme des deux nombres est égale à 7. 3

Comme il s'agit d'une situation d'équiprobabilité alors la probabilité que la somme soit égale à 7 est égale à $\frac{6}{36}$ c'est-à-dire $\frac{1}{6}$.

### Conseils & Méthodes

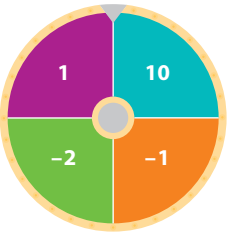
1 Comme il y a deux dés, un tableau à double entrée est possible. Chacune des 36 cases de ce tableau représente un tirage de l'expérience aléatoire, par exemple la case au chiffre 7 orange représente le tirage où le dé rouge donne 6 et le dé vert donne 1. Comme les deux dés sont équilibrés ces 36 tirages sont équiprobables.

2 On inscrit le critère utilisé, ici la somme des résultats, dans chaque case équiprobable.

3 On compte les cases, donc les tirages, réalisant l'événement : la probabilité cherchée est : nombre de cases vérifiant le critère/nombre total de cases.

## À vous de jouer !

**11** On tourne deux fois de suite la roue ci-contre.




On note les deux nombres sur lesquels la roue s'est successivement arrêtée. En les multipliant on obtient, en euros :

- la somme gagnée si le résultat est positif.
- la somme perdue si le résultat est négatif.

Quelle est la probabilité de gagner plus de 2 euros ?

**12** Une urne contient deux boules blanches respectivement numérotées 1 et 2, une boule jaune numérotée 1 et une boule rouge numérotée 2.
Une deuxième urne contient quatre boules similaires à la première urne et une boule supplémentaire de couleur noire numérotée 1.
On extrait une boule de la première urne et une boule de la deuxième urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules portant le même numéro ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de couleur différentes ?

**13** Anna dispose de cinq récipients alimentaires différents A, B, C, D et E ainsi que de six couvercles. Deux de ces couvercles sont compatibles avec A ou B, trois sont compatibles avec C ou D, et le dernier ne convient que pour le récipient E. Anna choisit au hasard un récipient et un couvercle dans son placard. Quelle est la probabilité qu'ils soient compatibles ?

**14** Dans sa trousse Lina a trois stylos bille, un crayon et un feutre et Iris a, dans la sienne, deux stylos bille, deux crayons et deux feutres. Elles sortent au hasard et simultanément un objet de leur trousse. Quelle est la probabilité qu'elles sortent le même type d'objet ?

↪ Exercices 107 à 110 p. 365

VIDÉO ALL MATHS PARNAK
Comprendre une méthode
www.lienmini.fr/8270-39

## Méthode 6 Utiliser un arbre pour dénombrer

### Énoncé

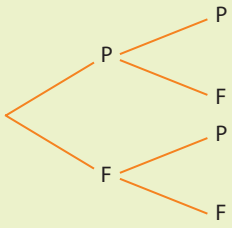
**On lance deux fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée en notant à chaque fois la face obtenue. On considère l'événement A : « Obtenir la même face lors des deux lancers. ». Quelle est la probabilité de A ?**

### Solution

On peut utiliser un arbre pour représenter la situation (1). Chaque branche donne un tirage différent et, la pièce étant équilibrée, les probabilités associées à chaque branche sont identiques donc l'univers est : {PP ; PF ; FP ; FF} et la loi est équirépartie. (2)

Or, deux issues réalisent l'événement A : les issues PP et FF.

Donc $p(A) = \frac{2}{4} = 0{,}5$. (3)




### Conseils & Méthodes

1. Lors d'expériences aléatoires successives, un arbre de dénombrement permet d'explorer toutes les possibilités.
2. On établit ensuite l'univers de l'expérience aléatoire, puis la loi de probabilité sur cet univers.
3. La probabilité d'un événement se calcule alors selon la loi de probabilité établie.

### À vous de jouer !

**15** Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. On tire successivement deux boules, sans remise, en notant leur numéro dans l'ordre d'apparition. On considère l'événement B : « Le numéro de la deuxième boule tirée est supérieur au numéro de la première ». Déterminer $p(B)$.

**16** Un couple souhaite fonder une famille de quatre enfants. Considérant que la probabilité d'avoir un garçon ou une fille et la même, quelle est la probabilité qu'ils aient au moins une fille ?

↪ Exercices 111 à 118 p. 365

## Méthode 7 Utiliser un diagramme de Venn

### Énoncé

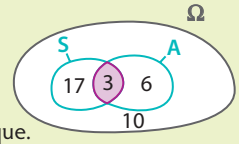
**Dans une classe de 36 élèves de Seconde, 20 élèves pratiquent un sport, 9 élèves font une activité artistique, et 3 élèves font les deux. On choisit au hasard un élève de cette classe. Soit les événements suivants :**

- **S : « L'élève choisi fait du sport ».**
- **A « L'élève choisi fait une activité artistique ».**

1. **Représenter la situation à l'aide d'un diagramme de Venn.**
2. **Déterminer $p(A)$, $p(S)$, $p(A \cap S)$ et $p(A \cup S)$.**
3. **Déterminer la probabilité que l'élève ne fasse ni de sport ni d'activité artistique.**

### Solution

1. Après avoir placé les 3 élèves dans l'intersection de A et S, on en déduit qu'il reste 17 élèves qui font du sport et 6 qui font une activité artistique.




2. $p(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, $p(S) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$ (1) $p(A \cap S) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

$p(A \cup S) = \frac{17+3+6}{36} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$ (avec A ∪ S représenté en bleu)

3. $p(\overline{A \cup S}) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ (2)

### Conseils & Méthodes

1. On commence par dénombrer les issues qui sont dans les deux événements et on procède ensuite par soustraction (20 – 3 = 17 ; 9 – 3 = 6 ; 36 –17 – 3 – 6 = 10)
2. La question posée correspond à l'événement contraire de A ∪ S ; dans le diagramme on remarque qu'il y a 10 élèves qui ne sont pas dans A ∪ S.

### À vous de jouer !

**17** Le CDI d'un lycée possède 960 livres dont 168 sont des manuels scolaires, 125 des livres de sciences et 54 sont des manuels scolaires de sciences. Un élève choisit un livre au hasard au CDI. Quelle est la probabilité que ce ne soit ni un livre de sciences ni un manuel scolaire ?

**18** Un groupe de randonneurs est constitué de 20 personnes dont 4 n'ont encore jamais marché ni campé, 13 ont déjà marché et 8 ont déjà campé. On choisit au hasard un randonneur. Quelle est la probabilité qu'il ait déjà pratiqué la marche et le camping ?

↪ Exercices 119 à 127 p. 366

# 4 Échantillon et simulation

**Définition** **Échantillon**

**Lorsque l'on réalise plusieurs fois une même expérience aléatoire de manière indépendante (c'est- à-dire que les différentes réalisations n'ont pas d'influence les unes sur les autres), l'ensemble des résultats obtenus est appelé échantillon.**
**Le nombre de fois où l'expérience est réalisée est appelée taille de l'échantillon.**

**Exemples**

- Si l'on lance 10 fois un dé équilibré à 6 faces et qu'on observe le résultat obtenu, on obtient un échantillon de taille 10.
- Si l'on tire au sort 1 000 personnes dans la population française et que l'on observe si la personne est droitière ou non, on obtient un échantillon de taille 1 000.

**Propriété** **Simulation**

**Soit $p$ un nombre réel compris entre 0 et 1.**
**On peut simuler informatiquement une expérience aléatoire à deux issues $x_1$ et $x_2$ de probabilités respectives $p$ et $1 - p$ en générant un nombre réel aléatoire entre 0 et 1 et en considérant que :**
- **$x_1$ est réalisée si ce nombre aléatoire est inférieur à $p$.**
- **$x_2$ est réalisée sinon.**

**Démonstration** La répartition des nombres réels entre 0 et 1 est uniforme. Donc la probabilité que le nombre aléatoire obtenu appartienne :
- à l'intervalle $[0 ; p[$ est égale à $p$.
- à l'intervalle $[1 - p ; 1[$ est égale à $1 - p$.

Ce qui veut dire que la probabilité que la **simulation** donne $x_1$ est bien $p$ qui est la probabilité que l'**expérience aléatoire** donne $x_1$ De même la probabilité que la **simulation** donne $x_2$ est bien $1 - p$ qui est la probabilité que l'**expérience aléatoire** donne $x_2$

**Remarque** Pour mettre en œuvre cette propriété, il faut disposer de commandes permettant de générer un nombre aléatoire dans différents langages :

- avec la calculatrice : `NbrAléat`, `Ran#` et `random ()` (respectivement pour les calculatrices TI, Casio et Numworks) génèrent un nombre réel aléatoire dans $[0 ; 1[$.
- avec le tableur : `ALEA()` génère un nombre réel aléatoire dans $[0 ; 1[$.
- en langage **Python** : il faut écrire `import random` en début de programme puis :
  - `random.random()` renvoie un nombre **réel** aléatoire dans $[0 ; 1[$.
  - `random.randint(a,b)` renvoie un nombre **entier** aléatoire entre `a` et `b` inclus.

**Exemple**

Dans la population belge, il y a 75 % de francophones, ce qui signifie que la probabilité qu'un habitant de Belgique interrogé au hasard soit francophone est 0,75. On souhaite simuler l'expérience aléatoire consistant à tirer au sort une personne dans la population belge et à regarder si elle est francophone ou non à l'aide d'un tableur. On saisit `=ALEA()` dans une cellule et on considère que :

- la personne est francophone si le nombre obtenu est inférieur à 0,75.
- la personne n'est pas francophone sinon.

- En langage **Python** on peut simuler un échantillon de 1 000 personnes selon qu'elles sont francophones ou non (voir ci-contre).

```
import random
for i in range(1,1000):
    if random.random()<0.75:
        print("Francophone")
    else
        print("Non francophone")
```

Méthode 8

## Simuler un échantillon associé à une expérience aléatoire à deux issues

### Énoncé

**En 2021, 60,6 % des élèves de Première générale ont choisi la Spécialité Mathématiques.**

**1. Compléter le programme Python ci-contre pour simuler le tirage au sort d'un élève parmi tous les élèves de Première selon qu'il a choisi la Spécialité mathématiques ou non.**

**2. Écrire un programme Python simulant un échantillon de 100 élèves tirés au sort parmi tous les élèves de Première selon qu'ils ont choisi la Spécialité Mathématiques ou non.**

**3. Écrire en langage Python une fonction `simul()` renvoyant la fréquence d'élèves de Première ayant choisi la spécialité mathématiques dans un échantillon de 100 élèves.**

```
import random
   if random.random()<...:
      print("...")
else
     print("Pas spé maths")
```

### Solution

**1.** La proportion 60,6 % est égale au nombre décimal 0,606. (1)
Donc, quand on tire au hasard un élève parmi les élèves de Première, la probabilité qu'il ait choisi la spécialité mathématiques est égale à 0,606.

Pour simuler ce tirage au sort on génère donc un réel aléatoire entre 0 et 1 avec `random.random()` et :
- si le réel obtenu est inférieur à 0,606 alors on considère que l'élève tiré au sort a choisi la Spécialité Mathématiques,
- sinon on considère que l'élève n'a pas choisi la Spécialité Mathématiques.

```
import random
   if random.random()<0.606:
      print("Spé maths")
else
     print("Pas spé maths")
```

**2.** On obtient, par exemple, le programme suivant. (2)

```
import random
for i in range(1,101):
   if random.random()<0.606:
      print("Spé maths")
else
     print("Pas spé maths")
```

**3.** On obtient, par exemple, le programme suivant.

```
import random
def simul(1,101):
    effectif = 0
    for i in range (1,101):
        if random.random()<0.606:
                effectif = effectif+1
    return effectif/100
```

(3) (4)

### Conseils & Méthodes

(1) Lorsque l'expérience aléatoire porte sur une population dont le caractère étudié est présent dans une certaine proportion *p*, on exprime p sous forme décimale ou fractionnaire.

(2) On répète 100 fois le même tirage au sort, donc on utilise une boucle for.

(3) On crée une variable `effectif`, initialisée à `0`, pour compter le nombre d'élèves qui ont choisi la Spécialité Mathématiques.

(4) Cette variable augmente de `1` à chaque fois que le réel obtenu est inférieur à `p` car cela correspond à un élève qui a choisi la Spécialité Mathématiques.

### À vous de jouer !

**19** Python
À la naissance en France, 105 garçons voient le jour pour 100 filles.
Écrire un programme en langage **Python** simulant le tirage au sort d'un échantillon de 500 nouveau-nés selon qu'ils sont de sexe féminin ou non et affichant ou renvoyant la fréquence de filles dans l'échantillon.

**20** Python
Écrire un algorithme en langage naturel, ou une fonction en langage **Python** simulant le tirage au sort d'un échantillon de 899 résultats d'un lancer de dé à 12 faces, numérotées de 1 à 12, selon que le résultat obtenu est pair ou non, et affichant ou renvoyant le nombre de résultats **impairs** obtenus.

↪ Exercices 128 à 136 p. 366

# 5 Fluctuation et estimation

**Définition** **Fluctuation d'échantillonnage**

**Deux échantillons (obtenus par l'expérience ou simulés) de même taille associés à une même expérience aléatoire ne sont, *a priori*, pas identiques : ce phénomène s'appelle la fluctuation d'échantillonnage.**

**Exemple**

Si l'on lance dix fois un dé à 6 faces puis que l'on recommence, les résultats des dix premiers lancers ne seront pas identiques aux dix suivants.

**Propriété** **Loi des grands nombres**

**On considère un échantillon de taille $n$ associé à une expérience aléatoire dont l'une des issues (ou l'un des événements) a pour probabilité $p$.**
**Lorsque $n$ est grand, sauf exception, la fréquence observée $f$ de cette issue (ou événement) dans l'échantillon est proche de sa probabilité $p$.**
**La plupart du temps, l'écart entre $p$ et $f$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.**

**Exemple**

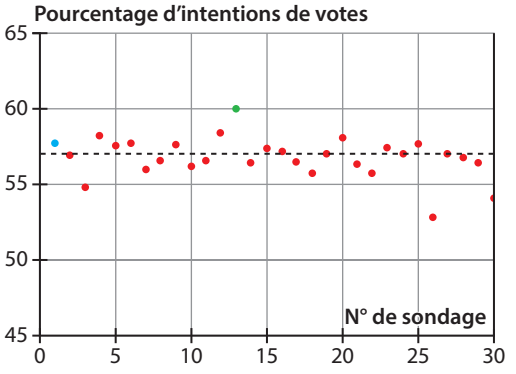
On a lancé 1 000 fois un dé à 6 faces et on a obtenu 159 fois le nombre 6. La fréquence observée de 6 est donc $f = \frac{159}{1000} = 0{,}159$ ce qui est **assez proche** de la probabilité d'obtenir 6 qui est $p = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$.
L'écart entre $p$ et $f$ est $\frac{1}{6} - 0{,}159 \approx 0{,}008$, qui est bien inférieur à $\frac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0{,}032$.

**Propriété** **Estimation**

**On considère un échantillon de taille $n$ associé à une expérience aléatoire dont l'un des événements a pour probabilité $p$ et où $f$ est la fréquence observée de cet événement dans l'échantillon.**
**Lorsque $n$ est grand, $f$ et $p$ sont proches donc, si l'on ne connaît pas la valeur de $p$, on peut considérer que $f$ en constitue une estimation.**
**On utilise généralement plusieurs échantillons de même taille pour réaliser une bonne estimation.**

**Exemple**

On donne ci-contre les pourcentages d'intentions de votes pour une candidate selon 30 sondages portant sur 1 000 personnes réalisés le même jour, c'est-à-dire 30 échantillons de taille 1 000, associés à l'expérience aléatoire consistant à tirer au sort une personne dans la population et à lui demander si elle souhaite voter pour cette candidate ou non.
On constate que, dans le 1er sondage (point bleu) la candidate a environ 58 % d'intention de vote, soit une fréquence observée de 0,58 : on peut penser que la probabilité $p$ qu'une personne vote pour elle est proche de 0,58.
Dans le 13e sondage (point vert), la fréquence observée est environ 60 % donc on peut penser que $p$ est proche de 0,60, etc. En observant globalement ce graphique, on peut estimer cette probabilité $p$ à environ 0,57 qui semble correspondre « au milieu » (voir la droite en pointillés noirs) du nuage de points (mais cela reste une estimation !).

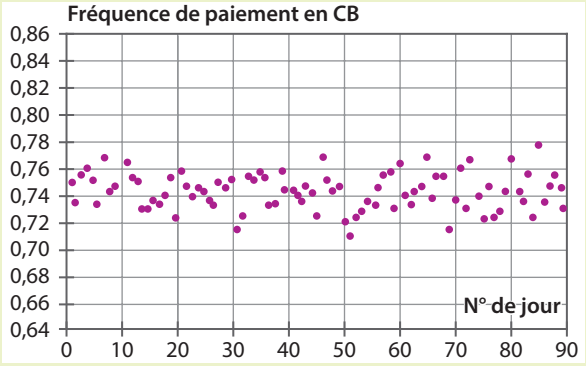


Méthode 9

## Estimer une proportion ou une probabilité

### Énoncé

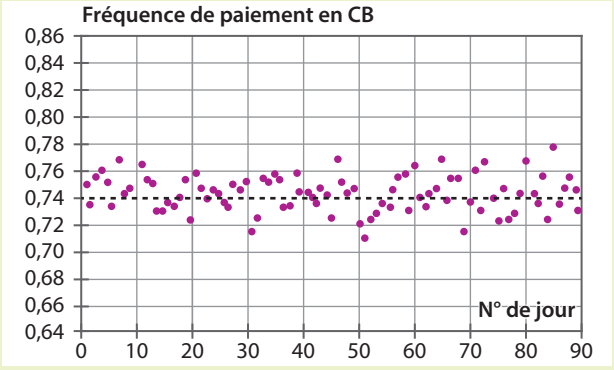
**Un supermarché souhaite estimer la proportion de ses clients qui paient par carte bancaire (CB). Pour cela, pendant 90 jours, on relève la fréquence de clients payant par CB sur les 1 000 premiers clients, de sorte que l'on a 90 échantillons de taille 1 000. Les résultats sont donnés par le graphique ci-contre. Estimer la proportion des clients payant par CB dans ce supermarché.**




### Solution

On observe que les fréquences de paiements par CB sont toutes regroupées autour d'une même valeur : 0,74 (environ !). Cela veut dire que la probabilité qu'un client paie par CB est proche de 0,74. 1

On peut donc penser qu'il y a environ 74 % des clients qui paient par CB dans ce supermarché. 2



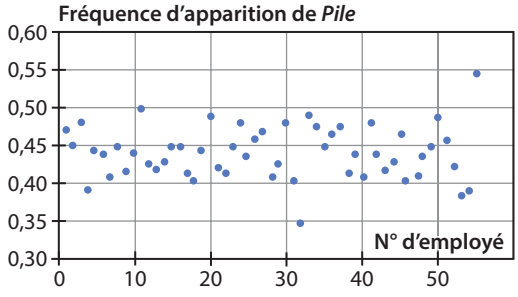

### Conseils & Méthodes

1 On trace une droite horizontale passant « au mieux » au milieu du nuage de points et on lit l'ordonnée correspondante pour estimer la probabilité cherchée (il n'y a pas une seule bonne réponse, cela reste une estimation).

2 Dans le cas d'un tirage dans une population, on traduit la probabilité en proportion dans la population.

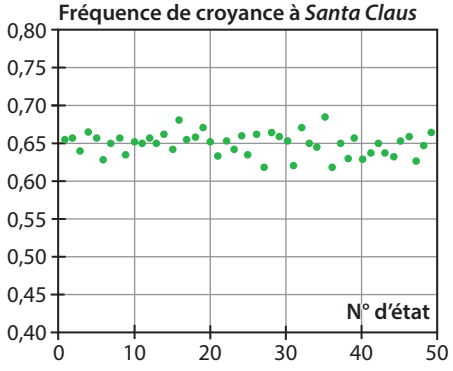
### À vous de jouer !

**21** Pour vérifier que l'une de ses pièces n'est pas bien équilibrée, Monsieur Prèdesesous a demandé à ses 56 employés de la lancer 200 fois. Les fréquences de *Pile* obtenues par ses employés sont données par le graphique suivant.




Estimer la probabilité que la pièce tombe sur *Pile* quand on la lance.

**22** Au États-Unis, on a fait une étude pour savoir si les enfants de 6 ans croient à *Santa Claus* (équivalent du père Noël). Un échantillon de 1 000 enfants de 6 ans a été interrogé dans chaque état. Les résultats des 50 états sont présentés sur le graphique suivant.




Estimer la probabilité qu'un enfant de 6 ans croie à *Santa Claus*.

↪ Exercices 137 à 138 p. 367

# Exercices résolution de problèmes

## J'apprends à choisir le bon schéma

**Réflexe 1**
Identifier le type de schéma à réaliser pour visualiser le problème.

**Réflexe 2**
Faire ce schéma en respectant les hypothèses du problème.

### Énoncé

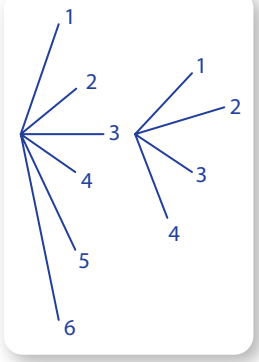
On lance deux dés équilibrés. L'un est cubique et numéroté de 1 à 6, l'autre est tétraédrique et numéroté de 1 à 4. **Quelle est la probabilité que l'écart entre les deux nombres obtenus (c'est-à-dire la différence entre le plus grand et le plus petit) soit égal à 1 ?**

### Solution commentée

**Étape 1** Pour établir la liste de tous les tirages possibles et des écarts correspondants, sans en oublier, il vaut mieux représenter l'expérience aléatoire à l'aide d'un schéma clair et précis.

**Étape 2** Deux schémas sont ici possibles : un arbre de dénombrement ou un tableau à double entrée. Si j'essaie de représenter l'arbre au brouillon, je me rends compte que le nombre de ramifications rend la figure difficilement réalisable et lisible. Donc le tableau est plus adapté dans cette situation. **Réflexe 1**

*Brouillon*




**Étape 3** On réalise le tableau des écarts **Réflexe 2** :

| Écarts | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |

*Réponse rédigée*

À l'aide du tableau schématisant l'expérience aléatoire on dénombre 24 tirages équiprobables au total parmi lesquels 7 donnent un écart égal à 1.
Ainsi la probabilité que l'écart entre les deux nombres obtenus soit égal à 1 est :

$$p(A) = \frac{7}{24}$$

## Je m'entraîne à choisir le bon schéma

### 23 À la boulangerie

Paul rentre dans une boulangerie pour acheter une baguette à 0,90 €. Il a dans sa poche droite quatre pièces : une pièce de 1 €, une de 0,50 €, deux de 0,20 €. Et il a trois pièces dans sa poche gauche : deux pièces de 0,50 € et une pièce de 0,20 €. Il sort au hasard une pièce de sa poche droite et une pièce de sa poche gauche. Quelle est la probabilité que les deux pièces suffisent à payer la baguette ?

### 24 Soirée jeux

Cinq amis se rencontrent pour une soirée jeux. Ils ont prévu de faire deux jeux de hasard : le Nain jaune et le Jeu de l'Oie . Ils sont classés à l'issue de chaque jeu. Le grand gagnant de la soirée est celui qui obtient le plus petit score en multipliant les classements des deux jeux. Par exemple, le joueur classé 3e au Nain jaune et 4e au Jeu de l'Oie fait un score de 12(= 3 × 4). Un joueur a été classé 2e à chaque jeu. Quelle est la probabilité qu'il soit le grand gagnant de la soirée (en partageant éventuellement la première place) ?

### 25 La playlist des favoris

Aline a fait une petite playlist composée de six chansons, une de chacun de ses six artistes préférés (4 chanteuses pop et 2 rappeurs).
Elle lance sa playlist en mode aléatoire. Sachant que la même chanson ne peut pas être jouée deux fois de suite, quelle est la probabilité que les deux premières chansons soient du rap ?

CARTES FLASH
Acquérir des automatismes
www.lienmini.fr/8270-6

# Exercices automatismes

## Rituel 1

### Effectuer mentalement des calculs simples avec des décimaux

**26** Calculer $0,64 + 0,25 - 0,07$.

**27** Calculer $\dfrac{0,4 \times 0,2}{0,1}$.

### Passer d'une écriture à une autre

**28** Écrire sous forme décimale les nombres suivants.

**a)** $\dfrac{4}{5}$ **b)** $\dfrac{1}{4}$ **c)** $\dfrac{3}{10}$

### Utiliser un ordre de grandeur pour contrôler un résultat

**29** Kylian cherche à calculer l'espérance de vie moyenne d'un koala à partir d'une étude statistique sur une population de 100 koalas. Il effectue son calcul à la calculatrice et trouve, en années : $1,378 \times 10^{-1}$.
Son résultat est-il plausible ?

**30** La circonférence de la Terre est environ égale à 40 000 km. Milla calcule la distance entre les deux pôles et trouve $2,0014 \times 10^4$ km.
Son résultat semble-t-il correct ?

## Rituel 2

### Effectuer mentalement des calculs simples avec des fractions

**31** $A = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{9}{4}$.
Calculer A et l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.

**32** $B = \dfrac{4}{5} - \dfrac{9}{10}$.
Calculer B et l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.

### Résoudre une équation du premier degré

**33** Résoudre l'équation $2x - 3 = 5 + 4x$.

### Effectuer une application numérique d'une formule mathématique

**34** $C = \dfrac{5x + 1}{t^2}$
Calculer C lorsque $x = 4$ et $t = -3$.

**35** Le volume d'une boule se calcule avec la formule :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Calculer, en $cm^3$, le volume d'une boule de rayon 5 cm.

## Rituel 3

### Effectuer mentalement des calculs simples avec des pourcentages

**36** Dans un panier de 20 kiwis, seulement 5 sont mûrs. Quel pourcentage représentent les kiwis mûrs parmi l'ensemble des kiwis ?

**37** Dans un lycée de 650 élèves, 10 % des élèves suivent un cours d'italien. Combien sont-ils ?

### Passer d'une écriture à une autre

**38** Écrire sous forme fractionnaire irréductible les nombres suivants.
**a)** 0,4 **b)** 0,3 **c)** 1,5

**39** Écrire sous forme décimale les nombres suivants.

**a)** $\dfrac{29}{100}$ **b)** $\dfrac{49}{50}$ **c)** $\dfrac{7}{20}$ **d)** $\dfrac{3}{25}$

**40** Écrire le nombre 0,000 06 en notation scientifique.

### Résoudre une équation du premier degré

**41** Résoudre l'équation $2(x - 1) = x$.

**42** Résoudre l'équation $5x + 17 = 0$.

## Rituel 4

### Effectuer mentalement des calculs simples avec des décimaux

**43** Calculer $\dfrac{2 \times 1,25}{0,5}$.

**44** Calculer $0,259 + 0,541 + 0,037$.

### Utiliser un ordre de grandeur pour contrôler un résultat

**45** Une bactérie mesure environ $0,4 \times 10^{-6}$ mètres de longueur. Loïc affirme que si on empilait un milliard de bactéries côte à côte, cela ferait une tour comparable à la tour Eiffel (330 m). Est-ce vrai ?

### Appliquer un pourcentage d'augmentation ou de diminution

**46** Le prix d'un matelas à 180 € baisse de 20 % au moment des soldes. À quel prix est-il alors vendu ?

**47** Le nombre d'habitants d'un village de 800 personnes augmente de 25 % pendant l'été. Combien de personnes vivent alors dans le village l'été ?

↪ Travaillez les méthodes des automatismes p. 8

# Exercices d'entraînement

## Je consolide mes acquis

### 48 Fréquence

On a lancé 15 fois un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4 et on a noté les fréquences d'apparition dans le tableau suivant.

| Numéro | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Fréquence | $\frac{4}{15}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ | ... |

Quelle est la fréquence d'apparition du 4 ?

### 49 Événement

On lance deux dés bien équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6. On calcule la somme des numéros obtenus sur chaque dé.

**a)** Quelle est la probabilité de l'événement A : « La somme est égale à 13 » ?

**b)** Comment appelle-t-on un tel événement ?

### 50 Probabilité

Un sac opaque contient sept billes noires, deux billes blanches, trois billes bleues et quatre rouges. On tire au hasard une bille du sac. Déterminer la probabilité :

**a)** d'obtenir une bille rouge.

**b)** de ne pas tirer une bille noire.

### 51 Proportion et probabilité

On considère trois boîtes :

- la boîte A contient 10 jetons dont 1 noir.
- la boîte B contient 15 % de jetons noirs.
- la boîte C contient 35 jetons blancs et 5 noirs.

On choisit une boîte puis on tire un jeton au hasard.

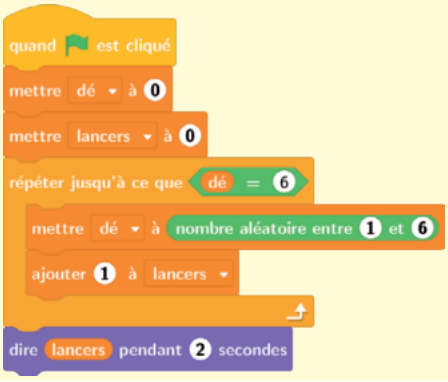
**a)** Dans quelle boîte a-t-on le plus de chances d'obtenir un jeton noir ?

**b)** La boîte B contient 18 jetons noirs. Combien y a-t-il de jetons au total dans la boîte ?

**c)** On ajoute 1 jeton noir dans la boîte C. Déterminer le nombre de jetons blancs à ajouter dans la boîte C pour que la probabilité de tirer un jeton noir reste égale à $\frac{1}{8}$.

### 52 Scratch

Que fait le programme suivant ?




## Questions de cours

**On considère une expérience aléatoire d'univers Ω constitué de *n* issues, où *n* est un entier naturel.**

**53** Qu'appelle-t-on loi de probabilité de l'expérience aléatoire ?

**54** Qu'est-ce qu'une loi équirépartie sur Ω ? Quelle est la probabilité d'une issue dans ce cas ?

**55** Qu'appelle-t-on événement ?

**56** Qu'appelle-t-on événement contraire ?

**57** Quelle égalité relie la probabilité d'un événement et de son contraire ?

**58** Quelle égalité relie les probabilités des événements A, B, A ∩ B et A ∪ B ?

**59** Citer des instructions sur calculatrice ou sur ordinateur qui permettent de simuler le tirage au sort d'un nombre réel entre 0 et 1. Tableur

**60** Comment fait-on pour estimer la probabilité d'un événement à partir d'échantillons ?

## Modéliser une expérience aléatoire

Méthode 1 p. 347

**61** Jean choisit au hasard un nombre pair entre 1 et 15.

1. **a)** Décrire l'univers de cette expérience aléatoire.
**b)** De combien d'issues cet univers est-il constitué ?
2. Reprendre les questions précédentes si Jean choisit un multiple de 6 entre 1 et 35.

**62** Un enseignant choisit au hasard un élève de sa classe de Seconde et lui demande quel est le moyen de transport qu'il a utilisé pour venir au lycée. Déterminer l'univers de cette expérience aléatoire en complétant Ω = {marche ; ...}.

**63** On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on soustrait le plus petit résultat obtenu du plus grand. Le résultat est nul si le lancer produit un double.

1. Décrire l'univers associé à l'expérience aléatoire.
2. Préciser le nombre d'issues qui le composent.

**64** Elias a 12 T-shirts dans son armoire, 3 à manches longues et 9 à manches courtes.
Il en sort un au hasard et regarde la longueur des manches. Quelle est la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire ?

**65** On lance un dé à 20 faces numérotées de 1 à 20. Quelle est la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire ?

**66** Une urne contient 10 boules numérotées de 0 à 9. La boule 0 est d'une couleur noire mate, les boules impaires sont rouges brillantes, les autres sont vertes brillantes. Donner pour chaque situation suivante sa loi de probabilité.
**a)** On tire une boule et on regarde le nombre obtenu.
**b)** On tire une boule et on regarde sa couleur.
**c)** On tire une boule et on regarde son éclat (mat ou brillant).

**67** Au moment de la remise du diplôme du baccalauréat dans un établissement scolaire on a relevé l'âge des lauréats. La répartition est donnée dans le tableau suivant.

| **Âge** (ans) | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Proportion** | 0,5 % | 39 % | 53 % | 6,5 % | 1 % |

La proviseure remet son diplôme à un élève choisi au hasard et lui demande son âge. Déterminer la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire.

**68** Une petite école de musique a des élèves inscrits dans quatre classes d'instruments selon la répartition suivante.

| **Instrument** | Guitare | Batterie | Piano | Clarinette |
|---|---|---|---|---|
| **Nombre d'élèves** | 19 | 15 | 21 | 14 |

On choisit un élève au hasard dans cette école de musique. Déterminer la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire.

**69** Dans un collège la répartition du personnel est la suivante.

| **Personnel** | Enseignants | Agents administratif | Agents d'entretien |
|---|---|---|---|
| **Effectif** | 42 | 21 | 7 |

On choisit au hasard un membre du personnel et on regarde sa catégorie professionnelle. Quelle est la loi de probabilité de cette expérience aléatoire ?

**70** Voici le cycle d'allumage d'un feu tricolore : 45 s pour le feu vert, 5 s pour le feu orange, 20 s pour le feu rouge. On admet qu'un automobiliste arrive par hasard devant un feu tricolore fonctionnel. Proposer une loi de probabilité associée à cette expérience.

**71** Imaginer des expériences aléatoires pouvant être modélisées par les lois de probabilité suivantes.

**a)**

| **Issue** | Noire | Bleue | Rouge | Jaune |
|---|---|---|---|---|
| **Probabilité** | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

**b)**

| **Issue** | Chemise | Tee-shirt | Polo |
|---|---|---|---|
| **Probabilité** | 0,35 | 0,5 | 0,15 |

**72** On lance cinq fois une pièce de monnaie.
La sortie de *Pile* rapporte 1 point. La sortie de *Face* ne rapporte rien. On s'intéresse à la somme des points obtenus à la suite des cinq lancers.
**1.** Décrire l'univers associé à l'expérience aléatoire.
**2.** Préciser le nombre d'issues qui le composent.
**3.** Est-on dans une situation d'équiprobabilité ?

**73** À partir du lancer simultané de deux dés tétraédriques dont les faces sont numérotées de 1 à 4, imaginer cinq expériences aléatoires conduisant à cinq univers différents.

**74** Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur de $t$ qui permet de définir une loi de probabilité.

**a)**

| **Issue** | Vert | Orange | Rouge |
|---|---|---|---|
| **Probabilité** | 0,5 | $t$ | 0,3 |

**b)**

| **Issue** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Probabilité** | $t$ | $2t$ | $3t$ | $4t$ | $5t$ | $6t$ |

## Probabilité d'un événement dans le cas général

Méthode 2 p. 349

**75** Soit un dé pipé dont la loi de probabilité est la suivante.

| **Face** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Probabilité** | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,15 | 0,25 | 0,2 |

Calculer la probabilité des événements suivants.
- A : « La face obtenue est impaire. »
- B : «La face obtenue est supérieure ou égale à 5.»

**76** La répartition des emplois selon le sexe des salariés d'une entreprise est donnée par le tableau ci-dessus.

| | **Cadre** | **Ouvrier** | **Employé** |
|---|---|---|---|
| **Femme** | 3 % | 5 % | 21 % |
| **Homme** | 5 % | 60 % | 6 % |

On tire au sort une personne de l'entreprise pour lui faire gagner un voyage. Calculer la probabilité des événements suivants.
- A : « Le voyage est gagné par une femme. »
- B : « Le voyage est gagné par un cadre. »
- C : « Le voyage est gagné par une femme cadre ou un homme employé ou une femme ouvrière ».

**77** En minutant la durée de chaque feu, Sonia a modélisé la probabilité de tomber en voiture sur une certaine couleur par la loi suivante.

| Couleur | Vert | Orange fixe | Rouge | Orange clignotant |
|---|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,55 | 0,05 | 0,395 | 0,005 |

**1.** Déterminer la probabilité qu'elle doive s'arrêter à ce feu.
**2.** Déterminer la probabilité de tomber sur la couleur orange.

**78** Thomas est un habitué d'un restaurant. Les serveurs le connaissent si bien qu'ils ont modélisé l'expérience aléatoire « l'accompagnement choisi par Thomas avec son plat » par la loi de probabilité suivante.

| Issue | Riz | Pâtes | Patates sautées | Purée | Frites | Haricots verts |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,2 | 0,3 | 0,05 | 0,15 | 0,28 | 0,02 |

**1.** Déterminer la probabilité que Thomas ait pris un accompagnement composé de légumes verts.
**2.** Déterminer la probabilité que Thomas ait pris un accompagnement constitué de pommes de terre.

**79** Dans son cadre numérique, Séréna a chargé des photos de vacances dont la répartition en pourcentage selon sa destination est donnée ci-dessous.

| Destination | France | Italie | Suède | Maroc | Canada |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de photos (en %) | 51 | 19 | 6 | 14 | 10 |

Séréna allume son cadre, quelle est la probabilité que la photo affichée soit celle d'un voyage dans un pays européen ?

**80 Modéliser une situation**

Jean possède un dé pipé.
Il lui semble que la face 6 tombe trois fois plus que les autres faces.
**1.** Proposer une loi de probabilité pour modéliser cette expérience aléatoire.
**2.** Déterminer la probabilité que le résultat d'un lancer du dé soit pair.

↪ Résolution de problèmes p. 80 et p. 217

**81** Un univers associé à une expérience aléatoire est constitué de trois issues A, B et C.
La loi de probabilité vérifie $p(A) = t^2$, $p(B) = t$ et $p(C) = \frac{1}{4}$
Déterminer $t$.

## Probabilité d'un événement dans le cas d'une loi équirépartie

Méthode 3 p. 349

**82** Manu possède un dé tétraédrique. Sur chacune des faces est inscrit un numéro : 2 ; 6 ; 7 et 11. Il lance le dé.
**1.** Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 7.
**2.** Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre premier.

**83** En fin de partie de Scrabble® il reste les lettres suivantes dans le sac opaque dans lequel chaque joueur pioche les lettres au fur et à mesure de la partie. Un joueur pioche une lettre au hasard.

**1.** Quelle est la probabilité qu'il obtienne une voyelle ?
**2.** Quelle est la probabilité qu'il obtienne une lettre du mot « fourmi » ?

**84** Léa prend une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes.
Déterminer la probabilité que la carte soit :
**a)** l'as de pique.
**b)** un pique.
**c)** une figure (roi, reine ou valet).

**85** On lance un dé à douze faces numérotées de 1 à 12.
**1.** Déterminer la probabilité que le numéro obtenu soit 12.
**2.** Déterminer la probabilité que le numéro obtenu soit un nombre premier.
**3.** Déterminer la probabilité que le numéro obtenu soit un multiple de 3 plus petit que 10.

**86** Au casino le jeu de « la roulette » consiste à faire tourner la roue suivante avec une bille à l'intérieur qui va rouler jusqu'à ce que la roue ralentisse et que la bille finisse par s'arrêter sur un des numéros.

On considère les événements suivants.
- A : « La bille s'arrête sur un numéro rouge. »
- B : « La bille s'arrête sur un nombre impair. »
- C : « La bille s'arrête sur un numéro vert. »

Déterminer $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.

**87** Un magasin d'électroménager dispose de machines à laver, de sèche-linge et de grille-pain, tous fabriqués en Chine, au Japon ou en Allemagne. Le tableau suivant indique le nombre d'objets produits dans chaque pays.

| | Machine à laver | Sèche-linge | Grille-pain |
|---|---|---|---|
| **Allemagne** | 230 | 70 | 40 |
| **Chine** | 180 | 15 | 120 |
| **Japon** | 50 | 300 | 240 |

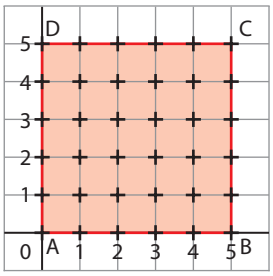
Après avoir remporté un concours, un client gagne un produit tiré au sort dans ce magasin.
**1.** Déterminer la probabilité que ce soit une machine à laver fabriquée en Europe.
**2.** Déterminer la probabilité que ce soit un sèche-linge.
**3.** Déterminer la probabilité que le produit ait été fabriqué en Asie.

**88** Un journaliste décide d'interviewer un médaillé des Jeux Olympiques d'hiver 2020 parmi les trois premières nations au classement des médailles. La répartition des médaillés est donnée ci-dessous.

| | Or | Argent | Bronze |
|---|---|---|---|
| **Norvège** | 16 | 8 | 13 |
| **Allemagne** | 12 | 10 | 5 |
| **Chine** | 9 | 4 | 2 |

Pour toutes les questions suivantes les résultats seront arrondis au centième.
**1.** Le journaliste choisit au hasard un sportif médaillé.
Déterminer la probabilité qu'il interviewe :
**a)** un Allemand médaillé d'argent.
**b)** un médaillé d'or.
**c)** un Chinois.
**d)** un Chinois ou un médaillé de bronze.
**2.** Il apprend qu'il ne peut pas interviewer les médaillés chinois. Parmi ceux qui restent, quelle est la probabilité qu'il interviewe un médaillé d'argent ?
**3.** Finalement il décide d'interviewer un médaillé norvégien. Il en choisit un au hasard.
Quelle est la probabilité qu'il soit médaillé d'or ?

**89** Dans le repère orthonormé ci-contre, on choisit au hasard un point à coordonnées $(x, y)$ entières situé à l'intérieur (ou sur) le carré ABCD.
**1.** Quelle est la probabilité que $y = x$ ?
**2.** Quelle est la probabilité que $x + y - 6 = 0$ ?




## Intersections, réunions et événements contraires

**90** Lenny répond au hasard à un QCM comportant cinq questions. Quel est l'événement contraire de : « Lenny a répondu juste à au moins deux questions » ?

**91** On tire au hasard une pièce d'un échiquier. Soit l'événement C : « La pièce est une tour ou elle est blanche. »
Exprimer l'événement $\overline{C}$ par une phrase.

**92** On choisit au hasard un élève dans une classe.
On considère les événements suivants.
• A : « Il porte des lunettes. »
• B : « Il n'a aucun stylo. »
Décrire à l'aide d'une phrase les événements suivants.
**a)** $\overline{A}$ **b)** $A \cap B$ **c)** $A \cup B$ **d)** $\overline{B}$

**93** **1.** On lance un dé cubique. Exprimer simplement le contraire des événements suivants.
• A : « Le résultat du dé est pair. »
• B : « Le résultat du dé est supérieur ou égal à 5. »
• C : « Le résultat du dé est un multiple de 3 ou de 5. »
**2.** Exprimer simplement les événements suivants.
**a)** $A \cap B$ **b)** $\overline{A} \cap C$ **c)** $\overline{A \cup C}$

**94** Deux épidémies sévissent en même temps dans un lycée : une gastro-entérite et un rhume.
On choisit un élève au hasard et on nomme les événements suivants.
• G : « L'élève a la gastro-entérite. »
• R : « L'élève a un rhume. »
Décrire à l'aide des événements G et R :
**a)** « L'élève a la gastro-entérite et le rhume. »
**b)** « L'élève a le rhume mais pas la gastro-entérite. »
**c)** « L'élève a au moins une des deux maladies. »
**d)** « L'élève n'a aucune des deux maladies. »

## Opérations sur les événements et calcul de probabilités

Méthode 4 p. 351

**95** On considère un événement A tel que $p(A) = \frac{3}{11}$.
Déterminer $p(\overline{A})$.

**96** On considère deux événements A et B tels que : $p(A) = 0{,}6$, $p(B) = 0{,}5$, $p(A \cap B) = 0{,}3$.
Calculer $p(A \cup B)$.

**97** On considère deux événements A et B tels que : $p(A) = \frac{5}{7}$, $p(A \cap B) = \frac{3}{14}$, $p(A \cup B) = \frac{13}{14}$.
Calculer $p(B)$.

**98** A et B sont deux événements incompatibles tels que $p(A) = 0{,}4$ et $p(B) = 0{,}22$.
Déterminer la probabilité des événements suivants.
**a)** $\overline{A}$ **b)** $\overline{B}$ **c)** $A \cup B$

**99** C et D sont deux événements tels que $p(C) = 0{,}8$ et $p(D) = 0{,}5$. Sont-ils incompatibles ?

**100** Soit S et T deux événements tels que $p(S) = 0{,}5$, $p(T) = 0{,}6$ et $p(S \cup T) = 0{,}9$. Calculer les probabilités suivantes.
**a)** $p(S \cap T)$ **b)** $p(\overline{S \cup T})$ **c)** $p(\overline{S \cap T})$

**101** Robin des Bois atteint sa cible avec une probabilité de 0,99. Quelle est la probabilité qu'il rate sa cible ?

**102** On lance un dé équilibré à huit faces numérotées de 1 à 8. On considère les événements :
• A : « Le nombre obtenu est premier. »
• B : « Le nombre obtenu est inférieur ou égal à 4. »
**1.** Décrire par une phrase les événements suivants.
**a)** $A \cap B$ **b)** $A \cup B$ **c)** $\overline{A} \cap B$ **d)** $A \cup \overline{B}$
**2. a)** Pour chacun de ces événements déterminer le nombre d'issues qui les réalisent.
**b)** En déduire la probabilité de chacun d'eux.

**103** Raphaël observe sa pile de livres à lire, constituée de livres achetés ou empruntés à la bibliothèque. La répartition de ces livres par genre est donnée par le tableau suivant.

| | Roman | Théâtre | Poésie | Total |
|---|---|---|---|---|
| **Livre acheté** | 1 | 2 | 4 | 7 |
| **Livre emprunté** | 4 | 1 | 0 | 5 |
| **Total** | 5 | 3 | 4 | 12 |

Motivé, Raphaël décide de choisir un livre au hasard afin d'entamer sa lecture. On considère les événements suivants.
• R : « Le livre choisi est un roman. »
• E : « Le livre choisi est emprunté. »
**1. a)** Décrire à l'aide d'une phrase les événements $R \cap E$ et $R \cup E$.
**b)** Déterminer la probabilité des événements précédents.
**2.a)** Définir à l'aide d'une phrase l'événement $\overline{R}$.
**b)** Déterminer sa probabilité.

**104** Une entreprise fabrique des ordinateurs portables. Ils peuvent présenter deux défauts :
• un défaut de clavier,
• un défaut d'écran.
Une étude statistique montre que :
• 2 % présentent un défaut d'écran,
• 2,4 % présentent un défaut de clavier,
• 1,5 % présentent les deux défauts.
**1.** On choisit au hasard un ordinateur.
Définir une loi de probabilité pour modéliser ce tirage.
**2.** On considère les événements suivants.
• E : « L'ordinateur présente un défaut d'écran. »
• C : « L'ordinateur présente un défaut de clavier. »
Déterminer $p(E)$, $p(C)$ et $p(E \cap C)$.
**3.** On considère les événements suivants.
• « L'ordinateur présente au moins un défaut. »
• « L'ordinateur ne présente que le défaut d'écran. »
**a)** Traduire ces deux événements à l'aide de E et C.
**b)** Calculer leur probabilité.

**105** Andy est abonné à une plateforme vidéo qui lui propose des films.

Les catégories et la durée des films sont répertoriées dans le tableau suivant.

| Catégorie / Durée | Comédie | Policier | Action/ Aventure | Total |
|---|---|---|---|---|
| **Supérieure à 2 h** | 100 | 42 | 133 | 275 |
| **Inférieure ou égale à 2 h** | 150 | 8 | 67 | 225 |
| **Total** | 250 | 50 | 200 | 500 |

Andy choisit un film au hasard.
On considère les événements suivants.
• M : « Le film dure moins de 2 h. »
• A : « Le film est un film d'action. »
• C : « Le film est une comédie. »
**1.** Déterminer la probabilité des événements C et M.
**2. a)** Définir avec une phrase les événements $\overline{A}$, $M \cup A$, $\overline{M} \cap C$ et $\overline{A} \cap \overline{C}$.
**b)** Déterminer leur probabilité.
**3.** Ce soir Andy est fatigué, il décide de regarder un film de moins de 2 h 00.
Quelle est la probabilité que ce soit une comédie ?

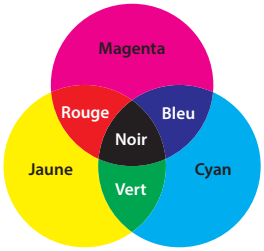
**106** Le standard d'un cabinet médical dispose de deux lignes de téléphone.
On considère les événements suivants.
• $O_1$ : « La première ligne est occupée. »
• $O_2$ : « La seconde ligne est occupée. »
Une étude statistique montre que :
• $p(O_1) = 0{,}4$
• $p(O_2) = 0{,}3$
• $p(O_1 \cap O_2) = 0{,}2$.
Calculer la probabilité des événements suivants.
**a)** « La ligne 1 est libre. »
**b)** « Au moins une des lignes est occupée. »
**c)** « Au moins une des lignes est libre. »

## Utiliser un tableau à double entrée

Méthode 5 p. 352

**107** Gabriel possède deux dés tétraédriques équilibrés numérotés de 1 à 4. Il lance les deux dés et note le produit des deux nombres obtenus.
1. Représenter la situation par un tableau à double entrée.
2. Déterminer l'univers.
3. Donner la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire.
4. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 5.

**108** Kaël a deux boîtes contenant chacune un tube de peinture cyan, un tube de peinture magenta et un tube de peinture jaune. Il décide de choisir la couleur qu'il va utiliser pour son dessin en procédant de la façon suivante : il prend successivement, au hasard, un tube dans la première boîte puis un tube dans la deuxième, puis il mélange les deux peintures.
1. À l'aide du schéma ci-contre, réaliser un tableau présentant tous les cas possibles.
2. En déduire la loi de probabilité des couleurs obtenues.




**109** Célia veut s'acheter un collier et une paire de boucles d'oreilles. Elle hésite entre trois colliers à 25 €, 32 € et 40 €, et entre quatre paires de boucles d'oreilles à 20 €, 25 €, 32 € et 36 €.
Elle décide de choisir au hasard le collier et la paire de boucles d'oreilles.
Déterminer la probabilité que ça lui coûte plus que 60 €.

**110** Deux familles de 4 personnes jouent à un jeu par équipe de 2 formées d'un membre de chaque famille. Les binômes ont été formés aléatoirement. On choisit au hasard un binôme. Sachant que les âges respectifs des membres de la famille Joyeux sont : 38 ; 37 ; 11 et 8 ans et ceux de la famille Drôle sont : 42 ; 41 ; 15 et 12 ans, déterminer la probabilité que la moyenne d'âge du binôme soit comprise entre 24 et 28 ans.

## Utiliser un arbre

Méthode 6 p. 353

**111** Un sac contient quatre jetons sur lesquels sont indiqués les numéros –2 ; –1 ; 1 et 2. On tire au hasard successivement et sans remise deux jetons du sac.
1. Représenter la situation par un arbre.
2. Quelle est la probabilité que :
**a)** la somme des deux nombres obtenus soit nulle ?
**b)** la somme des deux nombres soit égale à –3 ?

**112** Un couple souhaite former une famille avec trois enfants.
1. Faire un arbre pour représenter les différentes familles possibles selon le sexe des enfants.
2. Quelle est la probabilité que les enfants ne soient pas tous du même sexe ?

**113** Au restaurant scolaire, les élèves ont le choix :
• entre deux entrées (artichaut ou betterave),
• entre trois plats (curry végétarien, daurade aux légumes et escalope milanaise),
• entre deux desserts (fromage ou gâteau).
Un menu se compose :
• d'une entrée, • d'un plat, • d'un dessert.

1. En utilisant un arbre, représenter tous les menus possibles.
2. Combien de menus différents sont possibles ?
3. On choisit un menu au hasard. Quelle est la probabilité :
**a)** qu'il comporte une escalope ?
**b)** qu'il comporte de l'artichaut et du fromage ?
**c)** qu'il ne comporte pas de poisson ?

**114** Un groupe de quatre amis, Émile, Zora, Gaston et Hélène sont dans un bateau. Ils tirent au sort celui qui va ramer et, parmi les noms restants, celui qui va écoper.
1. Représenter cette situation par un arbre.
2. Déterminer les probabilités suivantes.
**a)** C'est un garçon qui rame.
**b)** Hélène écope.
**c)** Les deux qui travaillent sont de même sexe.

**115** Trois CD notés a, b et c ont respectivement des boîtes nommées A, B et C. On range les trois CD au hasard dans les boîtes sans voir leur étiquette.
1. Combien de rangements sont possibles ?
2. Quelle est la probabilité :
**a)** que les trois CD soient bien rangés ?
**b)** qu'exactement un CD soit bien rangé ?
**c)** qu'exactement deux CD soient bien rangés ?
3. En déduire la probabilité qu'aucun CD ne soit bien rangé.

### 116 Choisir le bon schéma

Antonin a quatre pulls dans son armoire : un blanc, un bleu, un noir et un rouge. Il en sort trois successivement et au hasard pour les mettre dans sa valise.
Quelle est la probabilité qu'il obtienne les trois couleurs du drapeau français :
**a)** dans le bon ordre ? **b)** dans le mauvais ordre ?

↪ Résolution de problèmes p. 298 et p. 358

**117** Ana, Zélie, Ruben et Yamin font un jeu de hasard. En fonction des résultats du jeu ils sont classés dans un certain ordre 1er, 2e, 3e, 4e. Avant de faire le jeu, Ruben se demande quelle est la probabilité qu'il soit à une place d'écart de Zélie. L'aider à répondre à sa question.

**118** Chimie
Anis fait des expériences.
Il a placé dans quatre tubes à essai, en quantité égale, de l'eau à des températures différentes : 5 °C, 13 °C, 43 °C et 71 °C. Il verse aléatoirement le contenu d'un des deux tubes « froids » dans l'un des deux tubes « chauds ». Puis il ajoute aléatoirement le contenu d'un des deux tubes restant dans le mélange obtenu précédemment. Sachant que, dans cette configuration, la température finale est la moyenne des températures des trois tubes, déterminer la probabilité que la température du mélange final soit inférieure à 29 °.

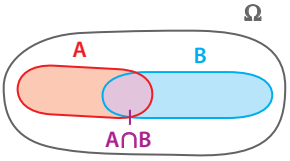
## Utiliser un diagramme de Venn

Méthode 7 p. 353

**119** 910 personnes se sont inscrites pour aller à au moins un des deux concerts organisés lors d'un week-end musical. 575 personnes sont allées au concert du samedi, 438 sont allées au concert du dimanche et 106 sont allées aux deux concerts. Combien de personnes inscrites ne sont finalement venues à aucun concert ?

**120** Un groupe de 10 amis se retrouve pour un week-end à la campagne. 7 ont le permis de conduire une voiture, 6 ont le permis de conduire une moto et 3 n'ont aucun permis de conduire. On rencontre au hasard l'un d'entre eux. Quelle est la probabilité qu'il ait les deux permis de conduire ?

**121** On a représenté sur le diagramme de Venn l'événement $A \cap B$. Construire un diagramme de Venn sur le même modèle pour chacun des événements suivants.




**a)** $A \cap \overline{B}$ **b)** $A \cup \overline{B}$ **c)** $\overline{A \cap B}$
**d)** $\overline{A \cup B}$ **e)** $\overline{A} \cap \overline{B}$ **f)** $\overline{A} \cup \overline{B}$

**122** Soit A et B deux événements tels que :
$p(A) = 0{,}5$, $p(B) = 0{,}5$ et $p(A \cap B) = 0{,}25$
À l'aide de l'exercice précédent, déterminer :
**a)** $p(\overline{A} \cap B)$ **b)** $p(A \cup \overline{B})$

### Esprit critique

**123** On considère deux événements V et F tels que :
$p(V) = 0{,}4$, $p(F) = 0{,}3$ et $p(V \cup F) = 0{,}8$.
Aïssatou prétend que ce n'est pas possible. A-t-elle raison ? Discuter.

**124** On considère deux événements V et F tels que :
$p(V) = 0{,}6$, $p(F) = 0{,}4$ et $p(V \cap F) = 0{,}5$.
Simon prétend que ce n'est pas possible. A-t-il raison ? Discuter.

**125** On considère deux événements V et F tels que $p(V) = 0{,}6$ et $p(V \cup F) = 0{,}55$.
Zoé prétend que ce n'est pas possible. A-t-elle raison ? Discuter.

**126** On choisit au hasard un doigt d'une des deux mains. On considère les événements suivants.
• I : « Le doigt est un index. »
• G : « Le doigt est sur la main gauche. »
Calculer les probabilités des événements suivants.
**a)** I **b)** G
**c)** $I \cup G$ **d)** $I \cap G$
**e)** $\overline{I \cup G}$ **f)** $\overline{I \cap G}$
**g)** $\overline{I} \cap \overline{G}$ **h)** $\overline{I} \cup G$

**127** Développement durable
Suite à une enquête réalisée sur 250 personnes on a obtenu les résultats suivants : 55 ont répondu qu'elles s'habillent avec des vêtements de seconde main, 134 n'utilisent pas leur voiture pour se rendre à leur travail, 49 font les deux. On choisit au hasard l'une de ces 250 personnes. Quelle est la probabilité qu'elle ne s'habillent pas avec des vêtements de seconde main et qu'elle utilise sa voiture pour se rendre à son travail ?

## Simuler un échantillon associé à une expérience aléatoire à deux issues

Méthode 8 p. 355

**Dans tous les exercices de simulation, on considère que, pour tous les programmes Python, le module `random` est importé.**

**128** En 2022, 70 % des Français ont déclaré avoir joué au moins une fois à un jeu vidéo.
Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il permette de simuler le tirage au sort d'un Français selon qu'il a joué au moins une fois à un jeu vidéo ou non.

```
if random.random()<...:
    print("au moins une fois")
else :
    print("...")
```

**129** Tableur
Le taux d'obésité chez les hommes adultes aux États-Unis est de 35 %.
1. Recopier et compléter la formule du tableur ci-dessous qui simule le tirage au sort d'un homme aux États-Unis selon qu'il souffre d'obésité ou non :

`=SI(ALEA()<...;«obèse» ; «...»)`

2. Même question pour les femmes, dont le taux d'obésité est de 40 %.

**130** Tableur Python
En 2020, 22,4 % des bacheliers ont poursuivi leurs études en section STS.
Écrire une formule de tableur ou un programme en langage **Python** qui simule le tirage au sort d'un bachelier de 2020 au hasard selon qu'il a poursuivi ses études en section STS ou non.

**131** Dans une classe, on compte 17 filles et 15 garçons. Recopier et compléter le programme en langage **Python** suivant permettant de simuler le tirage au sort d'un élève de la classe suivant qu'il s'agisse d'une fille ou d'un garçon. Python

```
if random.randint(1,32)<=...:
    print("...")
else :
    print("Garçon")
```

**132** Julien possède 10 montres dont 3 avec un bracelet en cuir marron. Tous les soirs, il enlève sa montre, la remet avec les autres puis, le matin, il en choisit une au hasard. Recopier et compléter le programme en langage **Python** suivant afin qu'il simule l'échantillon correspondant aux montres portées par Julien pendant 30 jours. Python

```
for i in range (1,...):
    if random.randint(1,10)<=...:
        print("cuir marron")
    else:
        print("...")
```

**133** Le joueur de basketball Stephen Curry a un taux de réussite de 90,4 % au lancer-franc. Python

**1.** On considère le programme en langage **Python** suivant.

```
effectif=0
for i in range (1,6):
    if random.random()<=0.904:
        effectif= effectif+1
```

**a)** Quelle est la valeur de la variable `effectif` en fin de programme si `random.random()` a pris successivement les valeurs `0.52` ; `0.89` ; `0.23` ; `0.28` et `0.95` arrondies à 0,01 près ?

**b)** À quoi ce résultat correspond-il en termes de simulation de lancers-francs tentés par Stephen Curry ?

**2.** Modifier le programme précédent afin qu'il affiche le nombre de lancers-francs réussis lorsque l'on en simule un échantillon de 350 tirés par Stephen Curry.

**134** En Inde, 30 % de la population est végétarienne. Python

**1.** Écrire un programme qui simule un échantillon de 200 Indiens selon qu'ils sont végétariens ou non.

**2.** Recopier et compléter le programme en langage **Python** suivant afin qu'il calcule et affiche le nombre d'indiens mangeant de la viande dans l'échantillon.

```
effectif=0
for i in range (1,...):
    if random.random()>=...:
        effectif= effectif+1
print(...)
```

**135** En 2020, 39,4 % des bacheliers ont poursuivi leurs études à l'université. Python

**1. a)** Recopier et compléter le programme en langage **Python** suivant afin qu'il simule un échantillon de 100 bacheliers de 2020 suivant qu'ils ont poursuivi leurs études à l'université ou non.

```
for i in range (1,...):
    if random.random()<...:
        print("...")
    else:
        print("Pas d'université")
```

**b)** Modifier ce programme pour qu'il calcule et affiche le nombre de bacheliers ayant poursuivi leurs études à l'université dans l'échantillon de 100 bacheliers.

**2.** Reprendre la question **1. b)** pour un échantillon de 1 316 bacheliers.

## 136 Décomposer un problème en sous-problèmes

Python

Lors de la saison 2021-2022 de Ligue 1 de football, 10 % des buts ont été marqués sur pénalty.

**1.** Écrire un programme en langage **Python** permettant de simuler un échantillon de 991 buts suivant que ce sont des pénaltys ou non (l'affichage doit être `Pénalty` ou `Pas pénalty`).

**2.** L'adapter afin d'écrire une fonction `pen()` renvoyant le nombre de pénaltys dans l'échantillon.

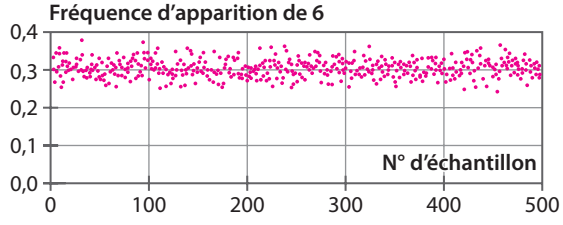
↳ Résolution de problèmes p. 31

## Estimer une probabilité ou une proportion

Méthode 9 p. 357

**137** Un escroc a fabriqué un dé truqué afin que la face 6 soit favorisée.

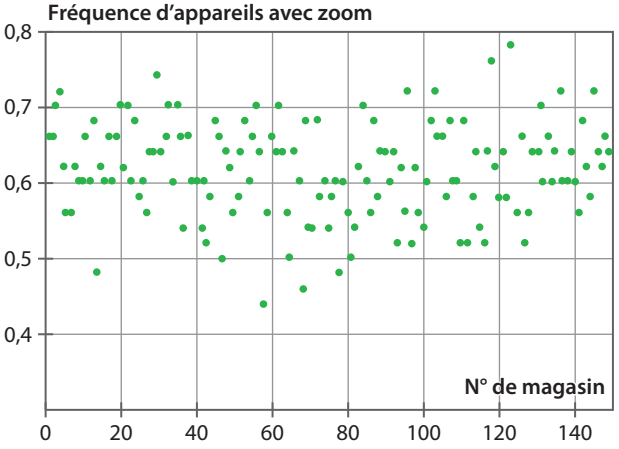
Afin de connaître la probabilité d'obtention de cette face, il a demandé à son neveu de lancer 400 fois le dé et de calculer la fréquence de 6 obtenus sur les 400 lancers. Il lui a ensuite demandé de recommencer 499 fois de sorte qu'il a obtenu 500 fréquences représentées ci-dessous.




**1.** Estimer la probabilité d'obtention du 6.

**2.** L'escroc souhaitait tripler la probabilité d'obtention du 6, est-ce réussi ?

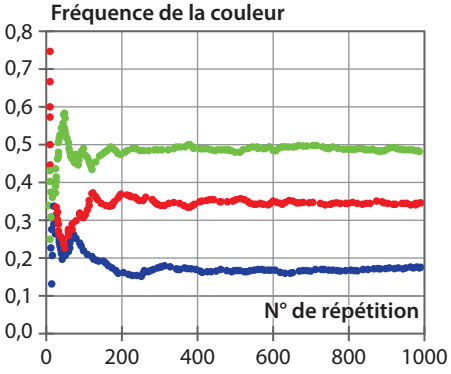
**138** Une chaîne de magasins de photographie veut estimer le pourcentage $p$ d'acheteurs d'appareils avec zoom dans sa clientèle.
Pour cela, elle demande aux 150 magasins de sa franchise de lui faire remonter la fréquence d'appareils avec zoom sur les échantillons constitués des 50 derniers appareils vendus.
Le graphique regroupant toutes les fréquences obtenues est donné ci-dessous.




**1.** Donner une approximation de la fréquence d'appareils avec zoom vendu dans l'échantillon du magasin 40.
**2.** Estimer la proportion $p$ d'acheteurs d'appareils avec zoom dans sa clientèle. Donner le résultat en pourcentages.
**3.** Comment améliorer la précision de cette estimation ?

## Modéliser à partir de fréquences

**139** Dans une urne, il y a des boules rouges, des boules bleues et des boules vertes indiscernables au toucher.
On réalise 1 000 fois l'expérience aléatoire consistant à tirer au sort une boule dans l'urne, noter sa couleur et la remettre dans l'urne. L'évolution des fréquences des boules obtenues de chaque couleur au fil de ces 1 000 répétitions est donnée ci-dessous.
Soit $p(R)$ et $p(B)$ et $p(V)$ les probabilités respectives d'obtenir une boule rouge, une boule bleue et une boule verte.

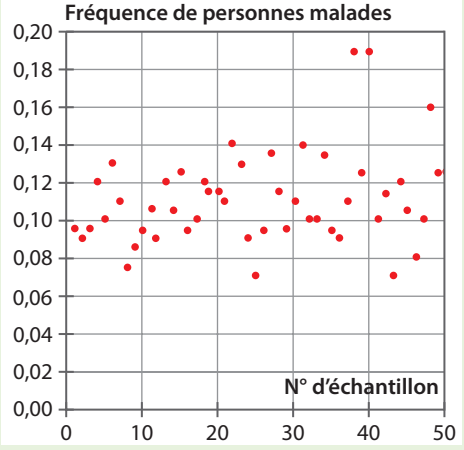



**1.** Estimer la probabilité $p(V)$.
**2.** Donner $p(R) + p(B) + p(V)$.
**3.** Proposer une modélisation de l'expérience aléatoire consistant à tirer au sort une boule dans cette urne.
**4.** On a réalisé une autre série de 1 000 tirages et on a obtenu les résultats suivants.

| Couleur | Rouge | Bleu | Vert |
|---|---|---|---|
| Nombre de boules tirées | 330 | 510 | 160 |

**a)** Proposer une autre modélisation de l'expérience aléatoire.
**b)** Quel phénomène ces deux séries de 1 000 tirages illustrent-elles ?

**140** **Vérifier un résultat**
Dans un pays, une partie de la population est touchée par une épidémie.
**1.** On cherche à estimer la proportion de la population touchée par l'épidémie. Pour cela, on teste 50 échantillons de 200 personnes à divers endroits du pays et on relève la fréquence des malades dans ces échantillons. Les résultats sont donnés dans le graphique suivant.




Estimer la proportion de personnes souffrant de la maladie dans ce pays.
**2. a)** On considère l'expérience aléatoire consistant à tirer au sort un habitant de ce pays et à regarder s'il souffre de la maladie ou non.
Proposer une modélisation de cette expérience aléatoire, c'est-à-dire proposer une loi de probabilité pour celle-ci.
**b)** Cette modélisation est-elle la seule possible ? Discuter.

↪ Résolution de problèmes p. 188 et p. 322

**141** **Esprit critique** À l'approche d'un match capital de son équipe fétiche, Jalila étudie les statistiques des rencontres passées avec leur adversaire. Les résultats sont compilés dans le tableau suivant.

| Victoires | Matchs nul | Défaites |
|---|---|---|
| 5 | 7 | 68 |

**1.** Proposer une loi de probabilité qui modéliserait le résultat du match à venir.
**2.** Jalila propose la loi suivante.

| Issue | Victoire | Match nul | Défaite |
|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,1 | 0,1 | 0,8 |

Est-elle moins pertinente ?

**142** Maxine dispose d'un paquet de 5 kg de pâtes multicolores. Elle en sort 250 au hasard et en trouve 72 vertes, 83 oranges et les autres sont jaunes. Elle décide maintenant de les remettre dans le paquet, mélange bien et en sort une au hasard pour voir sa couleur. Proposer une loi de probabilité qui modéliserait la couleur de la pâte sortie.

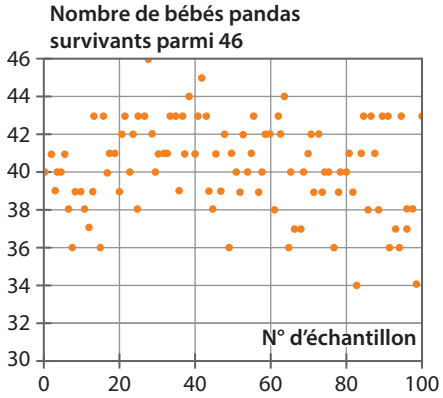
## « Normalité » d'un échantillon

**143** Au vu des statistiques depuis de nombreuses années, on considère qu'un bébé panda né en captivité a 87 % de chance de survivre.

**1.** 45 des 46 bébés pandas nés en 2021 ont survécu.
Quelle est la fréquence $f$ des pandas survivants parmi ceux nés en 2021 ?

**2.** Cela vous semble-t-il contredire les statistiques ?

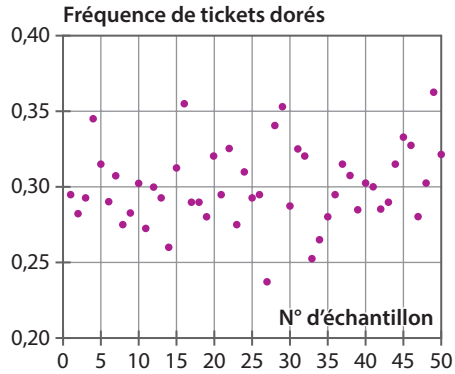
**3.** On a simulé 100 échantillons de 46 bébés pandas suivant qu'ils survivent ou non. Reprendre la question précédente en argumentant à partir de ces résultats.




**144** Un chocolatier décide de faire une édition spéciale de ses barres chocolatées.

30 % d'entre elles contiennent un ticket doré donnant droit à une visite de sa chocolaterie.
Charly achète 400 barres chocolatées.

**1.** On simule ci-dessous 50 échantillons de 400 barres chocolatées et on donne la fréquence de barres contenant des tickets dorés dans chaque échantillon.




Combien y a-t-il de tickets dorés dans l'échantillon 41 ?

**2.** On appelle $p$ la probabilité qu'un ticket soit doré.
Pour un échantillon donné, on note $n$ sa taille et $f$ la fréquence de tickets dorés dans l'échantillon.
Déterminer la proportion des 50 échantillons dont l'écart entre $p$ et $f$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

**3. a)** Sur son réseau social préféré, Charly a 88 amis.
Au vu du graphique précédent, est-il presque sûr de pouvoir les amener avec lui à la chocolaterie ?
**b)** Même question s'il avait 140 amis sur ce réseau social.

## À chacun son rythme

**145** Noah a placé 3 boules noires et 2 boules blanches dans un sac opaque n° 1, et 2 boules noires et 3 boules blanches dans un sac opaque n° 2.

### Énoncé A

**1.** Noah sort au hasard une boule du sac n° 1 et regarde sa couleur.
Quelle est la loi de probabilité de cette expérience aléatoire ?

**2.** Il remet la boule qu'il avait sortie, mélange bien, puis en sort de nouveau une sans regarder sa couleur et la met de de côté. Il effectue alors 50 tirages successifs avec remise dans le sac contenant les boules restantes. Il obtient 39 fois une boule noire et 11 fois une boule blanche. Il pense savoir de quelle couleur est la boule cachée.
À quelle couleur Noah pense-t-il ? Justifier.

### Énoncé B

Noah sort au hasard une boule du sac n° 1 et une boule du sac n° 2 et regarde leurs couleurs (peu importe l'ordre obtenu).
Quelle est la probabilité qu'elles soient de la même couleur ?

### Énoncé C

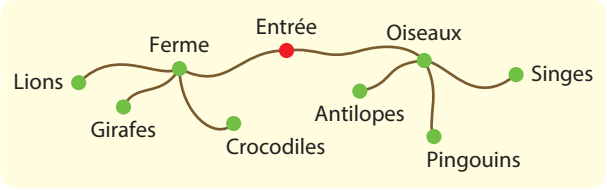
Noah sort au hasard une boule du sac n° 1 et regarde sa couleur.
Il la place ensuite dans le sac n° 2, mélange bien, puis en sort une boule.
Quelle est la probabilité que la boule sortie du sac n° 2 soit de la même couleur que celle sorti du sac n° 1 ?

## 146 Trouver la loi

**1.** Une urne contient des boules jaunes, des rouges et des vertes.
Un tiers des boules sont vertes et il y a deux fois plus de boules rouges que de jaunes.
On tire au hasard une boule de l'urne et on note sa couleur.
Quelle est la loi de probabilité de cette expérience aléatoire ?
**2.** Un dé cubique mal équilibré tombe deux fois plus souvent sur 6 que sur les autres faces qui, elles, tombent à la même fréquence.
Quelle est la loi de probabilité des résultats de ce dé à six faces ?

## 147 Au zoo

Sofiane doit faire un exposé sur un animal. Il se rend au zoo à côté de chez lui pour bien observer les animaux et en choisir un.
Voici le plan du zoo :




Arrivé devant l'entrée, il décide d'emprunter un chemin au hasard et de faire son exposé sur l'animal qu'il trouvera au bout du chemin.
On considère que tous les chemins sont équiprobables.
**1.** Quelle est la probabilité qu'il fasse son exposé sur :
**a)** le lion ?
**b)** un mammifère ?
**c)** un herbivore ?
**2.** Quelle est la probabilité qu'il passe devant les animaux de la ferme ?

## 148 Habits divers et d'hiver

Myriam dispose de cinq paires de gants : 2 paires noires, 2 paires grises et 1 paire bleue.
Elle a aussi 4 bonnets : 1 noir, 1 gris et 2 bleus.
Elle choisit au hasard un bonnet et une paire de gants.
**1.** À l'aide d'un arbre ou d'un tableau déterminer toutes les issues possibles de cette expérience aléatoire.
**2.** Quelle est la probabilité que le bonnet soit bleu ?
**3.** Quelle est la probabilité que le bonnet soit bleu mais pas les gants ?
**4.** Quelle est la probabilité que le bonnet et les gants soient de la même couleur ?

## 149 Lancer de dés

**1.** On lance un dé cubique numéroté de 1 à 6 puis un dé tétraédrique numéroté de 1 à 4.
On considère le nombre de deux chiffres ainsi formé (le chiffre des dizaines est donné par le dé cubique).
Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 3 ?
**2.** Est-ce que cette probabilité est la même si on inverse les lancers de dé (c'est-à-dire si le chiffre des dizaines est donné par le dé tétraédrique) ?

## 150 Tirages sans remise

Louna a quatre disques 33 tours dans 4 catégories : rap, rock, pop et électro. Les disques de rock et d'électro ont été produits avant 2022, et les autres ont été produits après. Elle choisit d'en écouter successivement deux au hasard (mais pas deux fois le même).

**1. a)** À l'aide d'un arbre déterminer toutes les issues de cette expérience aléatoire dont les résultats sont les deux catégories obtenues, en tenant compte de l'ordre.
**b)** Quelle est la loi de probabilité ?
**2.** Déterminer la probabilité des événements suivants.
• E : « Le premier disque choisi est de l'électro. »
• R : « Le deuxième disque choisi est du rock ou du rap. »
• D : « Les deux disques choisis ont été produits avant 2022. »
**3.** Définir les événements $E \cap R$ et $E \cup R$ à l'aide d'une phrase, puis calculer leur probabilité.
**4.** Soit l'événement M : « Au moins un des disques choisis a été produit après 2022. »
**a)** Définir l'événement $\overline{M}$ à l'aide d'une phrase, puis déterminer sa probabilité.
**b)** En déduire $p(M)$.

## 151 En phase d'apprentissage

Le petit Théo connaît les quatre lettres de son prénom sans se rappeler exactement leur ordre.
**1.** Il écrit les quatre lettres au hasard.
**a)** Combien Théo a-t-il de possibilités d'écriture ?
**b)** Quelle probabilité a-t-il d'écrire son prénom correctement ?
**c)** Quelle est la probabilité que le mot écrit commence par T ?
**2.** S'il sait que son prénom commence par T, quelle est la probabilité que Théo l'écrive correctement ?
**3.** Reprendre les mêmes questions avec Bob.

## 152 Francophonie

Python

Au Canada, le français est la langue maternelle de 21,3 % des habitants. Écrire un algorithme ou une fonction en langage **Python** affichant ou renvoyant la fréquence d'individus ayant le français pour langue maternelle lorsque l'on simule un échantillon de 1 324 Canadiens.

## 153 Tableau croisé d'effectif à compléter

Un club pour adolescents organise des activités pour les vacances. Il propose une activité kayak, une activité escalade et une activité vélo. 160 adolescents participent au club. Parmi eux 57,5 % sont des filles.
45 % des adolescents se sont inscrits à l'activité vélo.
Il y a autant d'inscrits à l'activité escalade qu'à l'activité kayak.
Un quart des garçons a choisi l'escalade et 75 % des filles n'ont pas choisi le kayak.

**1.** Recopier et compléter le tableau des effectifs suivant.

| | Kayak | Escalade | Vélo | Total |
|---|---|---|---|---|
| Filles | | | | |
| Garçons | | | | |
| Total | | | | 160 |

**2.** On choisit au hasard un adolescent du club.
On considère les événements suivants.
- F : « L'adolescent choisi est une fille. »
- K : « L'adolescent s'est inscrit à l'activité kayak. »
- E : « L'adolescent s'est inscrit à l'activité escalade. »

**a)** Déterminer $p(E)$, $p(F)$ et $p(K)$.
**b)** Décrire par une phrase les événements $\overline{F} \cap K$, $F \cap \overline{K}$, $\overline{F} \cup E$, $\overline{K} \cap \overline{E}$ et $F \cup K$.
**c)** Calculer les probabilités des événements précédents.

**3.** On choisit un adolescent au hasard parmi ceux inscrits à l'activité vélo. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?

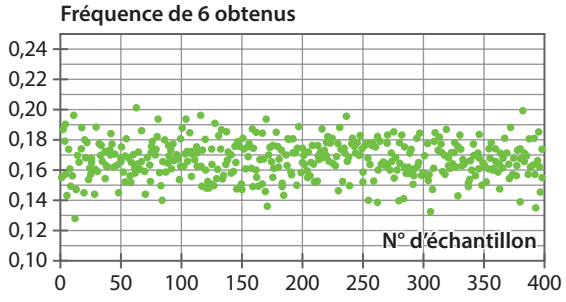
## 154 Triche au casino

Le propriétaire d'un casino a un doute sur l'équilibre d'un dé : il a l'impression que le 6 tombe trop souvent !

**1.** Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 lorsque l'on lance un dé à 6 faces normalement équilibré ?

**2.** Il fait lancer 1 000 fois ce dé par un croupier qui obtient 191 fois le nombre 6.
Comparer la fréquence de 6 obtenus dans cet échantillon et la probabilité d'obtenir un 6.
Que peut-on en penser ?

**3.** On simule 400 échantillons de 1 000 lancers d'un dé équilibré à 6 faces et on s'intéresse aux fréquences de 6 obtenus dans chaque échantillon.
On obtient le graphique suivant.




Le dé est-il équilibré ?
Expliquer.

## 155 Diagramme de Venn

Un jardinier, inquiet du développement d'une maladie qui touche les arbres du jardin municipal où il travaille, a recensé 27 arbres malades et parmi eux 5 sont des sapins. Au total le jardin compte 48 arbres de toutes sortes dont 36 ne sont pas des sapins.
Il choisit un arbre au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit un sapin en bonne santé ?

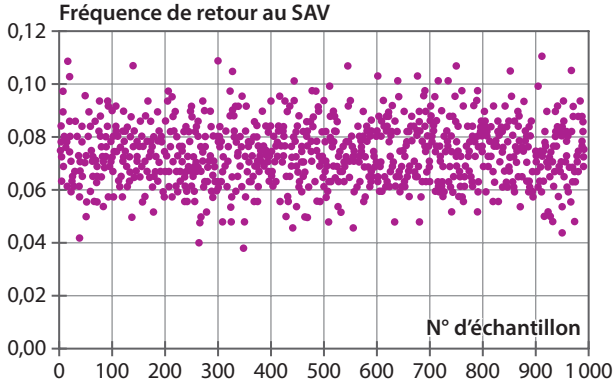
## 156 Estimation d'une proportion Python

Une marque de téléviseur a un taux de retour au service après-vente (SAV) de 7,3 %.

**1.** Recopier et compléter la fonction en langage **Python** suivante afin qu'elle simule un échantillon de 524 téléviseurs de cette marque et renvoie la fréquence de ceux qui retournent au SAV.

```
def sav():
    effectif = ...
    for i in range (1,525):
        if random.random()<...:
            effectif = effectif+1
    return effectif/...
```

**2.** En lançant 1 000 fois cette fonction, on simule 1 000 échantillons de 524 données.
Le graphique suivant donne les fréquences des téléviseurs passant par le SAV dans chacun des 1 000 échantillons.




Donner un encadrement de la fréquence des téléviseurs passant par le SAV dans un échantillon de taille 524, c'est-à-dire dire entre quelles fréquences se trouvent la plupart d'entre elles.

**3.** Une grande surface a vendu 524 téléviseurs de cette marque et a dû gérer 63 retours vers le SAV.

**a)** Expliquer pourquoi la directrice de cette grande surface pense que le lot de 524 téléviseurs de cette marque a un taux de retour anormalement élevé.

**b)** En aurait-il été de même si 45 téléviseurs avaient dû repasser par le SAV ?

# Exercices d'approfondissement

## 157 Joyeux anniversaire ! Défi

Quelle est la probabilité d'être né un 29 février ?

## 158 Lancer de trois dés

On lance trois dés cubiques simultanément.
Quelles combinaisons ont la plus forte probabilité de sortie ?
**a)** Un 1, un 2 et un 3 ?
**b)** Deux 1 et un 2 ?
**c)** Un 2, un 3 et un 5 ?
**d)** Trois 4 ?

## 159 Choix de spécialités

Voilà la répartition des spécialités dans une classe de Terminale.

| | P-C | LLCE | SVT | HLP | SES |
|---|---|---|---|---|---|
| P-C | | 3 | 12 | 0 | 1 |
| LLCE | | | 2 | 5 | 9 |
| SVT | | | | 1 | 1 |
| HLP | | | | | 4 |
| SES | | | | | |

1. On choisit un élève au hasard dans la classe.
**a)** Quelle est la probabilité qu'il suive la spécialité Physique-Chimie ?
**b)** Quelle est la probabilité qu'il suive les spécialités SES et LLCE ?
**c)** Quelle est la probabilité qu'il suive la spécialité SVT ou la spécialité HLP ?
2. On choisit un élève parmi ceux qui ont choisi la spécialité LLCE. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi aussi la spécialité HLP ?

## 160 Répétition d'épreuves identiques

On lance 5 fois de suite une pièce mal équilibrée dont la probabilité de tomber sur *Pile* est égale à 0,4.
On s'intéresse à l'événement.
A : « Obtenir au moins 2 fois *Pile* sur les 5 lancers. ».
Python
1. Écrire et compléter le programme en langage **Python** suivant simulant 10 000 fois les 5 lancers consécutifs de la pièce et affichant la fréquence de l'événement A.
2. Exécuter plusieurs fois le programme et en déduire une valeur approchée à $10^{-2}$ près de la probabilité de A.

```
import random
s=0
for i in range (0,10000):
    pile=0
        for j in range ...:
            if random...:
                pile = pile+1
        if pile>=...:
            s=s+1
print(...)
```

## 161 Seniors et loisirs

Un club de seniors, composé de 40 personnes, organise chaque mois des sorties au théâtre, au cinéma et au musée. 2 personnes se sont inscrites aux 3 sorties du mois. Parmi celles qui se sont inscrites à uniquement 2 sorties, 6 ont choisi d'aller au cinéma et au musée et les autres se répartissent équitablement dans les sorties cinéma et théâtre d'une part, théâtre et musée de l'autre. 1 personne a choisi d'aller uniquement au théâtre. On sait aussi que 23 personnes se sont inscrites à la sortie cinéma, 11 à la sortie théâtre, et 16 au musée.
On choisit une personne du club au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle ne participe à aucune sortie ?

Coup de pouce utiliser un diagramme de Venn

# Vers la 1re

## 162 Vers STMG – ST2S

**Point cours**

Deux événements A et B sont dits indépendants si et seulement si :

$$p(A) \times p(B) = p(A \cap B)$$

Dans une classe de 20 élèves, 15 élèves portent des sneakers blanches.
D'autre part, 7 élèves ont des lunettes et parmi eux 1 seul ne porte pas de sneakers blanches.
On choisit un élève au hasard et on considère les événements suivants.
- A : « L'élève a des lunettes. »
- B : « L'élève porte des sneakers blanches. »

Ces événements sont-ils indépendants ?

## 163 Vers Spécialité Maths

Un QCM est composé de deux questions. Pour chacune, trois réponses sont proposées dont une, seulement, est correcte. Une réponse correcte rapporte 2 points, une réponse fausse enlève 1 point. Un élève décide de répondre au hasard. On note X le nombre de points obtenus par l'élève.
1. Construire un arbre pour modéliser la situation.
2. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
3. Proposer une loi de probabilité pour X.
4. Si l'élève décide de toujours répondre au hasard à ce genre de QCM dans toute sa scolarité, combien de points peut-il espérer avoir en moyenne au QCM ?

**Point cours**

On appelle **espérance de X** la somme des produits de chaque valeur de X par sa probabilité.

**CARTES FLASH**
Mémoriser le cours
www.lienmini.fr/8270-2

Objectif

## 1 Déterminer une loi et calculer des probabilités simples

### Loi de probabilité

| Issue | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | … | $p_n$ |

Lors d'une expérience aléatoire plusieurs issues, sont possibles. Établir la loi de probabilité de l'expérience aléatoire c'est donner pour chaque issue $x_i$ sa probabilité $p_i$ de se réaliser.

$0 \leqslant p_i \leqslant 1$ et $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$.

### Probabilité d'un événement

La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des issues qui réalisent cet événement.

### Loi équirépartie

Si les issues ont toutes la **même probabilité**.

La probabilité d'un événement A est alors :

$$p(\text{A}) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent A}}{\text{nombre total d'issues possibles}}$$

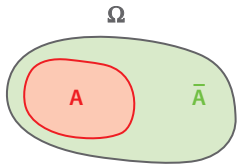
Objectif

## 3 Utiliser les opérations sur les événements

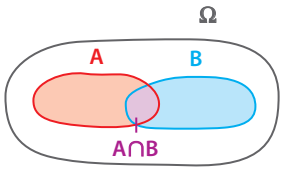
### Opérations sur les événements

$\overline{\text{A}}$ est l'**événement contraire** de A, il contient toutes les issues qui ne sont pas dans A.

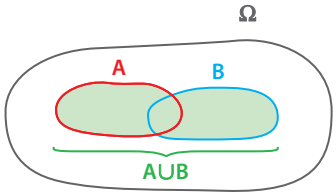
$p(\overline{\text{A}}) = 1 - p(\text{A})$.




**A ∩ B** est l'**intersection** des événements A et B, il contient toutes les issues qui sont à la fois dans A et dans B.




**A ∪ B** est la **réunion** des événements A et B, il contient les issues de A et les issues de B.




$p(\text{A} \cup \text{B}) + p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B})$

Objectif

## 2 Modéliser des expériences à plusieurs étapes

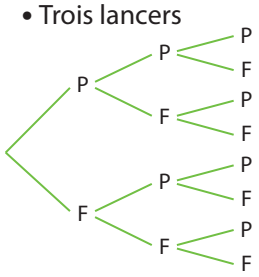
Un tableau à double entrée ou un arbre de dénombrement permet de représenter de manière organisée toutes les issues d'une expérience aléatoire à plusieurs étapes.

(ici, le lancer d'une pièce plusieurs fois successivement.)

• Deux lancers

| | *Pile* | *Face* |
|---|---|---|
| *Pile* | PP | PF |
| *Face* | FP | FF |

• Trois lancers




Objectif

## 4 Simuler une expérience aléatoire et estimer une probabilité ou une proportion

### Simulation d'une expérience aléatoire

L'expérience est à deux issues $x_1$ et $x_2$ de probabilités respectives $p$ et $1 - p$.

• Programme en **Python** • Formule tableur

```
if random.random()<p:
    print("x1")
else:
    print("x2")
```

SI(ALEA()<p;"x1";"x2")

### Échantillon

Lorsque l'on répète $n$ fois de façon indépendante une même expérience aléatoire, l'ensemble des résultats obtenus est appelé **échantillon de taille *n***.

On peut simuler un échantillon en ajoutant au début du programme en **Python** précédent, l'instruction `for i in range(1,n+1):`

### Loi des grands nombres et estimation

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une même expérience aléatoire la fréquence d'apparition $f$ d'une issue se rapproche de plus en plus de la probabilité $p$ d'obtenir cette issue.

Si l'on ne connaît pas la valeur de $p$, on peut considérer que $f$ en constitue une estimation. On utilise généralement plusieurs échantillons de **même taille** pour réaliser une bonne estimation.

**QCM INTERACTIF**
Tester ses connaissances
www.lienmini.fr/8270-40

## QCM Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Objectif **1**

### Déterminer une loi et calculer des probabilités simples

**Une urne contient cinq boules blanches numérotées de 0 à 4 et trois boules noires numérotées de 0 à 2. On choisit au hasard une boule dans l'urne.**

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **164** On s'intéresse à la couleur obtenue. La loi de probabilité est : | $x_i$ : Noir, Blanc ; $p_i$ : 3, 5 | Loi équirépartie sur l'univers {Blanc ; Noir} | $x_i$ : Blanc, Noir ; $p_i$ : $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{8}$ | $x_i$ : 0, 1, 2 ; $p_i$ : $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ |
| **165** On s'intéresse au numéro obtenu. La loi de probabilité est : | $x_i$ : 0, 2, 4 ; $p_i$ : $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$ | $x_i$ : 0, 1, 2, 3, 4 ; $p_i$ : $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$ | Loi équirépartie sur l'univers {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4} | $x_i$ : 0, 1, 2, 3, 4 ; $p_i$ : 2, 2, 2, 1, 1 |
| **166** La probabilité d'obtenir un nombre impair est égale à : | 0,375 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{8}$ |

Objectif **2**

### Modéliser des expériences à plusieurs étapes

**Aline, Boris, Cérine et Dalila doivent être interrogés à l'oral. Leur professeur ne peut en faire passer que 2 successivement lors de la première séance. Il choisit ces deux élèves au hasard parmi les 4 concernés.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **167** Quelle est la probabilité que Boris soit interrogé en deuxième ? | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ |
| **168** Quelle est la probabilité que les deux personnes interrogées soient des filles ? | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ |

Objectif **3**

### Utiliser les opérations sur les événements

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **169** Soit l'urne de l'objectif 1. Soit les événements B : « La boule est blanche. » et D : « Le numéro est supérieur ou égal à 2. » | $p(D) = 0,5$ | $p(B) = 0,625$ | $p(D \cap B) = 0,375$ | $p(B \cup D) = \frac{3}{4}$ |
| **170** A et C sont deux événements tels que : $p(A) = 0,1$, $p(\overline{C}) = 0,7$ et $p(A \cap C) = 0,05$. Alors on a : | $p(A \cup C) = 0,75$ | $p(A \cup C) = 0,35$ | $p(A \cup \overline{C}) = 0,75$ | $p(A \cup \overline{C}) = 0,8$ |

Objectif **4**

### Simuler une expérience et estimer une probabilité ou une proportion

**36 % des français sont du groupe sanguin $O^+$. $p$ est la proportion des français appartenant au groupe $A^+$. On choisit au hasard une personne dans la population française. Note Python : `r=random.random()`.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **171** On réalise une bonne simulation de cette expérience aléatoire avec le script **Python** : | `if r=!0.36: print("pas O+")` | `if r>=0.36: print("pas O+")` | `if r=36: print("O+")` | `if r<0.36: print("O+")` |
| **172** Un établissement français du sang a relevé que, sur les 400 donneurs du mois dernier, 132 étaient du groupe $A^+$. Alors on est presque sûr que : | $p = 33$ % | $p \in [0,28 ; 0,38]$ | $0,3 \leqslant p \leqslant 0,5$ | $p = 0,3$ |

↪ Corrigés p. 390

# Préparer le contrôle — Je m'entraîne

## Parcours différenciés

| | Objectif 1 | Objectif 2 | Objectif 3 | Objectif 4 |
|---|---|---|---|---|
| Parcours A | 1 4 6 173 | 11 15 17 176 | 9 103 | 19 21 181 |
| Parcours B | 70 76 174 | 108 113 120 177 | 103 179 | 130 137 182 |
| Parcours C | 76 175 | 113 178 | 179 180 | 137 182 |

## EXERCICES

### Objectif 1 — Déterminer une loi et calculer des probabilités simples

**173** Dans un autocar touristique il y a 5 Anglais, 3 Allemands, 7 Chinois et 1 Coréen. On choisit au hasard une personne dans ce car et on s'intéresse à sa nationalité.
**1.** Déterminer la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire.
**2.** Quelle est la probabilité que la personne choisie soit asiatique ?

**174** En fin de partie de Scrabble®, dans le sac de pioche il reste les 5 jetons ci-contre.

On tire au hasard un jeton. Quelle est la loi de probabilité de cette expérience aléatoire si l'on s'intéresse :
**a)** à la lettre obtenue ? **b)** aux points obtenus ?

**175** Dans le tableau ci-contre déterminer la valeur de $t$ qui permet de définir une loi de probabilité.

| Issue | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,25 | $t$ | $t$ | 0,15 |

### Objectif 2 — Modéliser des expériences à plusieurs étapes

**176** On lance trois fois de suite une pièce bien équilibrée et on regarde la face obtenue. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux fois *Pile* ?

**177** On tire successivement deux cartes, au hasard et sans remise parmi les quatre cartes suivantes et on note le nombre de deux chiffres ainsi obtenu. Quelle est la probabilité que ce nombre soit premier ?

**178** On lance deux dés tétraédriques numérotés de 1 à 4 et on s'intéresse à la somme obtenue, puis on lance une pièce équilibrée. Si elle tombe sur *Pile* la somme est multipliée par 2, si c'est *Face*, on garde le résultat obtenu aux dés. Quelle est la probabilité que le résultat donne 6 ou 8 ?

### Objectif 3 — Utiliser les opérations sur les événements

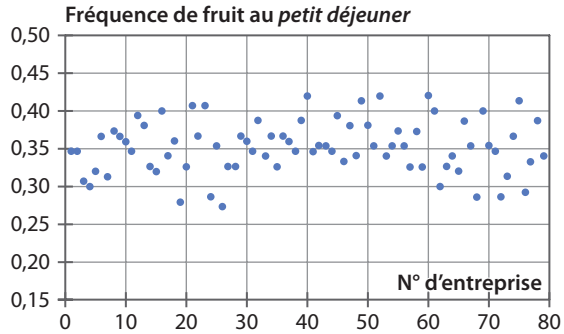
**179** On considère les événements de l'exercice **174**
• V : « La lettre est une voyelle. »
• T : « La lettre a moins de 3 points. »
**1.** Déterminer $p(V \cap T)$ et $p(V \cup T)$.
**2.** Décrire l'événement $V \cap \overline{T}$ par une phrase et calculer $p(V \cap \overline{T})$. Puis faire de même pour l'événement $\overline{V} \cup T$.

**180** 32 élèves de Seconde font un DST de Mathématiques. Parmi eux 19 élèves ont apporté leur calculatrice du collège, 25 ont apporté leur calculatrice graphique du lycée et 2 ont oublié d'apporter une calculatrice. On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait apporté les deux calculatrices ?

### Objectif 4 — Simuler une expérience et estimer une probabilité ou une proportion

**181** 31 % des ménages français ont un chat. Écrire une fonction **Python** simulant le tirage au sort d'un échantillon de 239 ménages français et affichant ou renvoyant la fréquence des ménages ayant un chat dans l'échantillon.

**182** On a prélevé des échantillons de taille $n = 400$ dans 80 entreprises.




**1.** Quelle est la probabilité $p$ qu'un salarié français mange un fruit au petit déjeuner ?
**2.** Vérifier qu'au moins 95 % des échantillons ont une fréquence comprise entre $p - \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $p + \frac{1}{\sqrt{n}}$.


↪ Corrigés p. 390

# Travaux pratiques

Python Tableur 40 min Modéliser Calculer

## 1 Problème du grand-duc de Toscane

Au XVI$^{e}$ siècle, à la cour du grand-duc de Toscane on pratiquait un jeu qui consistait à lancer trois dés cubiques et calculer la somme obtenue. Le grand-duc, étant à la fois un joueur régulier et un fin observateur, avait l'impression que la somme 10 s'obtenait un petit peu plus souvent que 9.

### A ▸ Simulation et Vérification

**1. a)** Ouvrir une feuille de calcul d'un tableur. Saisir dans la cellule A1 la formule `=ALEA.ENTRE.BORNES(1,6)` qui donne au hasard un nombre entier entre 1 et 6. Puis la recopier dans les cellules B1 et C1 afin d'obtenir la simulation du lancer de trois dés.
**b)** Dans la cellule D1 entrer une formule donnant la somme des résultats des trois dés.
**c)** Étirer ces 4 cellules jusqu'à la ligne 1 000 afin d'obtenir la simulation d'un échantillon de 1 000 lancers de trois dés.
**d)** Dans la cellule F1 saisir `10` puis, en-dessous, dans la cellule F2, entrer la formule `=NB.SI(D1:D1000;10)` donnant le nombre de fois où la somme 10 a été obtenue.
**e)** Sur le même principe, saisir `9` dans la cellule G1, puis entrer une formule dans la cellule G2 pour obtenir le nombre de fois où la somme 9 a été obtenue.

**2.** Effectuer plusieurs simulations de 1 000 lancers en appuyant sur la touche F9.
Observer les résultats obtenus. Confirmer ou invalider l'impression du grand-duc.

### B ▸ Estimation de la probabilité

**1.** Télécharger le programme qui simule 50 échantillons de 10 000 lancers de trois dés et affiche la fréquence de la somme 10 obtenue dans chacun des échantillons.

**CONSOLE PYTHON**
**Simulations du lancer de trois dés**
www.lienmini.fr/8270-tab5

**2.** Exécuter le programme et observer le graphique ainsi généré.
Estimer alors la probabilité que la somme des résultats des trois dés soit égale à 10.

**3. a)** Modifier légèrement le programme afin qu'il calcule le nombre de fois où la somme 9 est obtenue dans un échantillon et affiche la fréquence de cette somme dans chaque échantillon.
**b)** Fermer le graphique précédent, puis exécuter le programme modifié.
Estimer alors la probabilité que la somme des résultats des trois dés soit égale à 9.

### C ▸ Calcul de la probabilité

Le grand-duc de Toscane ne comprenait pas pourquoi les sommes 9 et 10 ne semblaient pas avoir exactement le même nombre de chances d'être obtenues étant donné, disait-il, qu'il y a autant de façons d'obtenir 10 que 9 en additionnant trois nombres de 1 à 6 :
$10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4$
$9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+3+4 = 2+2+4 = 3+3+3$
C'est son précepteur, un certain Galileo Galilei (Galilée), qui trouva l'explication ainsi que la loi de probabilité de cette expérience aléatoire. Voici son raisonnement :

**1.** On lance d'abord les deux premiers dés : il y a 36 issues possibles (voir le tableau ci-contre). Puis on lance le 3$^{e}$ dé.
**a)** Supposons qu'on obtienne 1. En ajoutant 1 à chaque issue du tableau des sommes possibles de deux dés ci-contre, déterminer alors le nombre de fois où on obtiendra 9 et celles où on obtiendra 10 avec 1 sur le 3$^{e}$ dé.
**b)** Même question en supposant qu'on obtienne 2 avec le 3$^{e}$ dé.
**c)** Même question en prenant 3 puis 4 puis 5 puis 6 comme résultat du 3$^{e}$ dé.

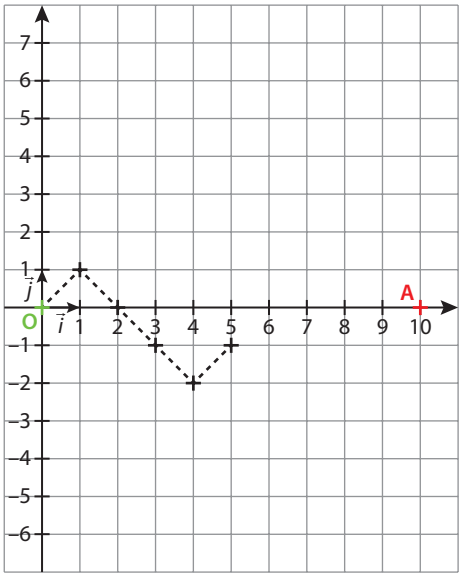
**2. a)** Faire le total du nombre d'issues où la somme des trois dés est égale à 9. Faire de même pour la somme égale à 10.
**b)** En déduire la probabilité d'obtenir 9 avec 3 dés, puis celle d'obtenir 10.

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Python 30 min Représenter Modéliser

# 2 Marche aléatoire dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, en partant du point O, on se déplace, en 10 étapes, de la manière aléatoire suivante.
On lance une pièce bien équilibrée.
Si on obtient *Pile* on effectue un déplacement de vecteur $\vec{i} + \vec{j}$.
Sinon, on effectue un déplacement de vecteur $\vec{i} - \vec{j}$.
On effectue ce déplacement aléatoire 10 fois en partant du point obtenu à l'étape précédente.
Le but de ce TP est d'estimer la probabilité d'arriver au point A de coordonnées (10 ; 0) en 10 étapes.




## A ▸ Expérimentation manuelle

**1.** Tracer un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ sur une feuille quadrillée. La norme du vecteur $\vec{i}$ et celle du vecteur $\vec{j}$ étant égales à celle du côté d'un carreau.

**2.** En utilisant une pièce de monnaie ou une simulation équivalente sur calculatrice ou ordinateur, réaliser une marche aléatoire dans le repère, en 10 étapes, comme décrit dans l'énoncé.

**Coup de pouce** La commande **ALEA.ENTRE.BORNES(0;1)** sur tableur ou **Int(Ran#×2)** ou **nbrAléatEnt(0,1,1)** ou **randint(0,1)** sur calculatrices Casio, TI ou Numworks permet de générer un nombre entier aléatoire entre 0 et 1 inclus.

**3.** Noter les coordonnées du point d'arrivée.

**4.** Refaire plusieurs fois les deux questions précédentes.

**5.** Le point A a-t-il été atteint lors d'une des marches aléatoires ?

## B ▸ Calcul de la fréquence observée

**1.** Télécharger le programme qui simule la marche aléatoire en 10 étapes dans le repère orthonormé.

**CONSOLE PYTHON**
Marche aléatoire
www.lienmini.fr/8270-py8

**a)** Donner la signification, dans le contexte de l'énoncé, de l'instruction conditionnelle `if random.randint(0,1)==0:`

**b)** Quelle valeur doit retourner le programme pour que cela corresponde à une arrivée au point A ?

```
def marche_alea():
    j=0
    for i in range(1,11):
        if random.randint(0,1)==0:
            j=j+1
        else :
            j=j-1
    return j
```

**2.** On considère le programme écrit en langage **Python** ci-contre.

**a)** Donner la signification, dans le contexte de l'énoncé, de l'instruction conditionnelle `if marche_alea()==0:`

**b)** Que fait ce programme ?

```
effectif=0
for m in range(0,1000):
    if marche_alea()==0:
        effectif=effectif+1
print(effectif/1000)
```

**3. a)** Sur un ordinateur ou une calculatrice, écrire un programme en langage **Python** constitué de la fonction `marche_alea()` et du programme précédent.

**b)** L'exécuter plusieurs fois et noter le résultat obtenu à chaque fois.

**c)** En déduire une estimation de la probabilité d'arriver au point A, en suivant cette marche aléatoire en 10 étapes à partir du point O.

**4.** **Pour aller plus loin** Déterminer à l'aide d'un programme **Python** la probabilité de l'événement :
« Arriver au point A en 10 étapes en passant par le point de coordonnées (5 ; 1). ».

Tableur 25 min Modéliser Calculer

# 3 Anniversaires

Ce TP va permettre de répondre à la question suivante : « Quelle est la probabilité que, dans une classe de 32 élèves, au moins deux élèves aient la même date d'anniversaire ? »

## A ▸ Simulation d'une classe avec un tableur

Il y a 365 jours dans l'année (pour simplifier les calculs et les raisonnements on ne prendra pas en compte les années bissextiles, ni les personnes nées le 29 février). Pour chaque élève il y a donc 365 dates possibles d'anniversaires.

**1. a)** Ouvrir une feuille de calcul de tableur, puis saisir « Classe n° 1 » dans la cellule A1.

**b)** Dans la cellule A2, saisir la formule `=ALEA.ENTRE.BORNES(1;365)` qui génère un nombre entier aléatoire entre 1 et 365.

**c)** Étirer cette formule vers le bas jusqu'à la cellule A33 afin de simuler les dates d'anniversaires des 32 élèves de la classe.

**d)** Y a-t-il deux dates identiques ?

**2. a)** Afin de mieux repérer les doublons (dates identiques) dans la plage A2:A33 (c'est-à-dire dans la classe), saisir dans la cellule B2 la formule `=SI(NB.SI(A$2:A$33;A2)>1;1;0)` et l'étirer vers le bas jusqu'à la cellule B33.

**Remarque** Cette formule renvoie la valeur 1 dans la cellule à côté d'un doublon, et 0 sinon.

**b)** Appuyer sur la touche F9 pour effectuer plusieurs simulations.
Lorsque des « 1 » apparaissent dans la colonne B, vérifier qu'ils correspondent bien à des dates d'anniversaires identiques.

**c)** Dans la cellule B34, écrire une formule qui renvoie la valeur 1 si la somme des nombres de la plage B2:B33 est supérieure à 0 et qui renvoie 0 sinon.

**d)** Recopier et compléter la phrase suivante.
« S'il y a la valeur **…** dans la cellule B34 cela signifie que, dans la classe, plusieurs élèves ont des dates d'anniversaires identiques, et sinon cela signifie qu'aucun élève **…** »

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | Classe n°1 | |
| 2 | 239 | 0 |
| 3 | 306 | 0 |
| 4 | 105 | 0 |
| 5 | 231 | 0 |
| 6 | 352 | 0 |
| 7 | 25 | 0 |
| 8 | 154 | 0 |
| 9 | 103 | 0 |
| 10 | 120 | 0 |
| 11 | 245 | 0 |
| 12 | 166 | 0 |
| 13 | 363 | 0 |
| 14 | 107 | 0 |
| 15 | 303 | 1 |
| 16 | 285 | 0 |
| 17 | 138 | 0 |
| 18 | 119 | 0 |
| 19 | 254 | 0 |
| 20 | 140 | 0 |
| 21 | 59 | 0 |
| 22 | 340 | 0 |
| 23 | 115 | 1 |
| 24 | 36 | 1 |
| 25 | 241 | 0 |
| 26 | 23 | 0 |
| 27 | 174 | 0 |
| 28 | 36 | 1 |
| 29 | 305 | 0 |
| 30 | 303 | 1 |
| 31 | 115 | 1 |
| 32 | 110 | 0 |
| 33 | 342 | 0 |

## B ▸ Simulation d'un échantillon de 400 classes

**1.** Sélectionner la plage de cellules A1:B34 puis étirer vers la droite jusqu'à la colonne ADS afin de simuler un échantillon de 400 classes de 32 élèves.

**2. a)** Dans la cellule ADT34, écrire la formule `=SOMME(A34 :ADS34).`

**b)** À quoi correspond le nombre obtenu ?

**3.** Dans la cellule ADT35, écrire une formule donnant la fréquence des classes pour lesquelles il y au moins deux élèves qui ont la même date d'anniversaire dans l'échantillon de 400 classes de 32 élèves.

**4.** À l'aide de la touche F9 changer plusieurs fois l'échantillon en notant à chaque fois la fréquence obtenue.
Puis conclure en répondant à la question posée en début de TP.

**5.** Pour aller plus loin Déterminer à l'aide du tableur la probabilité que dans une classe de 32 élèves, trois élèves aient exactement la même date anniversaire.

Python 40 min Modéliser Raisonner

# 4 Fluctuation d'échantillonnage et parité

Deux entreprises A et B recrutent des employés parmi une population de demandeurs d'emplois composée d'autant d'hommes que de femmes. L'entreprise A a embauché 25 employés dont 17 femmes. L'entreprise B a embauché 400 employés dont 176 femmes. Ce TP va permettre de répondre à la question : « Peut-on considérer que ces deux entreprises ont choisi leurs employés sans tenir compte de leur sexe » ?

## A ▸ Echantillon aléatoire de taille *n*

**1.** On choisit au hasard 1 personne dans une population composée à égalité d'hommes et de femmes. Quelle est la probabilité p que cette personne soit une femme ?

**2.** Écrire et compléter la fonction en langage **Python** ci-contre afin qu'elle renvoie la fréquence de femmes dans un échantillon de taille `n`.

```
import random
def freq_echantillon(n):
    femmes=0
    for i in range(1,n+1):
        if random.random()<…:
            femmes=femmes+1
    return …
```

## B ▸ Fluctuation d'échantillons de taille 25

**1.** En dessous de la fonction précédente, revenir à la ligne, sans indentation, et écrire le programme ci-contre, sans l'exécuter.

**Remarque** La commande `plt.plot([i],[f],'b.')` permet de placer le point de coordonnées `(i,f)` (en bleu) dans un repère défini par les commandes en fin de programme.

```
for i in range(1,101):
    f=freq_echantillon(25)
    plt.plot([i],[f],'b.')

plt.axis([0,100,0,1])
plt.grid(True)
plt.show()
```

**2.** Recopier et compléter. « Ce programme simule … échantillons de … personnes selon que ce sont des femmes ou non, puis affiche les points de coordonnées (`i`, `f`) où `i` est le n° de l'échantillon et *f* est … dans cet échantillon. »

**3.** Ajouter la commande `import matplotlib.pyplot as plt` en début de script. Puis exécuter le programme.

**4.** Relancer plusieurs fois le programme (en fermant le graphique à chaque fois) et observer la répartition des points. Quel semble être l'intervalle de fréquences (arrondies au dixième près) dans lequel se trouvent tous les points (à l'exception de 4 ou 5 points « extrêmes » et isolés) ?

**5.** Pour la grande majorité des échantillons de taille *n* (au moins 95 %) tirés aléatoirement dans la population, l'écart entre la probabilité *p* d'un événement et la fréquence *f* de cet événement dans l'échantillon est inférieur à $\frac{1}{\sqrt{n}}$, autrement dit $f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

**a)** Déterminer cet intervalle pour un échantillon de $n = 25$ personnes ayant une probabilité $p = 0{,}5$ d'être une femme.
**b)** Vérifier la correspondance de cet intervalle avec celui observé à la question **4.** (Renouveler les simulations graphiques si nécessaire.)

**6. a)** Déterminer la fréquence des femmes dans l'entreprise A. Respecte-t-elle la propriété énoncé à la question **5.** ?
**b)** Est-il possible que l'entreprise A ait choisi ses employés sans tenir compte de leur sexe ?

## C ▸ Fluctuation d'échantillons de taille 400

**1.** Modifier le programme de la partie précédente pour simuler 100 échantillons de 400 personnes selon que ce sont des femmes ou non.

**2. a)** Déterminer l'intervalle de fluctuation $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ pour un échantillon de $n = 400$ personnes ayant une probabilité $p = 0{,}5$ d'être une femme.
**b)** Vérifier en exécutant le programme plusieurs fois que cet intervalle de fluctuation contient, à chaque fois, presque tous les points du graphique. Changer éventuellement les bornes de l'axe des ordonnées pour plus de précision si nécessaire : `plt.axis([0,100,0.4,0.6])`

**3. a)** Déterminer la fréquence des femmes dans l'entreprise B. Respecte-t-elle la propriété énoncé à la question B **5.** ?
**b)** Est-il possible que l'entreprise B ait choisi ses employés sans tenir compte de leur sexe ?

# Lexique

## Consignes (vocabulaire des)

**Associer** Unir des éléments dans lesquels on voit des points communs.

**Balayer** Observer des tableaux de valeurs successifs en réduisant au fur et à mesure le pas pour avoir un encadrement de plus en plus précis de la valeur cherchée.

**Calculer** Fournir une valeur numérique à l'aide des règles de calculs.

**Chercher** Tester plusieurs possibilités à partir des informations données dans l'énoncé, essayer de faire le lien avec des propriétés connues, utiliser la calculatrice ou un logiciel.

**Communiquer** Expliquer un raisonnement à l'écrit ou à l'oral, expliquer une démarche même si celle-ci n'aboutit pas à l'aide de phrases, de formules, de schémas…

**Comparer** Comparer deux nombres signifie déterminer s'ils sont égaux ou lequel est plus grand que l'autre.

**Conjecturer** Émettre une supposition à partir d'observations.

**Démontrer** À partir des éléments connus, effectuer un raisonnement ou un calcul pour obtenir le résultat ou la propriété cherchée.

**Développer** Écrire un produit sous forme d'une somme équivalente.

**Encadrer** Encadrer un nombre $x$, c'est donner un couple de valeurs $(a\,;\,b)$ entre lesquelles on est sûr que ce nombre se trouve.
On écrit une double inégalité : $a \leqslant x \leqslant b$.

**Expliquer** Rendre compréhensible un raisonnement, une idée.

**Interpréter** Faire une phrase situant le résultat obtenu dans le contexte (souvent concret) de l'exercice.

**Modéliser** Décrire une situation concrète en utilisant les connaissances mathématiques, par exemple : écrire une équation ou une fonction permettant d'étudier la situation proposée.

**Représenter** Fournir une information sous forme graphique : figures codées en géométrie, courbe d'une fonction, arbre ou schéma en probabilité, …

**Résoudre** Trouver toutes les solutions possibles.

**Optimiser** Résoudre un problème consistant à trouver le maximum ou le minimum d'une fonction sur un ensemble.

**Raisonner** ↪ **Démontrer**

**Simplifier (une fraction)** Opération qui consiste à diviser le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul afin d'obtenir le numérateur et le dénominateur les plus petits possibles.

## A

**Abscisse**
Première coordonnée.

**Affectation** p. 22

**Aléatoire** ↪ Expérience p. 346

**Algèbre**
Science des équations, du calcul littéral.

**Algorithme**
Suite d'instructions finies à exécuter.

**Allure (d'une courbe)**
Schéma ou phrases décrivant simplement la courbe représentative d'une fonction.

**Amplitude (d'un intervalle)** p. 74

**Antécédent** p. 208

**Arithmétique**
Étude des propriétés de l'ensemble des nombres rationnels.

## B

**Base dans un triangle**
↪ Formulaire de géométrie rabat VI

**Base d'un solide**
↪ Formulaire de géométrie rabat VI

**Base du plan** p. 154

**Base orthonormée** p. 154

**Bénéfice**
Différence entre la recette et les coûts.

**Booléen** p. 22

**Borne** p. 74

**Boucle bornée, boucle non bornée** p. 28

## C

**Carré**
↪ Formulaire de géométrie rabat VI

**Carré parfait**

Les carrés des nombres entiers positifs sont appelés carrés parfaits. Les premiers carrés parfaits sont 0, 1, 4, 9, 16.

**Certain (événement)** p. 348

**Chaîne de caractères** p. 22

**Coefficient directeur** p. 182

**Coefficient multiplicateur** p. 294

**Colinéarité** p. 132

**Combinaison** p. 186

**Concourantes (droites)**

Droites qui ont un point d'intersection commun.

**Cône**

↳ Formulaire de géométrie rabat VI

**Contraire (évènement)** p. 350

**Coordonnées**

Dans un repère du plan, ce sont les deux nombres, l'abscisse et l'ordonnée, qui permettent de définir la position d'un point par rapport à l'origine du repère.

**Cosinus**

↳ L'essentiel du collège rabat V

**Courbe représentative d'une fonction** p. 208

**Coût**

Somme dépensée pour créer un produit.

**Critère de divisibilité**

Particularité d'un entier permettant de déterminer si un nombre est divisible par un autre.

**Croissante (fonction)** p. 240

**Cube**

↳ Formulaire de géométrie rabat VI

**Cylindre**

↳ Formulaire de géométrie rabat VI

## D

**Décroissante (fonction)** p. 240

**Demande**

Quantité de biens et de services que les agents économiques sont disposés à acheter sur un marché.

**Dénominateur**

Dans une fraction, le dénominateur est le nombre en dessous de la barre de fraction, c'est lui qui permet de nommer la fraction.

**Déterminant** p. 156

**Dichotomie**

La méthode de dichotomie est un algorithme de recherche qui consiste à répéter les partages d'un intervalle en deux parties de même amplitude puis à sélectionner le sous-intervalle contenant la solution cherchée.

**Direction (d'un vecteur)** p. 128

**Dispersion** p. 318

**Disque**

↳ Formulaire de géométrie rabat VI

**Distance**

Plus petite mesure entre deux éléments de géométrie.

**Distance (entre deux nombres)** p. 78

**Distributivité** p. 100

**Diviseur** p. 50

**Division euclidienne**

Division entière avec quotient et reste.

**Droite des réels** p. 52

## E

**Écart interquartile** p. 320

**Écart-type** p. 318

**Échantillon** p. 354

**Écriture décimale**

Écriture d'un nombre à l'aide de la virgule permettant de distinguer la partie entière de la partie décimale.

**Écriture scientifique**

C'est une façon de représenter les nombres décimaux qui consiste à écrire le nombre sous la forme $\pm a \times 10^n$ où $a$ est un nombre décimal de l'intervalle [1 ; 10[ et $n$ un entier relatif.

**Effectif (d'une valeur)**

Dans une série statistique, c'est le nombre de fois où la valeur apparaît.

**Effectif total**

Nombre de valeurs dans une série statistique.

**Ensemble**
Collection d'objets.

**Ensemble de définition** p. 208

**Ensemble solution** p. 76

**Entier** p. 52

**Équation**
Égalité dans laquelle est présente une inconnue (ou des inconnues).

**Équation cartésienne** p. 180

**Équation réduite** p. 182

**Équidistant**
Qui est à égale distance de.

**Équiprobabilité** p. 348

**Estimation** p. 356

**Événement** p. 348

**Évolution** p. 294

**Évolution réciproque** p. 296

**Évolutions successives** p. 296

**Expérience aléatoire** p. 346

**Exposant** p. 48

**Extremum**
Maximum ou minimum.

## F

**Factoriser**
Écrire une somme sous forme d'un produit égal.

**Flottant** p. 22

**Fluctuation** p. 356

**Fonction** p. 208

**Fonction (algorithme)** p. 26

**Fonction affine** p. 182 et 242

**Fonction carré** p. 212

**Fonction cube** p. 212

**Fonctions de référence** p. 212

**Fonction inverse** p. 212

**Fonction racine carrée** p. 212

**Fraction irréductible** p. 50

**Fréquence** p. 316

## H

**Hauteur** p. 126

**Hauteur (dans un triangle)** p. 126

**Hyperbole** p. 212

## I

**Identités remarquables**
Égalités qui s'appliquent à des nombres et qui servent en général à accélérer les calculs, à simplifier certaines écritures, à factoriser ou à développer des expressions.

**Image (d'une transformation)** p. 128

**Image (fonction)** p. 208

**Impair (nombre)** p. 50

**Impaire (fonction)** p. 214

**Inégalité**
Énoncé permettant de comparer l'ordre de deux nombres ou expressions.

**Inéquation** p. 76

**Instruction conditionnelle** p. 24

**Intersection (d'intervalles)** p. 74

**Intersection (d'événements)** p. 350

**Intervalle** p. 74

**Irrationnel** p. 52

## L

**Loi de probabilité** p. 346

## M

**Maximum** p. 242

**Médiane (d'une série statistique)** p. 320

**Médiatrice**
↪ L'essentiel du collège rabat IV

**Milieu**
Point du segment à égale distance des extrémités de ce segment.

**Monotone (fonction)** p. 240

**Moyenne** p. 316

**Moyenne pondérée** p. 316

**Multiple** p. 50

## N

**Nature (d'un polygone)**

Nom qui englobe toutes les caractéristiques d'un polygone.

**Naturel (entier)** p. 52

**Nombre d'or**

Nombre irrationnel, unique solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$. Il vaut $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**Nombre impair** p. 50

**Nombre pair** p. 50

**Nombre premier** p. 50

**Nombre réel** p. 52

**Norme (d'un vecteur)** p. 128

**Notation scientifique** ↪ Écriture scientifique

**Numérateur**

Dans une fraction, le numérateur est le nombre au-dessus de la barre de fraction, il sert à dénombrer le nombre de parts.

## O

**Offre**

Quantité de biens et de services que les agents économiques sont disposés à vendre sur le marché.

**Ordonnée**

Deuxième coordonnée.

**Ordonnée (à l'origine)** p. 182

**Orthogonal** ↪ Projeté ↪ Repère p. 126

## P

**Pair (nombre)** p. 50

**Paire (fonction)** p. 214

**Parabole** p. 212

**Parallélépipède rectangle**

↪ Formulaire de géométrie rabat VI

**Parallélogramme**

↪ Formulaire de géométrie rabat VI

**Paramètre**

Symbole désignant une grandeur donnée qui peut prendre des valeurs différentes.

**Parfait** ↪ Carré parfait

**Parité (d'une fonction)** p. 214

**Pavé droit**

↪ Formulaire de géométrie rabat VI

**Pente** ↪ Coefficient directeur p. 184

**Périmètre**

Le périmètre d'une figure plane est la longueur du contour de cette figure.

**Position relative (de courbes)**

Déterminer sur quel(s) intervalle(s) une courbe est au-dessus de l'autre.

**Pourcentage**

Proportion exprimée à l'aide d'une fraction de dénominateur 100, on note alors le numérateur suivi du signe %.

**Prisme droit**

↪ Formulaire de géométrie rabat VI

**Probabilité** p. 346

**Projeté orthogonal** p. 126

**Proportion** p. 294

**Puissance d'un nombre** p. 48

**Pyramide**

↪ Formulaire de géométrie rabat VI

## Q

**Quartile** p. 320

**Quotient** p. 52

## R

**Racine carrée** p. 48

**Rationnel** p. 52

**Recette**
Somme d'argent encaissée.

**Rectangle**
↳ Formulaire de géométrie rabat VI

**Rectangle d'or**
Rectangle dont le rapport de la longueur par la largeur est égal au nombre d'or.

**Réel** p. 52

**Relatif (entier)** p. 52

**Repère du plan** p. 154

**Repère orthogonal** p. 154

**Repère orthonormé** p. 154

**Réunion (d'événements)** p. 350

**Réunion (d'intervalles)** p. 74

## S

**Sens (d'un vecteur)** p. 128

**Signe (d'une fonction)** p. 268

**Simulation** p. 354

**Sinus**
↳ L'essentiel du collège rabat V

**Sphère**
↳ Formulaire de géométrie rabat VI

**Substitution** p. 186

**Système (de deux équations)** p. 186

## T

**Tableau de signes** p. 268

**Tableau de valeurs** p. 212

**Tableau de variations** p. 240

**Tangente**
↳ L'essentiel du collège rabat V

**Taux d'accroissement (d'une fonction affine)**
Quotient de la différence des images par la différence des antécédents.

**Trapèze**
↳ Formulaire de géométrie rabat VI

**Triangle équilatéral**
↳ Formulaire de géométrie rabat VI

**Triangle isocèle**
↳ Formulaire de géométrie rabat VI

**Triangle rectangle**
↳ Formulaire de géométrie rabat VI

**Trigonométrie**
↳ L'essentiel du collège rabat V

**Type de variable** p. 22

## U

**Univers** p. 346

## V

**Valeur absolue** p. 78

**Valeur numérique**
Valeur de l'expression dans laquelle on a remplacé chacune des variables par des nombres.

**Variable (programme ou algorithme)**
Symbole qui associe un nom à une valeur.
Le nom est unique mais la valeur peut changer.

**Variable (fonction)**
Valeur non fixée de l'ensemble de définition d'une fonction représentée par une lettre, généralement $x$.

**Variation absolue** p. 294

**Variation relative** p. 294

**Variations** p. 240

**Vecteur** p. 128

# 1 ET et OU en mathématiques

**Définition** **Et**

**En mathématiques, lorsque l'on dit qu'une proposition 1 ET une proposition 2 sont vérifiées, cela veut dire qu'elles sont vérifiées à la fois. Ce "ET" mathématique est très lié au symbole ∩.**

**Exemple**

- On cherche le nombre $n$ tel que $n$ soit un entier pair ET appartienne à l'intervalle [3,5 ; 5,9].

Il s'agit de trouver un nombre $n$ (s'il(s) existe(nt)) qui vérifie les deux conditions à la fois c'est-à-dire qui est un entier pair ET qui appartient à [3,5 ; 5,9].

Le seul nombre vérifiant ces deux conditions est 4 donc $n = 4$.

- On considère le programme en langage **Python** ci-dessous :

```
import random
x=random.randint(1,10)
if x>3 and x<=7.3:
   print("Dans l'intervalle !")
else :
   print("Pas dans l'intervalle...")
```

Le programme affiche "**Dans l'intervalle !**" si le nombre $x$ vérifie à la fois $x > 3$ ET $x \leq 7{,}3$ c'est-à-dire si $3 < x \leq 7{,}3$.

**Définition** **Ou**

**En mathématiques, lorsque l'on dit qu'une proposition 1 OU une proposition 2 est vérifiée, cela veut dire qu'au moins l'une des deux est vérifiée. Ce "OU" mathématique est très lié au symbole ∪.**

**Exemple**

On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.
Quelles sont les issues qui sont paires OU strictement supérieures à 2 ?
Les nombres entiers entre 1 et 6 qui vérifient la proposition :

- « être pair » sont 2 ; 4 ; 6 ;
- « être strictement supérieur à 2 » sont 3 ; 4 ; 5 ; 6.

Les issues qui sont paires OU strictement supérieures à 2 sont donc 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 qui sont tous les entiers entre 1 et 6 qui vérifient au moins l'une des deux conditions (éventuellement les deux pour 4 et 6).

**Remarques**

- Dans le langage courant, le OU est **exclusif**. Par exemple, quand sur un menu au restaurant il est écrit « fromage ou dessert » cela veut dire que l'on peut prendre soit du fromage, soit un dessert mais pas les deux.
- Dans le langage mathématique, le OU est **inclusif**. Dans l'exemple précédent du dé à 6 faces, les nombres 4 et 6 vérifient les deux conditions à la fois cela veut dire que si on les obtient, le résultat est bien pair OU strictement supérieur à 2.

# 2 Implication, contraposée, réciproque et équivalence

**Définition** **Implication**

**Une implication est une proposition de la forme : SI énoncé 1 ALORS énoncé 2.**
**Symboliquement, cela se note : énoncé 1 $\Rightarrow$ énoncé 2.**
**Cela veut dire que si l'énoncé 1 est vérifié alors l'énoncé 2 l'est forcément (ou nécessairement) également.**
**On dit que l'énoncé 1 est une condition suffisante et que l'énoncé 2 est une condition nécessaire.**

**Exemple**

- La proposition suivante est VRAIE : SI la prise est débranchée ALORS la lampe est éteinte.
On peut la traduire par : la prise est débranchée $\Rightarrow$ la lampe est éteinte (se lit également « la prise est débranchée entraîne la lampe est éteinte »).
- En revanche, la proposition suivante est FAUSSE : SI la lampe est éteinte ALORS la prise est débranchée.
En effet, si la lampe est éteinte, la prise peut être branchée mais l'interrupteur sur OFF.

**Définition** **Contraposée**

**Si une implication énoncé 1 $\Rightarrow$ énoncé 2, est vraie alors sa contraposée :**
**contraire de l'énoncé 2 $\Rightarrow$ contraire de l'énoncé 1**
**est également vraie.**

**Exemple**

La proposition suivante est vraie : SI je viens de manger ALORS je n'ai pas faim.
Sa contraposée : SI j'ai faim (le contraire de « je n'ai pas faim ») ALORS je ne viens pas de manger (le contraire de « je viens de manger ») est également vraie.

**Définition** **Réciproque**

**Si l'on considère une implication énoncé 1 $\Rightarrow$ énoncé 2, on dit que :**
**énoncé 2 $\Rightarrow$ énoncé 1 est sa réciproque.**
**Cette réciproque peut être vraie ou non.**

**Exemple**

La proposition suivante est VRAIE : SI $x = 3$ ALORS $x^2 = 9$.
En revanche, sa réciproque : SI $x^2 = 9$ ALORS $x = 3$ est FAUSSE.
En effet, si $x^2 = 9$, $x$ peut être égal à 3 ou à $-3$.

**Définition** **Équivalence**

**Si une implication énoncé 1 $\Rightarrow$ énoncé 2 et sa réciproque énoncé 2 $\Rightarrow$ énoncé 1 sont vraies, on dit que les énoncés 1 et 2 sont équivalents.**
**À l'aide d'un symbole mathématique, cela se note :**
**énoncé 1 $\Leftrightarrow$ énoncé 2.**

**Exemple**

Dans un triangle ABC : le triangle ABC est rectangle en A $\Leftrightarrow$ $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
En effet, on sait d'après le théorème de Pythagore et sa réciproque que :
- le triangle ABC est rectangle en A $\Rightarrow$ $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow$ le triangle ABC est rectangle en A.

**Remarque** On pourra également écrire « le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$ » (ou « $AB^2 + AC^2 = BC^2$ si et seulement si le triangle ABC est rectangle en A »).

**Définition** **Sens de l'implication**

**Lorsqu'on doit écrire une démonstration et que l'on utilise un théorème, il faut veiller à utiliser la bonne implication.**

**Exemple**

Considérons l'énoncé suivant puis la démonstration d'un élève.

***Énoncé*** On considère un triangle ABC avec AB = 3, AC = 5 et BC = 4.
Montrer que ABC est rectangle en B.
***Démonstration de l'élève***
On a $AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ et $AC^2 = 5^2 = 25$ donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$ or **on sait que si ABC est rectangle en B alors $AB^2 + BC^2 = AC^2$ d'après le théorème de Pythagore** donc ABC est rectangle en B.

***Commentaires*** Le raisonnement de cet élève est incorrect. En effet, le théorème cité en gras, que l'on peut écrire symboliquement **ABC est rectangle en B $\Rightarrow$ $AB^2 + BC^2 = AC^2$**, a pour conclusion « $AB^2 + BC^2 = AC^2$ » et non « le triangle est rectangle » comme nous en aurions besoin ici : il y a donc un problème de logique.
Le théorème à utiliser est **$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow$ ABC est rectangle en B**, qui a bien pour conclusion « le triangle est rectangle en B » comme nous le souhaitons dans cet exercice.
***Raisonnement correct***
On a $AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ et $AC^2 = 5^2 = 25$ donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$ or **on sait que si $AB^2 + BC^2 = AC^2$ alors** ABC **est rectangle en** B **d'après la réciproque du théorème de Pythagore** donc ABC est rectangle en B.

# 3 Quantificateurs universels

**Définition** **Il existe**

**Quand on veut démontrer, par exemple, qu'il existe un réel $x$ (ou un entier $n$ etc.) qui vérifie une certaine propriété, il s'agit simplement de trouver un exemple pour lequel la propriété est vérifiée.**

**Exemple**

Montrons qu'il existe un réel pour lequel $2x^2 - 2 = 0$.
On constate que, pour $x = 1$, on a $2x^2 - 2 = 2 \times 1^2 - 2 = 2 \times 1 - 2 = 2 - 2 = 0$ donc il existe bien un réel pour lequel $2x^2 - 2 = 0$, en l'occurrence 1.

**Remarque** Si on ne voit pas $x = 1$ directement, on peut aussi résoudre l'équation $2x^2 - 2 = 0$ avec les méthodes classiques pour le retrouver : $2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.
Notons que la résolution de $2x^2 - 2 = 0$ fait plus que montrer qu'il existe une valeur de $x$ pour laquelle $2x^2 - 2 = 0$, elle prouve que 1 et –1 sont les deux seules.

**Définition** **Pour tout/Quel que soit**

**Quand on veut démontrer, par exemple, qu'une propriété est vraie « pour tout réel $x$ » ou « quel que soit le réel $x$ », il faut montrer qu'elle est vraie en toute généralité et non pas uniquement sur quelques exemples.**

**Exemple**

Montrons que la différence des carrés de deux entiers consécutifs est impaire.

On peut commencer, au brouillon, par se convaincre que c'est vrai en calculant $1^2 - 0^2 = 1 - 0 = 1$, $2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$, $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$, $12^2 - 11^2 = 144 - 121 = 23$, etc.

Ceci dit, nous n'avons rien démontré pour l'instant, puisqu'il faut montrer que cette propriété est vraie pour tous les entiers (c'est implicite dans l'énoncé).

Soit donc $n$ un entier (en toute généralité) et $n + 1$ celui qui le suit, il s'agit de montrer que $(n + 1)^2 - n^2$ est impair.

On calcule donc $(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$ qui est impair quel que soit $n$ (puisque $2n$ est un multiple de 2, donc pair, $2n + 1$ est impair).

On vient de montrer que $(n + 1)^2 - n^2$ est impair pour tout entier $n$ (ou quel que soit l'entier $n$) donc la différence des carrés de deux entiers consécutifs est bien impaire.

# 4 Type de raisonnement

## Règle Utilisation de la contraposée

**Lorsque l'on connaît une propriété, on peut utiliser sa contraposée (qui est également vraie) dans une démonstration.**

**Exemple**

On considère un triangle ABC avec AB = 4, AC = 3 et BC = 2. On souhaite savoir si ce triangle est rectangle (il ne peut être éventuellement rectangle qu'en C car le plus grand côté, l'hypoténuse éventuelle, est [AB]).

On calcule alors $AC^2 + BC^2 = 3^2 + 2^2 = 13$ et $AB^2 = 4^2 = 16$.

On constate que $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$ autrement dit que dans le triangle ABC, la somme des carrés des deux plus petits côtés est différente du carré du plus grand côté donc le triangle ABC n'est pas rectangle.

**Remarque** Le théorème de Pythagore dit que si un triangle est rectangle alors la somme des carrés des deux plus petits côtés est égale au carré du grand côté.

On a donc bien utilisé sa contraposée ici : si la somme des carrés des deux plus petits côtés est différente du carré du grand côté alors ce triangle n'est pas rectangle, à ne pas confondre avec sa réciproque (dont la conclusion est « le triangle est rectangle »).

## Règle Raisonnement par l'absurde

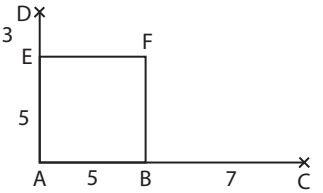
**L'utilisation de la contraposée est assez proche d'un autre type de raisonnement, le raisonnement par l'absurde.**

**Un raisonnement par l'absurde consiste à supposer vrai le contraire de ce que l'on veut montrer puis à mener un calcul ou un raisonnement mettant en lumière une contradiction (quelque chose de faux).**

**On dira alors que notre supposition de départ n'est pas correcte donc que la propriété voulue est vraie.**

**Exemple**

Sur la figure ci-contre, où ABFE est un carré dont chaque côté a pour longueur 5, E ∈ [AD] avec DE = 3 et B ∈ [AC] avec BC = 7, montrons que les points D, F et C ne sont pas alignés.




Supposons que les points D, F et C soient alignés. Dans ce cas :

- D, F et C sont alignés ;
- A, B et C sont alignés ;
- (DA) // (FB) (puisque (AE) et (DA) sont confondues et que ABFE est un carré).

On peut donc appliquer le théorème de Thalès, qui affirme que $\frac{FB}{DA} = \frac{BC}{AC}$.

Ici, on a $\frac{FB}{DA} = \frac{5}{8}$ et $\frac{BC}{AC} = \frac{7}{12}$ donc $\frac{FB}{DA} \neq \frac{BC}{AC}$, ce qui constitue une contradiction.

L'hypothèse de départ (D, F et C sont alignés) est donc fausse, autrement dit, D, F et C ne sont pas alignés.

## Règle Contre-exemple

**Pour infirmer une proposition (c'est-à-dire montrer qu'elle est fausse), il suffit d'en donner un contre-exemple.**

### Exemple

Considérons la proposition suivante : « Tous les nombres entiers impairs supérieurs à 2 sont premiers ».
Pour montrer que cette proposition est fausse, il suffit de trouver un nombre entier impair supérieur à 2 qui ne soit pas premier. C'est le cas de 9 (par exemple), qui est divisible par 3.
La proposition est donc fausse.

**Remarque** On dit que l'on a nié la proposition « tous les nombres entiers impairs supérieurs à 2 sont premiers ».

## Règle Raisonnement par disjonction des cas

**Lorsque qu'on démontre une propriété, il peut arriver que l'on doive traiter différents cas.**
**Dans ce cas, on peut procéder par disjonction des cas en faisant attention à bien traiter tous les cas possibles.**

### Exemple

Annie a souscrit un forfait téléphonique qui s'ajuste automatiquement à son nombre d'heures :
- si elle téléphone moins de 3 heures, elle sera facturée 6 euros au total quel que soit le nombre d'heures ;
- si elle téléphone entre 3 heures et 5 heures, elle sera facturée 2 euros l'heure de communication ;
- si elle téléphone plus de 5 heures, elle sera facturée 10 euros au total, quel que soit le nombre d'heures.

On souhaite montrer qu'Annie ne pourra pas avoir plus de 10 euros à payer.

Pour cela, on appelle $x$ son nombre d'heures de communication et on va traiter les trois cas suivants :
- si $x < 3$ alors elle paie 6 euros ;
- si $3 \leqslant x \leqslant 5$ alors $6 \leqslant 2x \leqslant 10$ or $2x$ est le montant de sa facture qui est donc inférieur ou égal à 10 ;
- si $x > 5$ alors elle paie 10 euros.

On voit que dans les 3 cas possibles, le montant de la facture est inférieur ou égal à 10 donc on peut affirmer qu'Annie ne pourra pas avoir plus de 10 euros à payer.

## 1 Programmation en langage Python

**1** `x=5` et `y=0`.

**3** `x` est de type `float` et `y` de type `int`.

**5** **a)** `x` vaut `8`. **b)** `x` vaut `15`.

**7**
```
x=float(input("taille en m:"))
if x >=1.20 :
    print("accès autorisé")
else :
    print("accès refusé")
```

**9** `0.375`

**11**
```
def ohm(R,I) :
    U=R*I
    return U
```

**13** Successivement : `55 77 103`

**15** Successivement : `2 8 32 128 512`

**17**
```
for x in range (97,122) :
   print("L'image de",x,"par
         f est",8*x-7)
```

**19**
```
p=1
while p<=1000000:
    print(p)
    p=p*5
```

**36** **a)** `x=206.25` et `y=37.5`
**b)** `a=36` et `b=3.6`
**c)** `a="tic"` et `b="tictac"`.

**42** `mot1` et `mot2` sont de type `str`.
`a` et `b` sont de type `str`.

**46** **a)** `4` **b)** `"parfait"`

**51**
```
if d/t>130:
    print("excès de vitesse")
else:
    print("tout est en règle")
```

**55** **1. a)** 5 **b)** `16.55...`

**2.** La fonction donne la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent `c1` et `c2`.

**60**
```
def secteur(n,n1):
    return 360*n1/n
```

**63** Successivement : `1 2 4 7 11 16`

**69** On a successivement :
`u=5` et `n=1` ; `u=2.7` et `n=2` ; `u≈1.72` et `n=3` puis `u≈1.44` et `n=4`.
Comme `u<1.5`, `n` vaut `4` en fin de programme.

**74**
```
for i in range(5,26):
    print(fonct(i))
```

**78**
```
for i in range(4,618):
    print(2*i)
```

**81**
```
nombre=3
ecart=1
while nombre<=1000:
    nombre=nombre+ecart
    ecart=ecart+1
    print(nombre)
```

**98** B **99** B et D **100** B
**101** B **102** A, B et D **103** C
**104** D **105** D **106** A, B et C
**107** A **108** A et C

**109**
```
pays:str
vaccins:int
temp:float
```

**110** **1.** `a=4` et `b=16`.
**2.a)** Par `4.25`.
**b)** `a` deviendrait de type `float` et non plus `int`.

**111** **a)** `False` **b)** `True` **c)** `True`

**112** **a)** `1 et -2 : pas même signe`
**b)** `6 et 3 : même signe`

**113**
```
import random
y=random.randint(12,20)
if y<15:
    c=y
else:
    c=y/2
```

**114**
```
import random
y=random.randint(12,20)
if y<15 or y>18:
    c=y
else:
    c=0
```

**115** **a)** `20` **b)** `impossible !`

**116**
```
def freq(sous_pop,pop):
    return
sous_pop/pop*100
```

**117**
```
def va(x):
    if x>=0:
        v=x
    else:
        v=-x
    return v
```

**118** **1.** Successivement : `191 193 195 197 199`

**2.**
```
for e in range(95,100) :
    print(2*e+1)
```

**119**
```
s=1
while sdb(s)<=6000:
    print(sdb(s))
    s=s+0.5
```

**120**
```
total=0
for i in range(1,36):

n=float(input("Nouvelle note"))
    total=total+n
moyenne=total/35
print(moyenne)
```

## 2 Nombres et calculs

**1** $E = 6^{-6}$ $F = 7^{-5}$
$G = 5{,}6^{-21}$ $H = 1\,235^{28}$

**3** **a)** $5\sqrt{6}$ **b)** $6\sqrt{6}$ **c)** $11\sqrt{6}$

**7** **a)** Faux. Contrexemple : $5 + 7 = 12$
**b)** Vrai. $2k + 2k' = 2(k + k')$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $k' \in \mathbb{N}$ donc $(k + k') \in \mathbb{N}$
**c)** Faux . Contrexemple : $4 + 9 = 13$

**10** $\sqrt{487} \approx 22{,}1$
487 n'est divisible par aucun des nombres premiers suivants : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 et 19 donc 487 est premier.

**13** Si $\frac{5}{7}$ est décimal alors il existe des entiers $a$ et $n$ tels que $\frac{5}{7} = \frac{a}{10^n}$. On a alors $7a = 5 \times 10^n$.
L'unique décomposition en produit de facteurs de $5 \times 10^n$ ne contient que des 2 et des 5.
On obtient donc une contradiction donc $\frac{5}{7}$ n'est pas décimal.

**15** **a)** $1{,}4 < \frac{10}{7} < 1{,}5$
**b)** $1{,}42 < \frac{10}{7} < 1{,}43$
**c)** $1{,}428 < \frac{10}{7} < 1{,}429$

**68** **a)** $8^{-4}$ **b)** $(-10)^3$
**c)** $6^{-12}$ **d)** $7{,}5^{16}$

**73** **1.** $1{,}51 \times 10^{18}$ km
**2.** $400\text{ nm} = 4 \times 10^{-7}$ m
$200\text{ nm} = 2 \times 10^{-7}$ m
$1\,000\text{ nm} = 10^{-6}$ m
$5\ \mu\text{m} = 5 \times 10^{-6}$ m
$50\ \mu\text{m} = 5 \times 10^{-5}$ m

**87** $A = 9\sqrt{2}$ $B = -3\sqrt{3}$ $C = 31\sqrt{5}$

**94** **1.** $AC = 4\sqrt{7}$ cm **2.** $12\sqrt{7} \approx 13{,}7$ cm

**108** Elle en a 421.

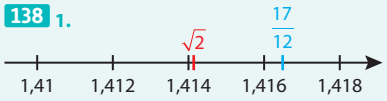
**114** $n$ s'écrit sous la forme $2k + 1$.
$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$
$= 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$
avec $k' = 2k^2 + 2k$ donc $n^2$ est impair.

**120** **1.** Les nombres premiers sont :
**a)**157 et **c)**311.
**2. a)** $\frac{231}{468} = \frac{77}{156}$ **b)** $\frac{622}{314} = \frac{311}{157}$
**c)** Irréductible **d)** $\frac{204}{231} = \frac{68}{77}$

**131** **a)** Non. Si $\frac{7}{11}$ est décimal alors il existe des entiers $a$ et $n$ tels que $\frac{7}{11} = \frac{a}{10^n}$. On a alors $11a = 7 \times 10^n$. L'unique décomposition en produit de facteurs de $7 \times 10^n$ ne contient que des 7, des 2 et des 5. On obtient donc une contradiction donc $\frac{7}{11}$ n'est pas décimal.
**b)** Oui. $\frac{77}{32} = \frac{240\,625}{10^5}$
**c)** Non. Même méthode qu'en **a).**
**d)** Non. Même méthode qu'en **a).**

**136** **1.** Oui car $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
**2.** Non. Contrexemple : $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

**138** **1.**




**2.** $0{,}002 < \frac{17}{12} - \sqrt{2} < 0{,}003$

**170** B et C **171** D **172** B et C

**173** B **174** A et B **175** B et C

**176** B **177** B et C **178** B et D

**179** C **180** A et B **181** C

**182** B et D **183** C **184** A

**185** C et D **186** A **187** D

**188** **a)** $3^{-3}$ **b)** $7{,}1^{-2}$ **c)** $(-7)^{30}$ **d)** $2^9$
**e)** 1 **f)** 10 **g)** $29^{-6}$ **h)** $36^7$

**189** $A = 24 \times 10^{-1} = 2{,}4 = \frac{12}{5}$

**190** 1 400 000

**191** $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ; $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ; $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

**192** **1.** $A = 8\sqrt{5}$ $B = 4\sqrt{5}$

**2.** $A \times B = 8\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} = 8 \times 4 \times \sqrt{5}^2 = 32 \times 5 = 160$ donc $A \times B$ est un entier.

**193** **1.** $3\sqrt{7}$ cm **2.** $\frac{\sqrt{21}}{2}$ cm **3.** $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ cm$^2$

**194** **1.** 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13; 17 et 19.
**2.** 463 n'est divisible par aucun des nombres premiers suivants : 2 ; 3 ; 5; 7 ; 11 ; 13 ; 17 et 19 donc 463 est premier.

**195** Deux entiers sont consécutifs donc s'écrivent $2p$ et $2p+1$.
$2p \times (2p+1) = 4p^2 + 2p = 2(2p^2 + p)$ et donc leur produit est pair.

**196** **1.** $k$ divise $a$ et $b$ donc il existe deux entiers $n$ et $m$ tels que $a = kn$ et $b = km$.
On a $a - b = k(n - m)$ et $n - m$ est un entier relatif donc $k$ divise $a - b$.
**2.** **a)** Jules pourra réaliser au maximum 27 paquets de bonbons car 27 est le plus grand diviseur commun à 108 et 135.
**b)** Il y aura 4 bonbons rouges et 5 bonbons noirs dans chaque paquet.

**197** $-0{,}054 < \frac{\sqrt{3}-2}{5} < -0{,}053$

**198** $\frac{65}{91} = \frac{5}{7}$ n'est pas un décimal (voir corrigé de l'exercice **13**).

**199** Supposons que $\frac{\pi}{2}$ est rationnel alors il existe des entiers $p$ et $q$ tels que $\frac{\pi}{2} = \frac{p}{q}$
On a alors $\pi = \frac{2p}{q}$. Donc on aboutit à une absurdité car on sait que $\pi$ est irrationnel et donc il ne peut pas s'écrire sous la forme d'un quotient. On en déduit que la supposition est fausse, donc $\frac{\pi}{2}$ est irrationnel.

## 3 Intervalles, inégalités, inéquations

**1** [2 ; 4]

**3** $[-10 ; 5] \cap [4 ; 12] = [4 ; 5]$
et $[-10 ; 5] \cup [4 ; 12] = [-10 ; 12]$

**5** $2{,}5t \geqslant 25$ et $t - 7 \geqslant 3$

**7** $5x + 7 \leqslant 27 \Leftrightarrow 5x \leqslant 20 \Leftrightarrow x \leqslant 4$
Donc $S = ]-\infty ; 4]$.

**9** $C > E$ si $x > 7$, $C = E$ si $x = 7$ et $C < E$ si $x < 7$.

**11** **1.** [4 ; 6]
**2.** $x \in [0 ; 10] \Leftrightarrow |x - 5| \leqslant 5$

**51** **a)** $1{,}4 \in [0 ; 7]$
**b)** $6 \in \left[\frac{7}{3} ; +\infty\right[$
**c)** $-3 \notin ]-\infty ; -3{,}5[$

**57** **a)** Vrai **b)** Faux **c)** Faux **d)** Vrai

**61** **a)** $[20 ; 25[ \cap [14 ; 21[ = [20 ; 21[$
et $[20 ; 25[ \cup [14 ; 21[ = [14 ; 25[$.
**b)** $]-\infty ; 7{,}5] \cap [10 ; 22] = \varnothing$ et $]-\infty ; 7{,}5] \cup [10 ; 22]$ ne peut pas se simplifier.
**c)** $]-1 ; +\infty[ \cap ]-\infty ; 1[ = ]-1 ; 1[$
et $]-1 ; +\infty[ \cup ]-\infty ; 1[ = ]-\infty ; +\infty[$.
**d)** $]0 ; 1] \cap [0{,}5 ; 0{,}7] = [0{,}5 ; 0{,}7]$
et $]0 ; 1] \cup [0{,}5 ; 0{,}7] = ]0 ; 1]$.

**70** **1.** $-6 \leqslant 2a \leqslant 3$
donc $-14 \leqslant 2a - 8 \leqslant -5$.
**2.** **a)** $0 \leqslant 3a + 9 \leqslant 13{,}5$
**b)** $13 \geqslant -4a + 1 \geqslant -5$
**c)** $0 \leqslant \frac{a+3}{2} \leqslant 2{,}25$

**83** **a)** $1{,}4 \leqslant x + y \leqslant 4{,}2$
**b)** $1{,}4 \leqslant x + 3y \leqslant 6{,}2$
**c)** D'abord $0 \geqslant -y \geqslant -1$
soit $-1 \leqslant -y \leqslant 0$.
Alors $0{,}4 \leqslant x - y \leqslant 3{,}2$.
**d)** $-0{,}2 \leqslant 2x - 3y \leqslant 6{,}4$

**93** **a)** $t > -8{,}5$ donc $\mathcal{S} = ]-8{,}5 ; +\infty[$
**b)** $x > -0{,}5$ donc $\mathcal{S} = ]-0{,}5 ; +\infty[$
**c)** $a \leqslant 1{,}5$ donc $\mathcal{S} = ]-\infty ; 1{,}5]$
**d)** $t > 0$ donc $\mathcal{S} = ]0 ; +\infty[$

**100** Le résultat du premier programme en fonction de la valeur saisie $t$ est $4t + 2$.
Le résultat du second programme en fonction de la valeur saisie $t$ est $0{,}5(t + 6) = 0{,}5t + 3$.
Le résultat du premier programme est supérieur à celui du deuxième pour $t \in \left]\frac{2}{7} ; +\infty\right[$, inférieur pour $t \in \left]-\infty ; \frac{2}{7}\right[$ et les résultats sont égaux pour $t = \frac{2}{7}$.

**103** L'inéquation est $1{,}50x - 2{,}90 \geqslant 25$.
$1{,}50x - 2{,}90 \geqslant 25 \Leftrightarrow 1{,}50x \geqslant 27{,}90 \Leftrightarrow x \geqslant 18{,}6$.
Elle doit vendre au moins 18,6 kg de carottes.

**110** **a)** 4 **b)** 3,8 **c)** $\frac{100}{3}$
**d)** 1 **e)** $\sqrt{17} - 2$ **f)** $\sqrt{17} - 2$

**117** **a)** $[-8 ; -2]$ **b)** $[-3 ; 1]$ **c)** $]2 ; 4[$

**136** B et C **137** B **138** D

**139** B **140** A **141** A et C

**142** B et C **143** B **144** B

**145** D **146** A **147** B

**148** B et C **149** C

**150** **1.**

**2.** $-1$ ; 0,5 ; 1,233 ; 3,4 appartiennent à cet intervalle et $-2$ ; $-100$ ; 3,501 ; 67 n'y appartiennent pas.

**151** **a)** $-3 \leqslant x \leqslant 16$ **b)** $x \geqslant -8$

**152** **a)** $]5 ; 12]$ **b)** $]-\infty ; 4]$

**153** L'intersection est [8 ; 10] et la réunion est [5 ; 12].

**154** Faux.

**155** L'intersection est $]-3 ; 5[$ et la réunion est $[-3 ; 8]$.

**156** $5x \leqslant 50$ ; $x - 12 \leqslant -2$ et $x + y \leqslant 15$.

**157** $1{,}2 < \sqrt{5} - 1 < 1{,}3$ et $11 < 5\sqrt{5} < 11{,}5$.

**158** $[8 ; +\infty[$

**159** $11 \leqslant 2x + 1 \leqslant 15$
$-5 \geqslant 10 - 3x \geqslant -11$
et $1 \leqslant x + 2y \leqslant 17$.

**160** Vrai.

**161** **a)** $\mathcal{S} = ]8 ; +\infty[$ **b)** $\mathcal{S} = ]-\infty ; 0{,}5[$

**162** $A > B$ si $x < \frac{14}{5}$ ; $A = B$ si $x = \frac{14}{5}$
et $A < B$ si $x > \frac{14}{5}$.

**163** **a)** $\mathcal{S} = ]-\infty ; 20]$ **b)** $\mathcal{S} = \left[\frac{10}{3} ; +\infty\right[$

**164** Le tarif A est plus avantageux pour un temps supérieur à 6 h 15 min.

**165** $\mathcal{S} = \left]-\infty ; \frac{648}{35}\right]$

**166** **a)** 2 **b)** 6

**167** **a)** $12 - \sqrt{7}$ **b)** $\sqrt{7} + 3$ **c)** $\sqrt{7} - 2$

**168** [8 ; 32]

**169** $\left[-\frac{7}{10} ; \frac{3}{10}\right]$

## 4 Calcul littéral

**1** **a)** $2x^2 + 17x + 35$ **b)** $4x^2 - 12x + 9$
**c)** $x^2 - 4x + 4$ **d)** $-x^2 + 6x - 5$

**3** **a)** $-4x(x + 2)$
**b)** $(t + 5)^2$
**c)** $(7 + 2x)(7 - 2x)$

**5** $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3} ; \frac{9}{4}\right\}$.

**7** Pour $x \neq -2$, $\frac{x+3}{3(x+2)}$.

**9** **a)** $\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{4}\right\}$ **b)** $\mathcal{S} = \left\{-\frac{17}{4}\right\}$

**58** **a)** $16x^2 - 72x + 81$ **b)** $36x^2 - 64$
**c)** $x^2 - 49$ **d)** $25x^2 + 70x + 49$

**73** **a)** $(x + 7)(x - 7)$ **b)** $(x + 6)^2$
**c)** $(3x - 11)^2$ **d)** $(5 + 8x)(5 - 8x)$

**83** **a)** $\mathcal{S} = \{-3 ; 5\}$ **b)** $\mathcal{S} = \left\{-\frac{2}{3} ; \frac{4}{5}\right\}$
**c)** $\mathcal{S} = \left\{0 ; \frac{4}{5}\right\}$ **d)** $\mathcal{S} = \{0 ; 3\}$
**e)** $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3} ; 5\right\}$

**91** **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{5}{2}$ et $-\frac{2}{3}$ **c)** $-2$ et 2 **d)** 0

**99** **a)** $\mathcal{S} = \{3\}$
**b)** $\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{2}\right\}$
**c)** $\mathcal{S} = \{7\}$
**d)** $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

**138** A et C **139** A **140** A

**141** C **142** D **143** D

**144** D **145** C **146** D

**147** C **148** B **149** A et C

**150** B et C **151** A

**152** **1. a)** $12x+4$
**b)** $8x^2+34x+35$
**c)** $x^2+10x+25$
**d)** $x^2-12x+36$
**e)** $x^2-16$
**2. a)** $3(7x+2)$
**b)** $(3x+4)(x+y^2)$
**c)** $(x+7)^2$
**d)** $(x-4)^2$
**e)** $(x+9)(x-9)$
**3. a)** Pour $x\neq 4$, $\dfrac{5x-7}{x-4}$.
**b)** Pour $x\neq\dfrac{1}{2}$ et $x\neq\dfrac{7}{5}$, $\dfrac{23x+17}{(2x-1)(5x+7)}$.

**153** **1. a)** $-10x-8$
**b)** $15x^2-47x-10$
**c)** $4x^2+28x+49$
**d)** $16x^2-72x+81$
**e)** $25x^2-36$
**2. a)** $7(5x-4)$
**b)** $3(8x^2-7)$
**c)** $(x+4)(-3x+4)$
**d)** $(3x+5)^2$
**e)** $(6x-9)^2$
**3. a)** Pour $x\neq\dfrac{7}{3}$, $\dfrac{7x-39}{3x-7}$.
**b)** Pour $x\neq-\dfrac{9}{2}$ et $x\neq\dfrac{1}{4}$, $-\dfrac{7(3x-4)}{(2x+9)(4x-1)}$.

**154** **1. a)** $-12x+30$
**b)** $20x^2-84x+49$
**c)** $-2x^2+7x+30$
**d)** $4x^2+45x-91$
**2. a)** $-8(7x-4)$
**b)** $(-2x+5)(3x+1)$
**c)** $(3x+1)(-2x+5)$
**3. a)** Pour $x\neq-\dfrac{11}{6}$, $\dfrac{14x+38}{6x+11}$.
**b)** Pour $x\neq\dfrac{5}{2}$ et $x\neq 9$, $\dfrac{-32x-11}{(2x-5)(x-9)}$.

**155** **a)** $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{7}{2};\dfrac{13}{8}\right\}$
**b)** $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{23}{10}\right\}$
**c)** $\mathcal{S}=\{-12\}$

**156** **a)** $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{7}{5};\dfrac{15}{7}\right\}$
**b)** $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{13}{15};\dfrac{13}{15}\right\}$
**c)** $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{17}{3};\dfrac{3}{13}\right\}$

**157** **a)** $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{2}{3};\dfrac{7}{4}\right\}$
**b)** $\mathcal{S}=\{3\}$
**c)** $\mathcal{S}=\left\{-2;\dfrac{9}{2}\right\}$

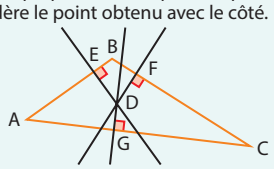
**158** **a)** $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{11}{2}\right\}$
**b)** $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{3}{22}\right\}$

**159** **a)** $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{6}{7};\dfrac{3}{4}\right\}$
**b)** $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{34}{95}\right\}$

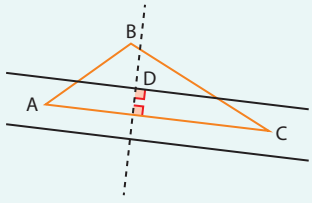
**160** **a)** $\mathcal{S}=\{5\}$
**b)** $\mathcal{S}=\varnothing$

## 5 Géométrie non repérée

**1** **1.** Pour chacun des côtés du triangle on mène la perpendiculaire passant par D et on considère le point obtenu avec le côté.




**2.** L'ensemble est constitué de deux droites : la droite parallèle à (AC) passant par D et son image par la symétrie d'axe (AC).

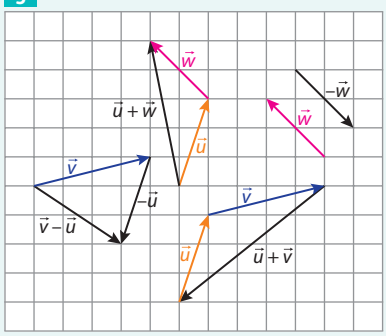



**3** **1.** aire ABC$=\dfrac{1}{2}$ aire ABCD $=9$.
**2.** Par Pythagore on obtient :
AC $=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}$
**3.** On a aussi aire ABC $=\dfrac{AC\times BH}{2}=9$.
On en déduit que BH $=\dfrac{18}{\sqrt{45}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

**5** **1.** $\overrightarrow{BR}$, $\overrightarrow{CR}$ et $\overrightarrow{AD}$ par exemple.
**2.** $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ ou encore $\overrightarrow{BR}=\overrightarrow{RD}$ par exemple.

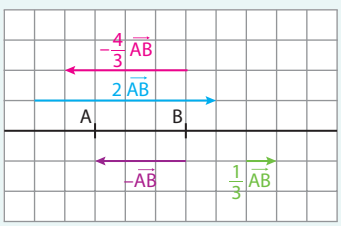
**7** **1.** $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{EH}$ **2.** C'est un parallélogramme.

**9**




**11** **a)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$
**b)** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
**c)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$.

**13**



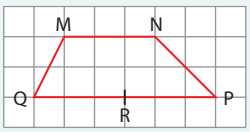

**15** **1.** $-2\overrightarrow{AP}=-2\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$
$=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BR}$
**2.** Les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{BR}$ sont colinéaires donc les droites (AP) et (BR) sont parallèles.

**59** **1.** Sur une perpendiculaire menée à $d$ on place un point A à 2 cm de $d$. L'ensemble cherché est constitué de deux droites : la droite parallèle à $d$ passant par A et son image par la symétrie d'axe $d$.
**2.** On reprend la construction du 1. mais avec A à 4 cm de $d$. L'ensemble cherché est constitué des points situés entre les deux droites.

**70** **1.** On a $17{,}5^2=10{,}5^2+14{,}5^2$ ainsi $AC^2=AB^2+BC^2$ donc par la réciproque de Pythagore le triangle ABC est rectangle en B.
**2.** Aire ABC $=\dfrac{AB\times BC}{2}=73{,}5$ et aire ABC $=\dfrac{AC\times BH}{2}$ donc $\dfrac{17{,}5\times BH}{2}=73{,}5$
**3.** On en déduit BH $=8{,}4$.

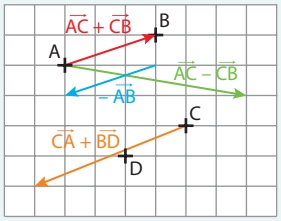
**76** **1.** $\overrightarrow{DE}$ **2.** $\overrightarrow{GD}$ **3.** $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{CD}$.

**83** **1.**

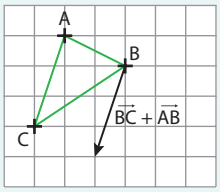



**2.** $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{RP}$ car ils ont même sens et direction(MNPQ est un trapèze avec (MN)//(PQ)) mais aussi même norme puisque 2MN = QP.
**3.** MNRQ et MNPR sont des parallélogrammes car $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{RP}$.

**90**

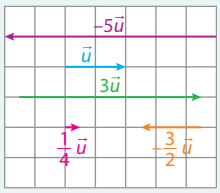



**94** **1.** et **2.**




**3.** $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

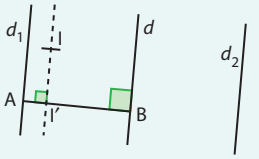
**101**



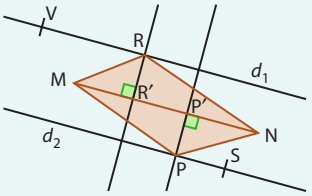

**109** **1.** $-3\overrightarrow{AN}=-3\left(\dfrac{-1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$
$=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}$
**2.** Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires avec un point en commun donc les points A, M et N sont alignés.

**133** A, C et D **134** A et D **135** B et C
**136** B et C **137** C **138** A
**139** C **140** C et D **141** C

**142** **1.** B **2.** et **3**



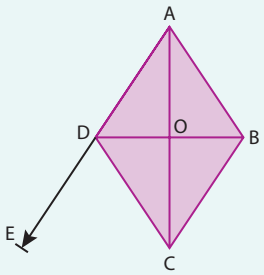
**143** **1.**




**2.** Les distances PP′ et RR′ sont égales.
**3.** On les choisit n'importe où sur $d_1$ la parallèle à (MN) passant par R ou sur $d_2$ la parallèle à (MN) passant par P.

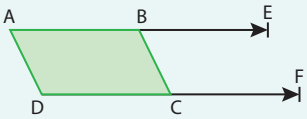
**144** Aire ACBD = $2 \times$ aire ACB = $2 \times \dfrac{CC' \times AB}{2}$ = CC′ × AB, où C′ est le projeté orthogonal commun à C et D. Cette aire est maximale lorsque CC′ est maximale, soit lorsque $CC' = \dfrac{AB}{2}$ ce qui place C et D à l'intersection du cercle et de la médiatrice de [AB].

**145** **1.** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
**2.**



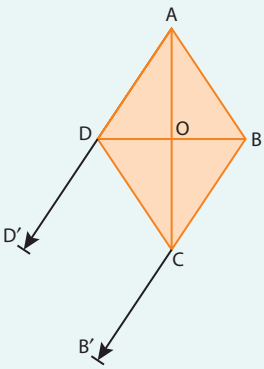

**3.** $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

**146** **1.**



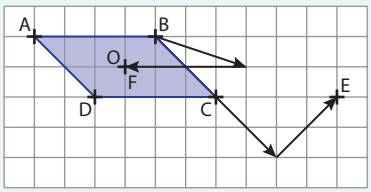

**2.** $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CF}$ donc BEFC est un parallélogramme.

**147** **1.**

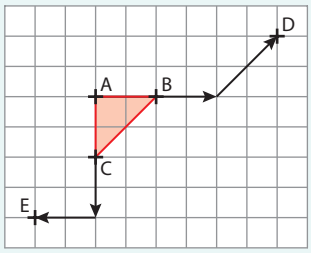



**2.** $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB'}$ donc DCB′D′ est un parallélogramme.
Alors $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

**148**

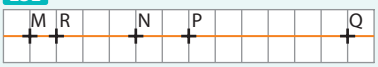



**149**

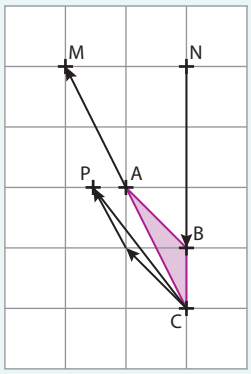



**150** **a)** $\vec{IJ} + \vec{LK} = \vec{IK} + \vec{KJ} + \vec{LJ} + \vec{JK} = \vec{IK} + \vec{LJ}$
**b)** $\vec{IK} + \vec{JL} = \vec{IL} + \vec{LK} + \vec{JK} + \vec{KL} = \vec{IL} + \vec{JK}$.

**151**




**152** **1.** **a)** et **2**




**1.** **b)** Les points A, M et C sont alignés.

**153** **1.** $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DA} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AD} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

**b)** $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AD} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

**2.** $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} + \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AD}$.

**3.** On constate que $-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CE}$.
Les vecteurs sont colinéaires donc les droites (BF) et (CE) parallèles.

## 6 Vecteurs et repère

**1** • $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ • $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ • $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ • $\vec{t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

**3** • $-\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ • $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}$ • $3\vec{u}-2\vec{v}\begin{pmatrix}-16\\1\end{pmatrix}$

**5** AB = $\sqrt{13}$

**7** $\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NR}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.
$3 \times 2 - 3 \times 2 = 0$ donc P, N et R sont alignés.

**9** **1.** M(−8 ; 0) **2.** N(4 ; −8)

**56** **a)** $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$ **c)** $-2\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$

**63** (0,5 ; −0,5)

**74** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-8\end{pmatrix}$ donc AB = $\sqrt{80}$.
BC = $\sqrt{45}$ et AC = $\sqrt{125}$.
Le périmètre est $\sqrt{80} + \sqrt{45} + \sqrt{125}$.

**82** **2.** Le quadrilatère RIEN est rectangle.
**3.** Le milieu de [ER] et [NI] est A(0,5 ; 2,5) et ER = EN = $\sqrt{50}$. Les diagonales de RIEN sont égales et ont le même milieu, c'est un rectangle.

**102** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-9\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $-9 \times (-1) - 3 \times 3 = 0$.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires donc (AB)//(CD) et ABCD est un trapèze.

**105** **a)** $y = -2$ **b)** $y = 4$

**111** EFGH est un parallélogramme donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$. H($x$ ; $y$) donc $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}1-x\\4-y\end{pmatrix}$ donc $5 = 1 - x$ et $5 = 4 - y$ donc H(6 ; −1).

**115** C(11 ; −16)

**152** B **153** D **154** B
**155** B **156** C **157** D
**158** B **159** A **160** C
**161** C et D **162** B et C **163** B

**164** **1.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ **2.** $\vec{u}$

**165** $\vec{w}\begin{pmatrix}-31\\17\end{pmatrix}$ **166** $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

**167** (1 ; 1)

**168** D(5 ; −1) **169** Q(7 ; −7) **170** $\sqrt{113}$

**171** **1.** $AB^2 + AC^2 = 100$ et $BC^2 = 100$ donc ABC est rectangle en A.
**2.** Aire ABC = $\dfrac{AB \times AC}{2} = 25$

**172** **1.** $PI^2 + PC^2 = 26{,}5$ et $IC^2 = 26{,}5$ donc PIC est rectangle en P.
**2.** AP = AI = AC = $\sqrt{6{,}625}$

**173** **1.** $\overrightarrow{RI}\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RI} = \overrightarrow{HC}$. RC = IH = $\sqrt{90}$.
RICH est un parallélogramme avec des diagonales égales : c'est un rectangle.
**2.** $\widehat{RIH} \approx 26{,}6°$

**174** **1.** Oui car $6 \times (-3) - 2 \times 9 = 0$.
**2.** Oui car $9 \times 1 - (-3) \times (-3) = 0$.

**175** $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont colinéaires car $4 \times 2 - 1 \times 8 = 0$ donc (DE)//(GF).
$\overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{EF}$ ne sont pas colinéaires car $0 \times (-5) - (-6) \times 4 \neq 0$.
DEFG est un trapèze.

**176** $x = 3$ ou $x = 1$.

## 7 Droites du plan et systèmes d'équations

**1** $2x + 3y + 1 = 0$

**3** Elle passe par les points (1 ; 1) et (6 ; 5).

**5** Elle passe par les points (0 ; 1) et (1 ; 4).

**7** $y = -\dfrac{1}{4}x + 2$

**9** **1.** On calcule le coefficient directeur $m = \dfrac{4}{3}$ et elle passe par A donc $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{5}{3}$.
**2.** $y = \dfrac{5}{2}x + 2$

**11** Les coefficients $a$, $b$, $a'$ et $b'$ sont proportionnels mais pas $c$ et $c'$ donc les droites sont parallèles mais pas confondues.

**13** La solution est $\left(\dfrac{19}{11} ; -\dfrac{12}{11}\right)$.

**15** La solution est $\left(-\dfrac{11}{14} ; -\dfrac{5}{7}\right)$.

**47** **1.** $-3-3+7\neq 0$ donc C $\notin d$.
**2.** $\frac{5}{3}-3y+7=0$ donc $y_D=\frac{26}{9}$.
**3.** $x+\frac{9}{2}+7=0$ donc $x_E=-\frac{23}{2}$.
**4.** $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

**56** $4x+3y-5=0$

**60** Elle passe par les points (–1 ; –2) et (2 ; 2).

**73** Elle passe par les points (0 ; –3) et (1 ; 2).

**78** $d_1 : y=x-2$, $d_2 : y=2$,
$d_3 : y=-2x+4$ et $d_4 : x=-1$

**86** $y=-x+3$

**97** **a)** $\vec{u_1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ non colinéaires donc les droites sont sécantes
**b)** $\vec{u_3}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u_4}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les droites sont parallèles.

**101** $x=-\frac{2}{5}$ et $y=\frac{1}{5}$.
**106** $x=-2$ et $y=-1$.
**115** **a)** $d_1 : y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$ et $d_2 : y=\frac{1}{4}x+3$
**b)** $x=\frac{64}{5}$ et $y=\frac{31}{5}$

**148** C **149** B **150** D
**151** D **152** A **153** C
**154** D **155** A **156** C
**157** B **158** D **159** B
**160** A **161** $x=\frac{7}{2}$ **162** $m=\frac{5}{3}$

**163** (0 ; –2) et $\left(\frac{8}{3};0\right)$

**164** $d_1 : y=-\frac{1}{4}x+3$

**165** **1.** $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et (1 ; 0)
**2.** $d_2 : -x+3y+1=0$

**166** $d_3 : y=\frac{2}{5}x+2$

**167** $y=\frac{1}{2}x+3$ **168** $x=4$

**169** **a)** (AB) : $2x-y+11=0$
**b)** (CD) : $5x+4y+7=0$

**170** **a)** (EF) : $\frac{4}{3}x-\frac{7}{4}y+\frac{47}{12}=0$
**b)** (HK) : $x+\frac{11}{6}y+\frac{23}{30}=0$

**171** **1.** $m=-5$ et $m=\frac{1}{2}$ sont distincts donc les droites se coupent.
**2.** $\left(\frac{7}{22};-\frac{13}{22}\right)$
**3.** Ce sont les coordonnées du point d'intersection.

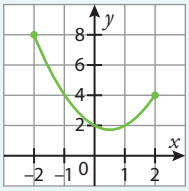
**170** $\left(-\frac{17}{46};-\frac{1}{46}\right)$

**173** $\left(-\frac{21}{13};-\frac{32}{13}\right)$
**174** On a le système : $\begin{cases}5x+3y=10,3\\3x+4y=10,8\end{cases}$
qui donne le prix d'un stylo 0,80 euro et d'un cahier 2,10 euros.

## 8 Généralités sur les fonctions, fonctions de référence

**1** **1.** $f(x_C)=f(2)=2^3-2^2=4=y_C$. Donc C $\in \mathscr{C}_f$.
**2.** L'ordonnée de E est
$y_E=f(x_E)=f(-3)=(-3)^3-(-3)^2=-36$.

**3**



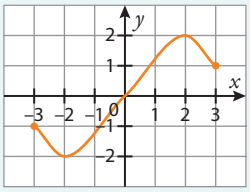

**5** **a)** $\mathscr{S}=]-2\,;4[$ **b)** $\mathscr{S}=[-2\,;2]\cup[4\,;5]$

**7** **a)** La solution est $x=\sqrt[3]{125}=5$.
**b)** La solution est $x=10^2=100$.

**9** **a)** $\mathscr{S}=\left[-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right]$ **b)** $\mathscr{S}=]25\,;+\infty[$
**c)** $\mathscr{S}=]2\,;+\infty[$

**11** $f$ semble paire.

**13** On obtient :




**15** **a)** $\mathscr{S}=\{1\}$ **b)** $\mathscr{S}=[1\,;5]$

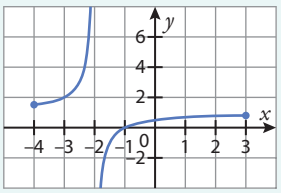
**54** $\mathscr{D}_f=[0\,;5]$ et $A(x)=5x+7x-x^2=12x-x^2$.

**61** **1.** $y=\frac{2x+4}{x+1}$.

**2.** $f(0)=\frac{2\times 0+4}{0+1}=4\neq 5$ donc A $\notin \mathscr{C}_f$.

**3.** $\frac{2x+4}{x+1}=0 \Leftrightarrow 2x+4=0$ et $x\neq -1$.
$2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$ donc $x_B=-2$.

**74**




**80** **1.** On pose $x=$ AM. L'aire est alors donnée par la fonction $h$ définie par $h(x)=(7-x)(4-x)$ pour tout $x\in[0\,;4]$.

**2.**

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 28 | 22,75 | 18 | 13,75 |

| $x$ | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 10 | 6,75 | 4 | 1,75 | 0 |

**3.** On peut placer M à 1,5 cm du point A.

**85** **a)** $\mathscr{S}=\{-2\,;0\}$ **b)** $\mathscr{S}=\{-1\,;1\}$
**c)** $\mathscr{S}=[-3\,;2[$ **d)** $\mathscr{S}=]1\,;4]$
**e)** $\mathscr{S}=[-3\,;4]$ **f)** $\mathscr{S}=\{-3\}$

**93** **a)** $x=-3\sqrt{2}$ ou $x=3\sqrt{2}$.
**b)** $x=\sqrt[3]{115}\approx 4{,}86$
**c)** $x=400$
**d)** $x=\sqrt[3]{28}\approx 3{,}04$

**101** **1.** $2x^2+6<8 \Leftrightarrow 2x^2<2 \Leftrightarrow x^2<1$.
**2.** $\mathscr{S}=]-1\,;1[$.

**106** **1.** $f(4)=14$ et $f(-4)=6$.
**2.** $f$ n'est donc ni paire ($f(-4)\neq f(4)$) ni impaire ($f(-4)\neq -f(4)$).

**113** **1.**

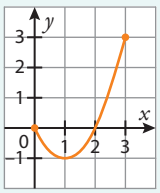
| $x$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | –14 | –1 | 0 | 1 | 14 |

**2.** $g(1)=1$ donc $a\times 1^3-1=1$ donc $a=2$.

**116** **1.** Ces deux courbes sont des droites car $g$ et $h$ sont deux fonctions affines.
**2.** On résout $g(x)=h(x)$.
$-3x+4=6x+1 \Leftrightarrow -9x=-3 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.
De plus $g\left(\frac{1}{3}\right)=3$. Donc M$\left(\frac{1}{3};3\right)$.
**3.** $g(x)>h(x) \Leftrightarrow -3x+4>6x+1 \Leftrightarrow x<\frac{1}{3}$.

**141** A et D **142** B **143** D
**144** B **145** C **146** A et C
**147** A et D **148** C **149** A, C et D
**150** B **151** C

**152**




**2.** Non car $f(1,2)=-0{,}96\neq -0{,}9$.

**153** **a)** $\mathscr{S}=\{1\,;4\}$ **b)** $\mathscr{S}=\{-0{,}5\,;6\}$
**c)** $\mathscr{S}=]-1\,;4[$ **d)** $\mathscr{S}=[-1\,;2]\cup[3{,}5\,;6]$
**e)** $\mathscr{S}=\{2\}$ **f)** $\mathscr{S}=]2\,;6]$

**154** $\left(-\frac{5}{12};\frac{2}{13}\right)$.

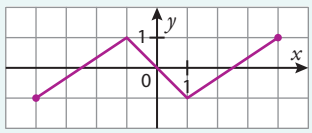
**155** **a)** $x=-2$ **b)** $x=\frac{1}{6}$ **c)** $x=64$

**156** **a)** $\mathscr{S}=\left]-\sqrt{10}\,;\sqrt{10}\right[$
**b)** $\mathscr{S}=]-\infty\,;0[\cup]0{,}1\,;+\infty[$
**c)** $\mathscr{S}=\left]\sqrt[3]{10}\,;+\infty\right[$

**157** **a)** $\mathscr{S}=\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ **b)** $\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$

**158** $f$ semble impaire.

**159** Par exemple :




**160** **1.** $f(1)=6$ et $f(-1)=2$.
**2.** $f$ n'est donc pas paire.

**161** $f$ est définie sur [0 ; 10] par $f(x)=(x+5)^2$.

**162** $f$ est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=2x^2+5x$.

**163** Si $x=$ AD (et donc AB $=9-x$), il faut prendre $x\in[3\,;6]$.

## 9 Variations et extremums

**1**

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1,5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $-4$ | ↗ | $0,6$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $3$ |

**3** **1.** $\mathscr{D}_f = [-2 ; 3]$.
**2.** $f(0) \leqslant f(2)$
**3.** $f(-2) \geqslant f(-1,5)$

**5** **1.**

| $x$ | $0$ | | $5$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $1$ | ↘ | $-39$ |

**2. a)** $g(x) = -3x + 21$
**b)** $-3 < 0$ donc $g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

**7** **1.** $f$ a pour maximum 3 atteint en $x = 5$.
**2.** $f$ a pour minimum $-1$ atteint en $x = 1$.

**9** **1.** $2^3 \leqslant 5^3$
**2.** $(-3)^3 \leqslant 11^3$
**3.** $(-2,4)^3 \geqslant \left(-\frac{5}{2}\right)^3$

**11** La fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$ donc $0 < x_1 < x_2$ implique $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ puis $\frac{3}{x_1} - 2 > \frac{3}{x_2} - 2$. $f$ est donc décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

**47**

| $x$ | $-4$ | | $-1$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $2$ | ↘ | $-1,8$ | ↗ | $2$ |

**54**

| $x$ | $-2$ | | $6$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $0$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-7$ |

**66** **1.** $f(0) \geqslant f(2)$
**2. a)** $f$ est croissante sur $[3 ; 5]$.
**b)** $-2 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

**72** **1. a)** $f(x) = x + 36$
**b)** $g(x) = -4x + 4$
**c)** $h(x) = 38x - 5$
**2.** $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$, $g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, $h$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

**83** $f$ a pour maximum 2 atteint en $x = -1$.

**96** **a)** $0 \leqslant x^3 \leqslant 8$
**b)** $-27 < x^3 < 216$
**c)** $\frac{1}{8} \leqslant x^3 \leqslant 3,375$

**102** **1.** La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.
**2.** $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

**147** A **148** C et D
**149** B et C **150** C
**151** D **152** A et C
**153** C **154** D
**155** B **156** B et C

**157** $f$ est croissante sur $[-5 ; -1]$ et décroissante sur $[-1 ; 2]$.

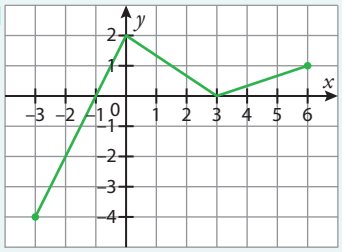
| $x$ | $-5$ | | $-1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $0,2$ | ↗ | $4$ | ↘ | $0,4$ |

**158**

| $x$ | $-2$ | | $4$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $1$ | ↗ | $5$ | ↘ | $3$ |

**159** $f(x) = 4x$.
La fonction $f$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

**160**




**161** **a)** $f(-4) \leqslant f(-3)$ **b)** $f(-1) \geqslant f(0)$

**162** **a)** $x \in ]1 ; 2]$ **b)** $x \in [-5 ; 1]$

**163** **1. a)** $\sqrt{2} < \sqrt{\frac{13}{6}}$
**b)** $\frac{1}{7,5} < \frac{1}{7,32}$
**c)** $\pi^3 < 3,5^3$
**2. a)** $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 1$ **b)** $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$

**164** $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
$g$ est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.

**165** **1.** À l'aide des variations de la fonction carré, croissante sur $[0 ; +\infty[$, on montre que $f$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
**2.** $f$ est décroissante sur cet intervalle.

**166** **1.** $f$ a pour maximum 3 atteint en $-0,7$ et en $1,7$.
**2.** $f$ a pour minimum 0,5 atteint en 3.

**167** **1.** Le maximum de $f$ est 4.
Il est atteint en $-3$.
**2.** $f$ admet un minimum : $-7$ en 1.

**168** **1.** $-(x-2)^2 + 5 = -x^2 + 4x + 4 - 5 = f(x)$
**2.** $-(x-2)^2$ est négatif ou nul donc $f(x) \leqslant 5$
**3.** $f(2) = 5$
**4.** D'après les deux questions précédentes, $f(x) \leqslant f(2)$ : $f$ a un maximum.
**5.** Il vaut 5 et est atteint en $x = 2$.

## 10 Signe d'une fonction

**1** **1.** $x \in \{-2 ; 2 ; 4\}$ et $x \in ]-2 ; 2[ \cup ]4 ; 5]$
**2.**

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $2$ | | $4$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**3** **a)** Strictement positif.
**b)** Nul.
**c)** Strictement négatif.

**5**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $5x + 10$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-4x + 1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

**7**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{1}{7}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x + 4$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $-7x + 1$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $(4x + 4)(-7x + 1)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**9** $x \in ]-1 ; 7]$

**11** **1.** $0,5 > 0,5^2$ **2.** $\frac{11}{3} < \left(\frac{11}{3}\right)^2$

**50**

**a)**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

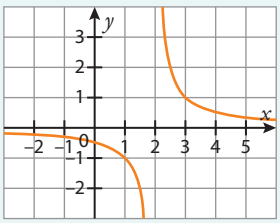
**b)**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1,5$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

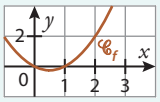
**c)**

| $x$ | $-\infty$ | | $-0,5$ | | $1,25$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**56** **1. a)** Strictement positif.
**b)** Strictement négatif.
**c)** Strictement négatif.
**2.**




**58**




**61** **1. a)** $-7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{7}$.
**b)** $a = -7 < 0$ donc $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Comme $f\left(\frac{6}{7}\right) = 0$, on trouve le tableau de signes suivant.

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{6}{7}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

**2. a)** $-7x + 6 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{6}{7}$.
**b)** On indique dans la première du tableau l'ensemble de définition et $\frac{6}{7}$ pour lequel $f(x)$ s'annule, puis on indique le 0 et le signe + correspondant à l'ensemble solution du **2.** **a)** dans la seconde ligne, avant de compléter avec la dernière possibilité, le signe −.
**3.** $-\frac{b}{a} = -\frac{6}{-7} = \frac{6}{7}$ et $a < 0$ : on retrouve avec cela le tableau de signes du cours.

**76** a)

| $x$ | $-\infty$ | | $-11$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

b)

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{4}$ | | $\frac{7}{6}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

c)

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

d)

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $\frac{8}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**81**

a)

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{8x-16}{x+4}$ | | $+$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

b)

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3,5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{3x+6}{-2x+7}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $-$ | |

c)

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{x+1}{2-x}$ | | $-$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

d)

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $-\frac{1}{7}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{7x+1}{-4-4x}$ | | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**88** a) $x \in ]-\infty ; \frac{1}{9}[ \cup ]4 ; +\infty[$

b) $x \in ]-\infty ; -\frac{2}{3}] \cup [2 ; +\infty[$

c) $x \in ]-5 ; 0,5[$

d) $x \in [-6 ; 0]$

**98** Les trois courbes se coupent aux points de coordonnée (0 ; 1) et (1 ; 3) ; sur ]0 ; 1[, $\mathscr{C}_3$ est située en dessous de $\mathscr{C}_1$ qui est elle-même située en dessous de $\mathscr{C}_2$.

**127** A et D **128** B et C

**129** D **130** A

**131** A et B **132** C

**133** A et D **134** D

**135** C **136** A

**137** 1. Pour $x \in [-2 ; -1[ \cup ]2 ; 4]$.

2.

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**138** 1. $f(x)$ est strictement positif pour $x \in [-1 ; -0,6[ \cup ]1,5 ; 2]$
$f(x)$ est nul en $-0,6$ ; $0,3$ et $1,5$.
$f(x)$ est strictement négatif pour $x \in ]-0,6 ; 0,3[ \cup ]0,3 ; 1,5[$.

2.

| $x$ | $-1$ | | $-0,6$ | | $0,3$ | | $1,5$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**139**

| $x$ | $-3$ | | $-1$ | | $2$ | | $5$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

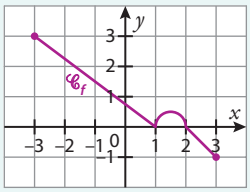
**140** 1. $f(-10) < 0$ ; $f(1) < 0$ et $f(5) > 0$

2. $x = 2$ est la seule solution.

**141** 1. $\mathscr{D}_f = ]-\infty ; 5]$.

2. $]-\infty ; 2[$.

**142**




**143** 1.

| $x$ | $-\infty$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

2.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{5}$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(-x+7)(5x+2)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\frac{-x+7}{5x+2}$ | | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**144** $\frac{3}{x+5} - \frac{8}{2x+3} = \frac{-2x-31}{(x+5)(2x+3)}$ d'où

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{31}{2}$ | | $-5$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{3}{x+5} - \frac{8}{2x+3}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ | |

**145**

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $-1,5$ | | $1,5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**146** 1.

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

2. $x \in ]-4 ; 2[$

**147** a) $x \in \left]-\frac{1}{2} ; \frac{6}{5}\right[$

b) $x \in ]-1 ; 2]$

**148** $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se croisent au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ ; pour les autres valeurs de $x$, $\mathscr{C}$ est située au dessus de $\mathscr{C}'$.

## 11 Proportions et évolutions

**1** $\frac{45}{100} \times \frac{1}{3} = 0,15$. Soit 15 %.

**3** Variation absolue : 3 920 – 3 500 = 420
Variation relative : $\frac{3\,920 - 3\,500}{3\,500} = 0,12$
donc une hausse de 12 %.

**5** $C_{\text{global}} = \left(1 + \frac{15}{100}\right) \times \left(1 - \frac{14}{100}\right) = 0,989$
$T_{\text{global}} = 0,989 - 1 = -0,011$
donc une baisse de 1,1 %.

**7** $c_{\text{réciproque}} = \frac{1}{1,3} \approx 0,769$ ;
$t_{\text{réciproque}} = c_{\text{réciproque}} - 1 \approx -0,231$
Donc une baisse d'environ 23,1 %.

**45** 1. $\frac{1}{4} \times \frac{42}{100} = 0,105$, soit 10,5 %.

2. $1\,600 \times \frac{10,5}{100} = 168$.

**48** $\frac{0,07}{0,35} = 0,2$ donc 20 %.

**54** 1. **a)** Il sera multiplié par 1,12.
**b)** Le nouveau prix sera $15 \times 1,12 = 16,80$ €
2. $40 \times 0,95 = 38$ €

**58** 1. $24 \times \left(1 + \frac{5,5}{100}\right) = 25,32$ €

2. $\frac{31,20}{1,2} = 26$ €

**61** **a)** Variation absolue : 15,5 – 20 = –4,5
Variation relative : $\frac{15,5 - 20}{20} = -0,225$ donc une baisse de 22,5 %.
**b)** Variation absolue :
4 250 000 – 3 550 000 = 700 000
Variation relative :
$\frac{4\,250\,000 - 3\,550\,000}{3\,550\,000} \approx 0,197$
donc une hausse d'environ 19,7 %.

**63** $\frac{55 - 135}{135} \approx -0,592\,6$
donc une baisse d'environ 59,26 %.

**68** 1. **a)** $C_{\text{global}} = 1,1 \times 0,6 = 0,66$
**b)** $T_{\text{global}} = C_{\text{global}} - 1 = -0,34$
2. **a)** $C_{\text{global}} = 0,72$, $T_{\text{global}} = -0,28$
**b)** $C_{\text{global}} = 1,081\,41$, $T_{\text{global}} = 0,081\,41$
**c)** $C_{\text{global}} = 0,9$ ; $T_{\text{global}} = -0,1$

**74** **a)** 15 **b)** 65,7 **c)** 25

**77** **a)** $c_{\text{réciproque}} \approx 0,926$ et $t_{\text{réciproque}} \approx -7,4$ %
**b)** $c_{\text{réciproque}} \approx 1,163$ et $t_{\text{réciproque}} \approx 16,3$ %

**80** Une augmentation d'environ 233,33 %.

**99** C **100** A **101** C

**102** B **103** B **104** B et D

**105** A **106** B **107** B et C

**108** A

**109** $0,22 \times 0,55 = 0,121$ donc 12,1 %.

**110** $\frac{15}{0,6 \times 0,1} = 250$

**111** $\frac{0,08}{\frac{1}{4}} = 0,32$

**112** **1.** $430 \times 1{,}15 = 494{,}5$ g

**2.** $\dfrac{500 - 430}{430} = 0{,}163$

**113** Plus grande évolution entre 2019 et 2020.

| | 2019/2020 | 2020/2021 |
|---|---|---|
| **Variation absolue** | +0,12 | +0,1 |
| **Variation relative** | +1,20 % | +0,99 % |

**114** Achats sans soldes : $15 + \dfrac{28}{0{,}7} = 55$

Achats avec soldes : $15 \times 0{,}8 + 28 = 40$

Remise : $\dfrac{40 - 55}{55} \approx -0{,}272\,7$, donc une baisse d'environ 27,27 %.

**115** $C_{\text{global}} = 1{,}08 \times 0{,}74 = 0{,}799\,2$

$T_{\text{global}} = -0{,}200\,8$, donc baisse de 20,08 %.

**116** $\dfrac{2277}{0{,}88 \times \dfrac{3}{4}} = 3\,450$ mails.

**117** $\dfrac{0{,}56}{0{,}8} = 0{,}7$ donc une première baisse de 30 %.

**118** $C_{\text{réciproque}} = \dfrac{1}{1{,}54} \approx 0{,}649$

$t_{\text{réciproque}} \approx -0{,}351$, donc une baisse d'environ 35,1 %.

**119** $\dfrac{1\,200 - 1\,100}{1\,100} \approx 0{,}090\,9$, donc une augmentation d'environ 9,09 %.

**120** $C_{\text{réciproque}} = \dfrac{1}{3 \times 0{,}15} \approx 2{,}222$

$t_{\text{réciproque}} \approx 1{,}222$, donc il faut qu'elle augmente d'environ 122,2 %.

## 12 Statistiques descriptives

**1** Environ 29,8.

**3** Environ 2,53 euros le kilo.

**5** 32.

**7** **1.** Les résultats semblent plus réguliers la deuxième semaine ce qui correspond à un écart-type plus petit.
**2.** La semaine 1, l'écart-type est d'environ 8,3.
La semaine 2, il est d'environ 1,3.
Cela confirme la réponse.

**9** La médiane est 2, $Q_1 = 2$, $Q_3 = 15$ et l'écart interquartile est 13.

**11** On peut penser qu'elle lisait globalement plus de pages du livre 1 que du livre 2 par soir. En effet, pour chaque indicateur, $Q_1$, médiane et $Q_3$, celui correspondant au livre 1 est plus élevé que celui correspondant au livre 2.
On peut aussi comparer les indicateurs des deux séries ayant des valeurs similaires ou proches : par exemple, il y a au moins 50 % des soirs où elle a lu 22 pages ou plus du livre 1 (la médiane est 22) alors qu'il y a au moins 75 % des soirs où elle a lu 22 pages ou moins du livre 2 (le 3e quartile est 22).

**41** Environ 2.

**45** Environ 17.

**49** **1.** $x = 37{,}9$. **2.** $c = 4{,}5$.

**52** 2 252 €.

**58** La moyenne est environ 4,39 et l'écart-type environ 2,14.

**59** La moyenne est 4,05 et l'écart-type est environ 1,86.

**67** La médiane est 5, $Q_1 = 3$, $Q_3 = 7$ et l'écart interquartile est 4.

**71** Sous forme de tableau, par exemple :

| **Valeur** | 1 | 5 | 12 | 22 | 30 | 46 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Effectif** | 2 | 4 | 6 | 1 | 6 | 1 |

**73** **1.** 1 208 est le premier quartile et 1 884 est le troisième quartile, il y a donc environ 50 % des piscines avec bassin intérieur qui ont un coût de fonctionnement au m² compris, entre ces deux valeurs.
**2.** 417 est le troisième quartile, il y a donc environ 75 % des piscines avec bassin extérieur qui ont un coût de fonctionnement au m² compris, inférieur à cette valeur.
**3.** On voit que tous les indicateurs correspondant aux piscines avec bassin extérieur sont très inférieurs à ceux correspondant aux piscines avec bassin intérieur donc on peut dire que, globalement, les piscines avec bassin extérieur sont moins coûteuses.
On peut par exemple expliquer cela par le fait que ces piscines avec bassin extérieur ne sont pas ouvertes toute l'année mais autour des mois d'été alors que les piscines avec bassin intérieur sont ouvertes toute l'année ce qui induit des coûts inférieurs en entretien et salaires. Par ailleurs, les piscines avec bassin extérieur doivent être chauffées (eau et bâtiment).

**85** **1.** Le débit est plus élevé à Vernon car le nuage de points est globalement plus haut et il est plus homogène à Alfortville car le nuage de points est globalement plus resserré.
**2.** **a)** • Pour Alfortville, on a :

| **Débit à Alfortville** | 75 | 125 | 175 |
|---|---|---|---|
| **Nombre de jours** | 28 | 58 | 5 |

La calculatrice donne une moyenne d'environ 112 m³/s et un écart-type d'environ 27.
• Pour Vernon, on a :

| **Débit à Vernon** | 175 | 225 | 275 | 325 |
|---|---|---|---|---|
| **Nombre de jours** | 14 | 51 | 21 | 5 |

La calculatrice donne une moyenne d'environ 234 m³/s et un écart-type d'environ 38.
Cela confirme les résultats de la question **1.**
**b)** $14 + 51 + 21 + 5 = 91$ et $0{,}25 \times 91 = 22{,}75$ donc $Q_1$ est la 23e valeur qui est donc entre 200 et 250 m³/s.
**c)** Comme le premier quartile correspondant à Vernon est entre 200 et 250 m³/s, cela veut dire que le débit a été supérieur ou égal à 200 au moins 75 % des jours. Comme le maximum pour Alfortville est de 175 m³/s cela justifie l'affirmation de l'énoncé.
**3.** Vernon étant situé plus loin sur le cours de la Seine, celle-ci reçoit de l'eau de plus d'affluents, il est donc normal que le débit y soit plus élevé.

**98** C **99** A **100** A et D

**101** D **102** A **103** A

**104** B **105** C **106** C

**107** A et D **108** A et D **109** B

**110** C **111** Environ 17,31 **112** 512

**113** $c = 1{,}25$. **114** Environ 25,3.

**115** La série représentée en vert est plus homogène, son écart-type est donc plus petit : c'est 1,5.

**116** La moyenne est 210 et l'écart-type est environ égal à 25,3.

**117** **1.** La médiane est 5.
**2.** $Q_1 = 3$ et $Q_3 = 6$ donc l'écart interquartile est $6 - 3 = 3$.

**118** **1.** La médiane est 5 et le maximum est 9 donc on peut affirmer qu'au moins 50 % des élèves ont réussi entre 5 et 9 services.

**2.** Le 3e quartile est 6 donc on peut affirmer qu'au moins 25 % des élèves ont réussi 6 services ou plus.

**119** Par exemple

0 50 60 100 14 15 20 25.

**120** Le coureur représenté en bleu a couru constamment alors que celui représenté en orange a couru plus vite au début qu'à la fin de la course.

**121** Le magazine dont les ventes mensuelles ont un écart-type de 123 a des ventes mensuelles régulières alors que celui qui a un écart-type de 612 a des ventes moins régulières plus éloignées de la moyenne au-dessus et en dessous.

**122** Avec la médiane et les quartiles :
Pour cette nouvelle série : $Q_1 = 4$, médiane = 6 et $Q_3 = 10$.
Ces indicateurs étant tous plus élevés que ceux de l'exercice **117**, on peut penser que les élèves se sont améliorés.
L'écart interquartile étant passé de 3 à 6, le niveau est devenu plus hétérogène.
Avec la moyenne est l'écart-type :
La moyenne est passée de 4,625 à 6,575 : cela confirme une amélioration du niveau.
L'écart-type est passé d'environ 2,38 à environ 2,9 : cela confirme une plus grande hétérogénéité.

## 13 Probabilités et échantillonnage

**1**

| **Issue** | Pique | Cœur | Carreau | Trèfle |
|---|---|---|---|---|
| **Probabilité** | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

**4** $p(\{1\,;3\,;5\}) = p(\{1\}) + p(\{3\}) + p(\{5\})$
$= 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}6$

**6** $p(7 \leqslant n° \leqslant 11) = \dfrac{5}{23}$

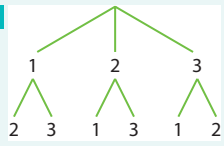
**9** $p(\text{J}) = \dfrac{12 + 22}{15 + 12 + 20 + 22} = \dfrac{34}{69}$

**11**

| × | **−2** | **−1** | **1** | **10** |
|---|---|---|---|---|
| **−2** | 4 | 2 | −2 | −20 |
| **−1** | 2 | 1 | −1 | −10 |
| **1** | −2 | −1 | 1 | 10 |
| **10** | −20 | −10 | 10 | 100 |

$p(\text{S} > 2) = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.

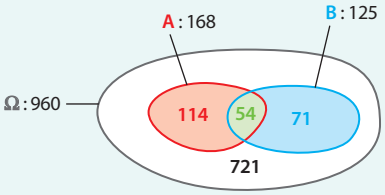
**15**




B = {1 puis 2 ; 1 puis 3 ; 2 puis 3}

$p(B) = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

**17**




La probabilité que ce ne soit ni un livre de sciences ni un manuel scolaire est égale à : $\frac{721}{960} \approx 0{,}75$.

**19**

```
import random
effectif =0
for i in range (1,501):
    if random.random()<100/205:
        effectif=effectif+1
print(effectif/500)
```

**21** D'après le graphique, la probabilité que la pièce tombe sur *Pile* est d'environ 0,45.

**70**

| Issue | Vert | Orange | Rouge |
|---|---|---|---|
| Probabilité | $\frac{45}{70} = \frac{9}{14}$ | $\frac{5}{70} = \frac{1}{14}$ | $\frac{20}{70} = \frac{2}{7}$ |

**76** $p(A) = 0{,}03 + 0{,}05 + 0{,}21 = 0{,}29$.
$p(B) = 0{,}03 + 0{,}05 = 0{,}08$.
$p(C) = 0{,}03 + 0{,}06 + 0{,}05 = 0{,}14$.

**85** **1.** $p(\{12\}) = \frac{1}{12}$.
**2.** $p(\{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11\}) = \frac{5}{12}$.
**3.** $p(\{3 ; 6 ; 9\}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

**103** **1. a)** R ∩ E : « Le livre choisi est un roman emprunté. »
R ∪ E : « Le livre choisi est un roman ou un livre emprunté.»
**b)** $p(R \cap E) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
$p(R \cup E) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
**2. a)** $\overline{R}$ : « Le livre choisi n'est pas un roman. »
**b)** $p(\overline{R}) = \frac{7}{12}$.

**108** **1.**

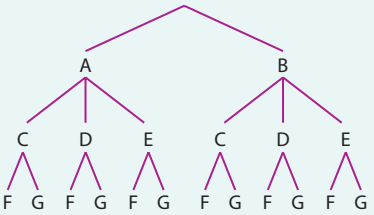
| | Cyan | Magenta | Jaune |
|---|---|---|---|
| Cyan | Cyan | Bleu | Vert |
| Magenta | Bleu | Magenta | Rouge |
| Jaune | Vert | Rouge | Jaune |

**2.**

| Issue | Cyan | Magenta | Jaune |
|---|---|---|---|
| Probabilité | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |

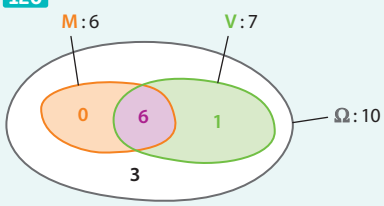
| Issue | Bleu | Rouge | Vert |
|---|---|---|---|
| Probabilité | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{9}$ |

**113** **1.**




**2.** Il y a donc 12 menus différents possibles.
**3. a)** $p(E) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.
**b)** $p(A \cap F) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.
**c)** $p(\overline{D}) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

**120**




La probabilité qu'il ait les deux permis de conduire est égale à $\frac{6}{10} = 0{,}6$ .

**130**

```
import random
    if random.random()<0.224:
        print("STS")
else :
        print("Pas STS")
```

**137** **1.** $p(\{6\}) \approx 0{,}3$
**2.** Non car $\frac{1}{6} \times 3 = 0{,}5$.

**164** C
**165** B
**166** D
**167** B
**168** B
**169** A,B,C et D
**170** B et C
**171** B et D
**172** B
**173** **1.**

| Issue | Anglais | Allemand | Chinois | Coréen |
|---|---|---|---|---|
| Probabilité | $\frac{5}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{7}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

**2.** $p(\text{asiatique}) = \frac{7}{16} + \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = 0{,}5$.

**174** **1.** Loi équirépartie sur l'univers Ω = {A ; B ; C ; D ; E}.
**2.**

| Issue | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Probabilité | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ |

**175** $2t + 0{,}25 + 0{,}15 = 1 \Leftrightarrow t = 0{,}3$

**176** La probabilité d'obtenir au moins deux fois *Pile* est égale à $\frac{4}{8}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$ car l'univers est : {PPP ; PPF ; PFP ; PFF ; FPP ; FPF ; FFP ; FFF}

**177** L'univers est constitué de 12 issues équiprobables et parmi elles il y a 4 nombres premiers : 23 ; 37 ; 53 et 73. Donc la probabilité d'obtenir un nombre premier est $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

**178** Il y a 32 issues possibles. Parmi elles il y a 5 issues qui donnent 6 et 4 issues qui donnent 8.
Donc la probabilité est : $\frac{9}{32}$.

**179** **1.** $p(V \cap T) = \frac{2}{5}$ et $p(V \cup T) = \frac{3}{5}$.
**2.** V ∩ $\overline{T}$ : « La lettre est une voyelle d'au moins 3 points.» $p(V \cap \overline{T}) = 0$.
$\overline{V}$ ∪ T : « La lettre est une consonne ou elle a moins de 3 points.» $p(\overline{V} \cup T) = 1$.

**180** À l'aide d'un diagramme de Venn on trouve qu'il y a 14 élèves qui ont apporté deux calculatrices.
Donc la probabilité est : $\frac{14}{32} = \frac{7}{16}$.

**181**

```
import random
effectif =0
for i in range (1,240):
    if random.random()<0.31:
        effectif=effectif+1
print(effectif/239)
```

**182** **1.** $p \approx 0{,}35$
**2.** Il y a 13 échantillons qui ne sont pas dans l'intervalle [0,3 ; 0,4], les 387 autres appartiennent à cet intervalle.
Cela représente 96,75 % donc c'est vérifié.

# Crédits

**Couverture** © Vitalij Sova/Getty Images
**p. 16** © Gorodenkoff/Adobe Stock
**p. 19** © moodboard/Adobe Stock
**p. 21** © mhering/Adobe Stock
**p. 31** © Viks_jin/Adobe Stock
**p. 32** © Prostock-studio/Adobe Stock
**p. 33** © photology1971/Adobe Stock
**p. 34h** © Bianchetti/Leemage
**p. 34b** © kegfire/Adobe Stock
**p. 36** © ARochau/Adobe Stock
**p. 37** © peopleimages.com/Adobe Stock
**p. 38** © Tim UR/Adobe Stock
**p. 43** © Pixavril/Adobestock
**p. 44** © NASA, ESA, CSA, STScI; Joseph DePasquale (STScI), Anton M. Koekemoer (STScI), Alyssa Pagan (STScI).
**p. 47** © Ancient Art and Architecture Collection Ltd/Bridgemann Images
**p. 57** © Soleig/AdobeStock
**p. 58** © NASA, ESA, CSA, STScI, Webb ERO Production Team
**p. 60g** © wachiwit/AdobeStock
**p. 60d** © Stefano Bianchetti/ Bridgeman
**p. 62** © Andrey Popov/AdobeStock
**p. 63g** © willyam/AdobeStock
**p. 63d** © fabioderby/AdobeStock
**p. 67** © Diego Bares Cameselle/ Wirestock/AdobeStock
**p. 69** © Prostock-studio/AdobeStock
**p. 70** © Image Source/BSIP
**p. 72** © Hervé Rouveure/Adobe Stock
**p. 73** © www.bridgeanimages.com
**p. 80** © milkovasa/Adobe Stock
**p. 82** © Soleg/Adobe Stock
**p. 85hg** © Jacek Chabraszewski/ Adobe Stock
**p. 85bg** © Collection Leemage
**p. 85d** © phive2015/Adobe Stock
**p. 87g** © Visions-AD/Adobe Stock
**p. 87d** © aquaphoto/Adobe Stock
**p. 89hd** © pinglabel/Adobe Stock
**p. 89bd** © darknightsky/Adobe Stock
**p. 90** © robert/Adobe Stock
**p. 94** © muratart/Adobe Stock
**p. 95** © Craig Lambert Photo/ Adobe Stock
**p. 96** © fizkes/Adobe Stock
**p. 98** © Rido/Adobe Stock
**p. 112h** © Jacek Chabraszewrski/ Adobe Stock
**p. 112b** © YouraPechkin/Adobe Stock
**p. 113d** © vetal1983/Adobe Stock
**p. 113hd** © justinkendra/Adobe Stock
**p. 113bd** © Fortgens Photography/ Adobe Stock
**p. 114g** www.bridgemanimages.com
**p. 114d** © New Africa/Adobe Stock
**p. 115g** Vera Kuttelvaserova/ Adobe Stock
**p. 115d** © AnastazjaSoroka/ Adobe Stock
**p. 116** © Christian Abbattista/ Adobe Stock
**p. 120** © Eléonore H/Adobe Stock
**p. 122** © Sky Antonio/Adobe Stock
**p. 124** © RobertNyholm/Adobe Stock
**p. 139** © marité74/Adobe Stock
**p. 144** © fogbird/Adobe Stock
**p. 150** © RightFrame PhotoVideo/ Getty Images
**p. 163** © Georgios Kollidas/ Adobe Stock
**p. 170** © Pictures news/Adobe Stock
**p. 176** © Tasneem H/peopleimages.com/Adobe Stock
**p. 179** © Ricardo Imagen/Getty Images
**p. 188** © PaulSat/Shutterstock
**p. 195hg** © Patryk Kosmider/Adobe Stock
**p. 195bg** © Koldo_Studio/Adobe Stock
**p. 195d** © leungchopan/Adobe Stock
**p. 196h** © WavebreakMedia Micro/ Adobe Stock
**p. 196b** © Pixel-Shot/Adobe Stock
**p. 197g** © oes/Adobe Stock
**p. 197d** © Dragon Images/Adobe Stock
**p. 198** © Lucky business/Adobe Stock
**p. 203** © Chalabala/Adobe Stock
**p. 205** © Roberto Moiola/Robert Harding Picture Library/ Biosphoto
**p. 217** © Victoria/Adobe Stock
**p. 219** © Paolese/Adobe Stock
**p. 221** © kanpisut/Adobe Stock
**p. 225h** © MarusyaChaika/Adobe Stock
**p. 225b** © BKK EGG/Adobe Stock
**p. 226** © F Armstrong Photo/Adobe Stock
**p. 236** © Miroslav/ AdobeStock
**p. 239** © Volodymyr Shevchuk/ AdobesStock
**p. 251** © Microgen/AdobeStock
**p. 252** © JackF/AdobeSTock
**p. 253** © Pierre-Alain Dutheil/ AdobeStock
**p. 255** © rh2010/AdobeStock
**p. 256** © auremar/Adobe Stock
**p. 262** © Itsanan/AdobeStock
**p. 264** © Pondsaksit/Istock
**p. 266** © luzulee/AdobeStock
**p. 274** © eveleen007/Adobe Stock
**p. 281g** © Bokica/AdobeStock
**p. 281d** © rh2010/AdobeStock
**p. 290** © Image Source/BSIP
**p. 291** © wertinio/Adobe Stock
**p. 292** © Dusan Kostic/Adobe Stock
**p. 293** © Studio Romantic/Adobe Stock
**p. 298** © Djiggi Bodgi.com/Adobe Stock
**p. 300** © moodboard/Adobe Stock
**p. 301g** © Gorodenkoff/Adobe Stock
**p. 301d** © Tomas Vynikal/Adobe Stock
**p. 302hg** © Franz/Adobe Stock
**p. 302bg** © hedgehog94/Adobe Stock
**p. 302d** © Viktor/Adobe Stock
**p. 303** © slowmotiongli/Adobe Stock
**p. 304** © Krakenimages.com/Adobe Stock
**p. 305** © bodnarphoto/Adobe Stock
**p. 306h** © Vladimir Borovic/Adobe Stock
**p. 306bg** © guy/Adobe Stock
**p. 306bd** © Dmytro/Adobe Stock
**p. 311** © mikitiger/Adobe Stock
**p. 312** © muratart/AdobeStock
**p. 313** © Artem Varnitsin/ AdobeStock
**p. 314** © Monkey Business/AdobeStock
**p. 315** © Jure Makovec/AFP
**p. 319** © Monkey Business/AdobeStock
**p. 322h** © Vesna/AdobeStock
**p. 322b** © xfargas/adobeStock
**p. 325** © JackF/Adobe Stock
**p. 326** © Pim Waslander/Orange Pictures/DPPI via AFP
**p. 327** © oneSHUTTER oneMEMORY/ AdobeStock
**p. 329h** © thongsee/AdobeStock
**p. 329b** Gorodenkoff/AdobeStock
**p. 330** © Philippe Prudhomme/ Adobe Stock
**p. 331** © Delphotostock/AdobeStock
**p. 332** © Schlierner/AdobeStock
**p. 338** © charnsitrAdobeStock
**p. 339** © Photo12/Alamy/SPP Sport Press Photo.
**p. 340** © Monkey Business/AdobeStock
**p. 341h** © Drivepix/Adobestock
**p. 341b** © Federico Rostagno/ AdobeStock
**p. 342 h** © altanaka/AdobeStock
**p. 342b** © Monkey Business/Adobe Stock
**p. 345** © len44ik/AdobeStock
**p. 349** © Александр Маликов/ AdobeStock
**p. 351** © Look!/AdobeStock
**p. 352h** © Alfons Photographer/ AdobeStock
**p. 352b** © wavebreak3/AdobeStock
**p. 357** © Richard Villalon/AdobeStock
**p. 358** © Krakenimages.com/ AdobeStock
**p. 361** © Artranq/AdobeStock
**p. 362g** © Anna Khomulo/AdobeStock
**p. 362hg** © chones/Adobe Stock
**p. 362bd** © orensila/AdobeStock
**p. 364h** © Maksym Azovtsev/Adobe Stock
**p. 364b** © Jordi Mora/AdobeStock
**p. 365** © Eléonore H/AdobeStock
**p. 367g** © Alena/AdobeStock
**p. 367d** © Tomfry/AdobeStock
**p. 369hg** © HC FOTOSTUDIO/ AdobeStock
**p. 369hd** © Jon Le-Bon/AdobeStock
**p. 370** © Secha6271/Istockphoto
**p. 376** © pusteflower9024/ AdobeStock
**p. 376** © Tomasz/AdobeStock
**p. 378** © Drobot Dean/AdobeStock
**p. 379** © djile/Adobe Stock
**p. 384** © Alfons Photographer/ Adobe Stock

**Couverture :** Primo & Primo
**Maquette intérieure :** Primo & Primo
**Mise en page et schémas :** Nord Compo
**Iconographie :** Candice Renault
**Direction éditoriale :** Caroline Edenhoffer, Adrien Fuchs
**Édition :** Stéphanie Herbaut, Malvina Juhel, Marilyn Maisongrosse
**Coordination numérique :** Dominique Garrigues

Ce manuel est publié sous licence libre « CC-by-SA », laquelle peut être consultée sur la page web suivante :
https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode
Cependant, seuls les contenus écrits et les schémas mathématiques de la présente publication sont libres de droits, conformément à cette licence. La maquette et les autres contenus (illustrations, photographies, vidéos, etc.) de la présente publication sont eux protégés. Ainsi, aux termes du Code de la propriété intellectuelle, toute reproduction ou représentation, intégrale ou partielle, de cette maquette et ces autres contenus, faite par quelque procédé que ce soit (reprographie, microfilmage, scannérisation, numérisation, etc.), sans le consentement de l'auteur, ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles L.335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. L'autorisation d'effectuer des reproductions par reprographie doit être obtenue soit auprès de l'éditeur, soit auprès du Centre Français d'exploitation du droit de copie (CFC) dont les coordonnées sont les suivantes : 20 rue des Grands-Augustins 75006 Paris – Tél : 01 44 07 47 70 – Fax : 01 46 34 67 19.
Certains contenus proviennent de l'édition de 2014 du manuel Sesamath 2de et de l'édition 2019 dont les auteurs sont :
Élisabeth Argence, Sandrine Baglieri, Catherine Bessaguet, Gilles Bougon, Christian Buso, Daniel Casane, Pauline Chabauty, Gwénaëlle Clément, Noël Debarle, Anne-Marie Dischler, Sébastien Dumoulard, Damien Fourny, Maxime Fourny, Yolande Garouste, Jean-Pierre Gerbal, Didier Goumont, Hélène Gringoz, Stéphane Guyon, Marie Hascoët, Fabrice Houpeau, Pierre-Yves Icard, Michèle Khan, Yves Le Reste, Alexis Lecomte, Liouba Leroux, Benoît Montessinos, Xavier Ouvrard Brunet, Olivier Péault, Frédéric Platzer, Virginie Poirier, Mireille Poncelet, Olivier Pontini, Christophe Rindel, David Rousseau

© Éditions MAGNARD – 5 allée de la 2e D. B., 75015 Paris – Avril 2023
ISBN : 978-2-210-11827-0

# L'essentiel du collège

## Puissances

- Pour tout nombre entier $n$ positif non nul et pour tout nombre $a$ :

$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$ et, si $a$ est non nul, $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$.

- $a^1 = a$ et, par convention, $a^0 = 1$.

### Puissances de 10 et écriture scientifique

- Pour $n$ entier positif, $10^n = \underbrace{10\ldots0}_{n \text{ zéros}}$ et $10^{-n} = \underbrace{0,0\ldots01}_{n \text{ zéros}}$ sont des **puissances de 10**.
- Multiplier par $10^n$ décale la virgule de $n$ rangs vers la droite (si $n > 0$) ou vers la gauche (si $n < 0$).
- Un nombre positif est écrit sous forme **d'écriture scientifique** quand il est sous la forme $a \times 10^n$ avec $1 \leqslant a < 10$ et $n$ entier.

### Carré d'un nombre

- Pour un nombre $a$, son **carré** est $a^2$.
- Les carrés des nombres entiers positifs sont appelés **carrés parfaits**.

Les premiers carrés parfaits sont 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 et 100.

### Propriétés algébriques

On considère deux nombres entiers $n$ et $m$ et un nombre $a$.

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ pour $a \neq 0$

## Fractions

Soient quatre nombres $a$, $b$, $c$ et $d$ avec $b$ et $d$ non nuls.

- $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
- $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$
- $\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b}$
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ donc $\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$ avec $c$ non nul
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ avec $c$ non nul

## Calcul littéral

### Distributivité

- Pour tous nombres $a$, $b$ et $k$, on a : $k(a+b) = ka + kb$.
- Pour tous nombres $a$, $b$, $c$ et $d$ on a : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.

### Identité remarquable

Pour tous nombres $a$ et $b$, on a : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

## Inégalités

- $a < b$ se lit « $a$ est strictement inférieur à $b$ » ou « $b$ est strictement supérieur à $a$ ».
- $a \leqslant b$ se lit « $a$ est inférieur ou égal à $b$ » ou « $b$ est supérieur ou égal à $a$ » selon le sens de lecture.

# Équations

## Équations

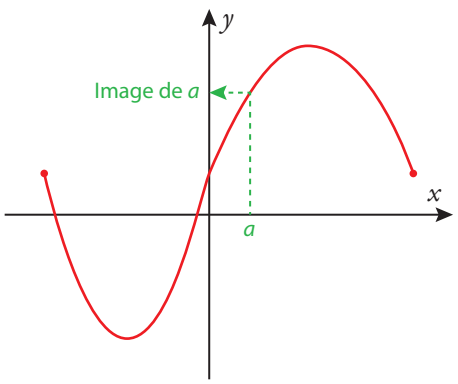
- Un nombre est **solution d'une équation** si l'égalité est vérifiée quand on remplace l'inconnue par ce nombre.
- Pour résoudre une équation de la forme $ax + b = cx + d$, on isole $x$ dans un membre en utilisant les règles suivantes :
  - Une égalité est conservée quand on ajoute ou soustrait un même nombre à ses deux membres.
  - Une égalité est conservée quand on multiplie ou divise ses deux membres par un même nombre.
- On considère l'équation $x^2 = k$.
  - Si $\boldsymbol{k < 0}$, l'équation $x^2 = k$ n'a **aucune solution**.
  - Si $\boldsymbol{k = 0}$, l'équation $x^2 = k$ a **une seule solution** $x = 0$.
  - Si $\boldsymbol{k > 0}$, l'équation $x^2 = k$ a **deux solutions** $x = \sqrt{k}$ et $x = -\sqrt{k}$.
- On considère l'équation $\dfrac{1}{x} = k$.
  - Si $\boldsymbol{k = 0}$, l'équation $\dfrac{1}{x} = k$ n'a **aucune solution**.
  - Si $\boldsymbol{k \neq 0}$, l'équation $\dfrac{1}{x} = k$ a **une seule solution** $x = \dfrac{1}{k}$.

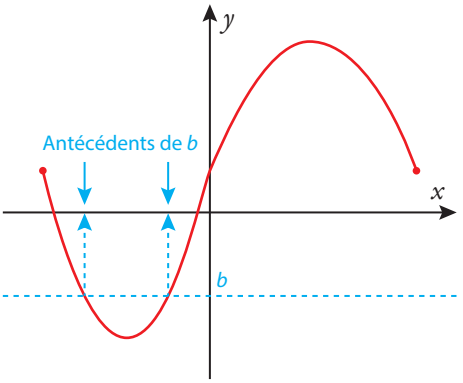
# Fonctions

- La fonction $f : x \mapsto f(x)$ associe à un nombre $x$ un seul et unique nombre appelé image de $x$ par $f$.
- Si $f(x) = y$ alors :
  - $y$ est l'**image** de $x$ par $f$
  - $x$ est un **antécédent** de $y$ par $f$.
- Pour calculer l'image d'un nombre par $f$, on remplace la **variable** $x$ par ce nombre dans l'expression $f(x)$ de la fonction.
- Pour déterminer par le calcul les antécédents éventuels de $y$ par $f$, on résout l'équation $f(x) = y$.
- Dans un **tableau de valeurs**, on lit les images dans la ligne $f(x)$ et des antécédents dans la ligne $x$ :

| $x$ | … | … | … | ← Antécédents |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | … | … | … | ← Images |

- La courbe représentative d'une fonction $f$ est constituée des points de coordonnées $(x\,;\,f(x))$.
- On peut déterminer des images ou des antécédents à partir de la courbe d'une fonction.



# Proportions

## Tableau de proportionnalité

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | C | E | … |
| B | D | F | … |

• Le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité si $\frac{B}{A}=\frac{D}{C}=\frac{F}{E}$, etc. Dans ce cas :

• on peut passer d'une ligne à l'autre en multipliant ou divisant par le même nombre.

• on peut trouver la valeur manquante d'une case par un produit en croix : $\frac{A\times D}{B}=C$, $\frac{D\times E}{C}=F$, etc.

## Écriture en pourcentage

***a*** **%** signifie $\frac{a}{100}$. Un **pourcentage** peut s'exprimer comme une fraction ou la forme décimale de cette fraction.

## Proportion d'un sous-ensemble dans un ensemble

• Soient un ensemble A d'effectif $n$ et un sous-ensemble B de A d'effectif $n_B$.

La **proportion** de B dans A est $p=\frac{n_B}{n}$.

• Soient un ensemble A d'effectif $n$ et un sous-ensemble B dont la proportion dans A est $p$.

L'effectif $n_B$ de B est $n_B=p\times n$.

• Deux des trois éléments $n$, $n_B$ et $p$ étant connus, on peut trouver le troisième à l'aide des formules précédentes ou à l'aide d'un produit en croix selon la disposition ci-contre :

| | | |
|---|---|---|
| $n$ | → | 1 |
| $n_B$ | → | $p$ |

# Taux d'évolution

## Taux d'évolution

On suppose qu'une quantité passe d'une valeur de départ $V_D$ à une valeur d'arrivée $V_A$.

Son taux d'évolution est $\frac{V_A-V_D}{V_D}$.

## Valeur après une évolution

• Si une grandeur numérique **augmente de *t* %**, elle est multipliée par $1+\frac{t}{100}$.

• Si une grandeur numérique **diminue de *t* %**, elle est multipliée par $1-\frac{t}{100}$.

# Statistiques

## Fréquence d'une valeur, moyenne et médiane

• L'**effectif** d'une valeur dans une série statistique est le nombre de fois où elle apparaît.

• La **fréquence** $f$ d'une valeur dans une série statistique est $f=\frac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total}}$.

• La **moyenne** d'une série statistique est la somme de ses valeurs divisée par son effectif total.

• La **médiane** d'une série statistique est la valeur centrale de cette série.

## Représentations graphiques

• Un **diagramme en barres** est constitué de barres dont les hauteurs donnent les effectifs de chaque valeur.

• Un **diagramme circulaire** est un disque constitué de secteurs angulaires dont les angles sont proportionnels aux effectifs de chaque valeur.

• Un **histogramme** est constitué de rectangles dont les aires sont proportionnelles aux effectifs des classes.

# Thalès

### Théorème de Thalès

Si $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ et $(BC)//(MN)$ alors $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$.

### Réciproque du théorème de Thalès

Si les points A, B, M d'une part et les points A, C, N d'autre part sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$

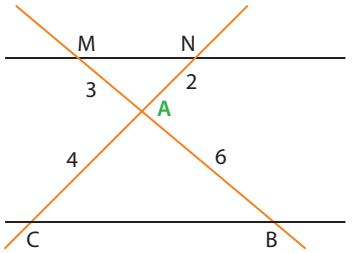
alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

### Exemple

Les points A, B et M d'une part et A, N et C d'autre part sont alignés dans cet ordre.

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$ donc,

d'après la réciproque du théorème de Thalès, (MN)//(BC).

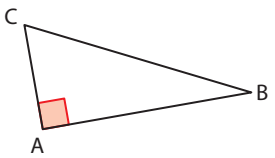



# Pythagore

### Théorème de Pythagore

Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

### Exemple



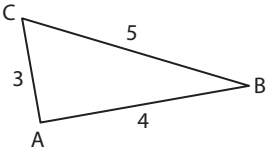

ABC est rectangle en A. Donc, d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

### Réciproque du théorème de Pythagore

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle et il a ce grand côté pour hypoténuse.

### Exemple

$BC^2 = 5^2 = 25$ d'une part,
et $BA^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ d'autre part,
donc $BC^2 = BA^2 + AC^2$.
Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.




# Trigonométrie

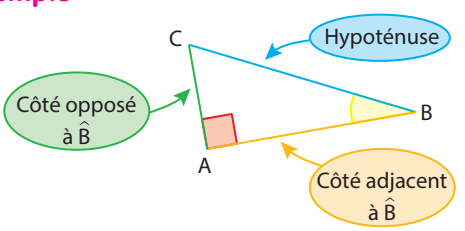
Dans un triangle rectangle :

Cosinus d'un angle aigu $= \frac{\text{longueur du côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$

Sinus d'un angle aigu $= \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

Tangente d'un angle aigu $= \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur du côté adjacent}}$

### Exemple



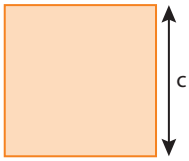

ABC est un triangle rectangle en A.

- $\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC}$
- $\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC}$
- $\tan\hat{B} = \frac{AC}{AB}$

# Formulaire de géométrie

## Aires et périmètres

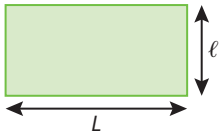
### Carré




$\mathcal{A} = c^2$

$p = 4 \times c$

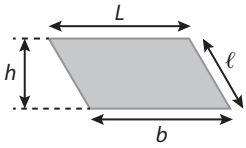
### Rectangle




$\mathcal{A} = L \times \ell$

$p = 2 \times (L + \ell)$

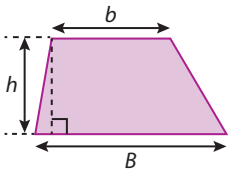
### Parallélogramme




$\mathcal{A} = b \times h$

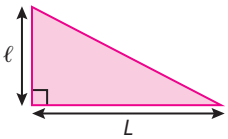
$p = 2 \times (L + \ell)$

### Trapèze



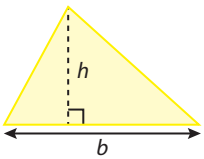

$\mathcal{A} = \dfrac{(b + B) \times h}{2}$

### Triangle rectangle



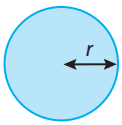

$\mathcal{A} = \dfrac{L \times \ell}{2}$

### Triangle quelconque




$\mathcal{A} = \dfrac{b \times h}{2}$

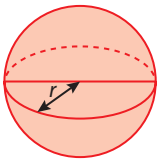
### Disque




$\mathcal{A} = \pi \times r^2$

$p = 2\,\pi\,r$

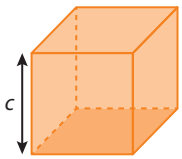
### Sphère




$\mathcal{A} = 4\pi \times r^2$

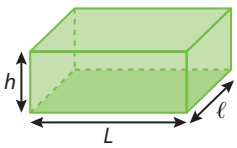
## Volumes

### Cube



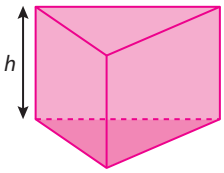

$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{base} \times h = c^3$

### Parallélépipède rectangle ou pavé



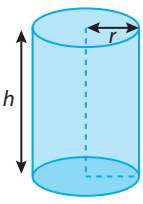

$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{base} \times h = L \times \ell \times h$

### Prisme droit



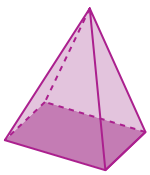

$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{base} \times h$

### Cylindre



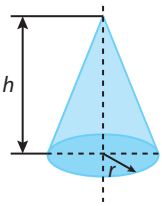

$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{base} \times h = \pi \times r^2 \times h$

### Pyramide



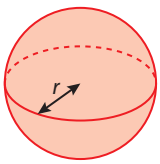
$\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{A}_{base} \times h}{3}$

### Cône de révolution




$\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{A}_{base} \times h}{3} = \dfrac{\pi r^2 \times h}{3}$

### Boule

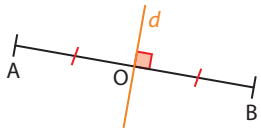



$\mathcal{V} = \dfrac{4 \times \pi \times r^3}{3}$

## Milieu et médiatrice

• La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment passant par son milieu.

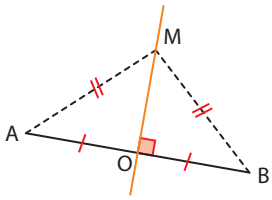
**Exemple**
*d* est la médiatrice du segment [AB].




• Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

Réciproquement, si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est situé sur la médiatrice de ce segment.

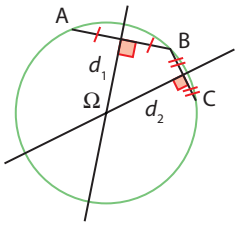
**Exemple**
M appartient à la médiatrice de [AB].
Donc MA = MB.



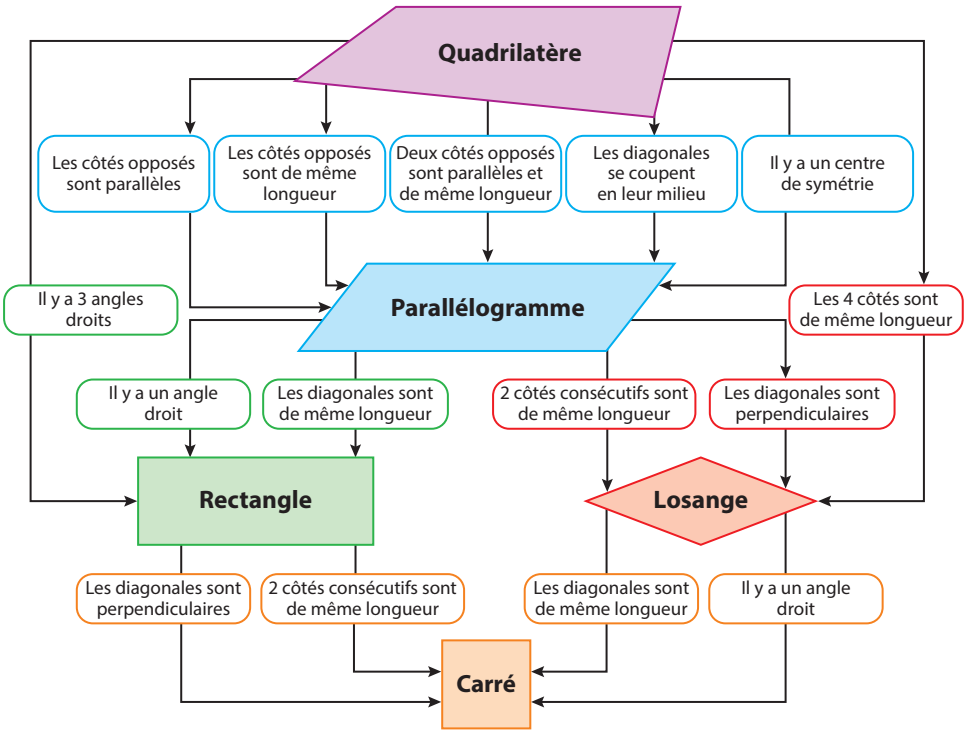

• Soient A, B et C trois points d'un cercle de centre Ω.

Les médiatrices de [AB] et [BC] sont sécantes en Ω.

**Exemple**
A, B et C sont sur le cercle de centre Ω, avec $d_1$ la médiatrice de [AB] et $d_2$ la médiatrice de [BC]. $d_1$ et $d_2$ se coupent alors en Ω.



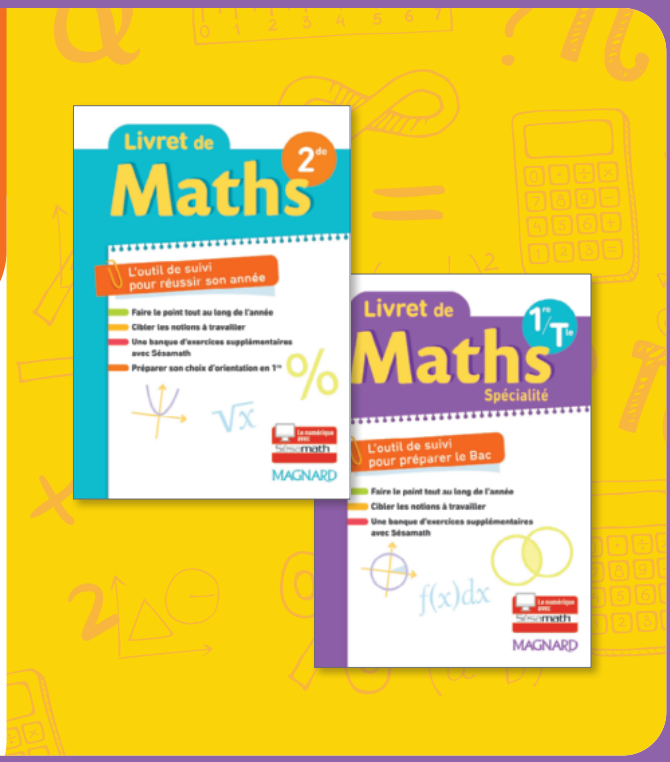

## Quadrilatères



# Livrets de Maths

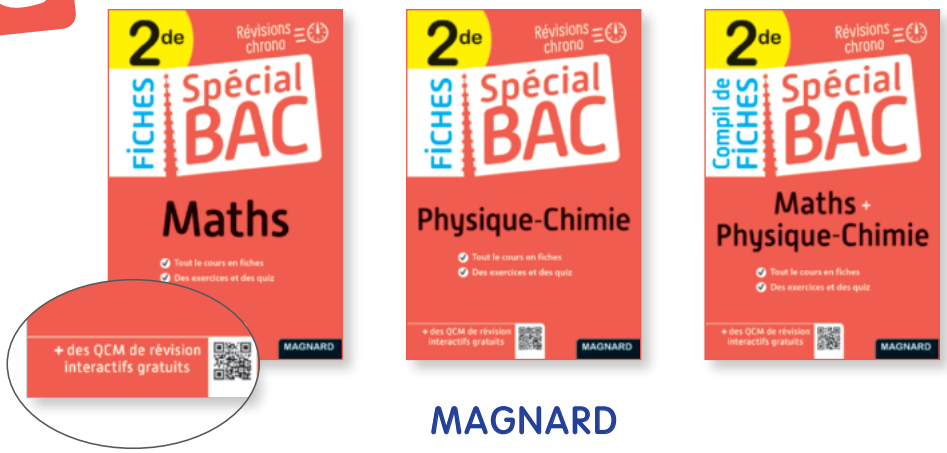
**Deux outils de suivi pour mieux s'orienter et avoir son Bac !**

MAGNARD




## Spécial BAC

***Réussis ta 2de tout en te préparant au Bac !***




MAGNARD

ISBN : 978-2-210-11827-0

Cet ouvrage a été imprimé sur du papier provenant de forêts gérées durablement.

MAGNARD
www.magnard.fr